SOBRE LAS TRAYECTORIAS EN LA VECINDAD DE UNA SINGULARIDAD TRIDIMENSIONAL

POR SAMUEL BAROCIO

En el estudio de las singularidades tridimensionales, es importante decidir si dada una esfera en que todas las trayectorias penetran, y que tiene un solo punto singular en su interior, existe siempre una trayectoria que entra, o que al menos se acerca arbitrariamente, a dicha singularidad.[1] En esta nota se construye un ejemplo en que tal cosa no sucede.

Al estudiar los sistemas bidimensionales, Poincaré observó que alrededor de un ciclo límite cualquiera hay una región anular—"anillo-límite"—limitada por dos ciclos sin contacto y surcada por ciclos sin contacto que no se cortan en ningún punto; y que alrededor de los nudos y focos se pueden trazar también ciclos sin contacto ([1], p. 62). Además, hay anillos de ciclos sin contacto—"regiones dudosas"—en que no se sabe a priori si existen ciclos límites (ibid. pp. 76–80).

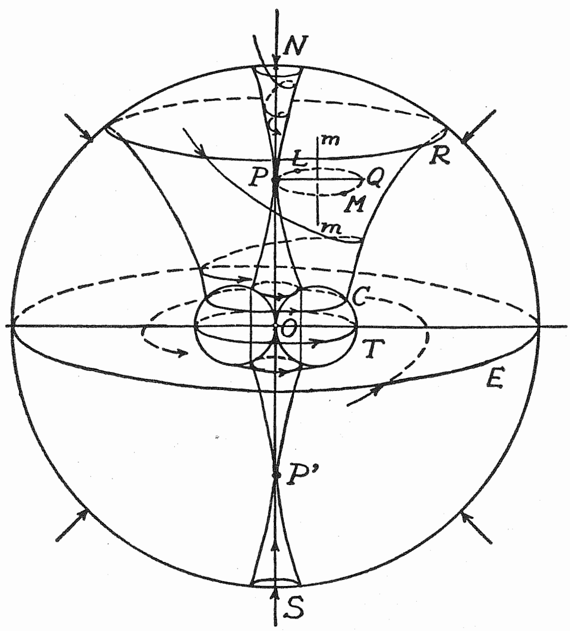

FIG. 1

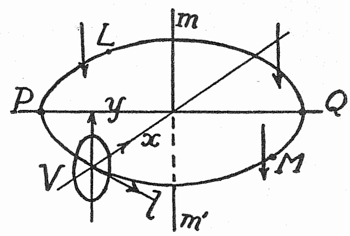

FIG. 2

Las anteriores observaciones de Poincaré sugieren inmediatamente la posibilidad de introducir un ciclo límite en un anillo de ciclos sin contacto sin deformar el campo en las fronteras del anillo, ni introducir puntos singulares. Este tipo de transformación nos permitirá "cortar" familias de trayectorias, de manera de volver inaccesible desde el exterior una vecindad esférica de una singuaridad tridimensional.

[1] Este problema fué propuesto por S. Lefschetz.

Consideremos la siguiente distribución de trayectorias en una esfera (fig. 1). En el centro un toro T, en el que el agujero se ha contraído en un punto O. Tanto la superficie cuanto el interior del toro se han fibrado con círculos paralelos al ecuador de la esfera E. Tomando por eje la línea de los polos NOS, construyamos dos conos de doble manto tangente a dicha línea, con vértices P, P', llenando el interior de los conos con conos coaxiales con los primeros. El espacio entre el ecuador E y el exterior de los conos foliémoslo por medio de superficies de revolución R. Todas estas superficies, junto con los conos y el plano del ecuador se apoyan sobre los círculos con que se fibró la superficie de T. En esta primera etapa el campo vectorial va a tener tres singularidades P, O y P'. La línea de los polos es trayectoria. En la superficie de los conos sobre NP, las trayectorias penetran del exterior hasta P, y de este punto nodal salen trayectorias que espiraleando en las superficies de los conos tienden a los círculos de la superficie de T, como ciclos límites. Sobre las otras superficies de revolución R y E las trayectorias penetran y espiralean también a ciclos límites sobre T; análogamente en el hemisferio inferior.

Vamos ahora a transformar el campo en el interior de la esfera de modo que sólo tenga la singularidad O. Consideremos un círculo $PMQL$ paralelo al ecuador. Es claro que excepto por que contiene a la singularidad P, podemos tomar este círculo como una curva sin contacto, que transformada convenientemente nos dará lugar a una configuración tridimensional del tipo de los anillos límites de Poincaré.

Tomemos ahora (fig. 2) coordenadas locales x, y, l sobre el círculo $PMQL$. Supongamos que se ha tomado la unidad de medida suficientemente pequeña para que un círculo V de radio $r = 1$ describa un toro alrededor de mm' (paralela a NO). En dicho toro, consideremos desplazamientos a lo largo de círculos con eje mm' dados por $l = [(x^2 + y^2)^{-1/2} - 1]y$. Esta transformación es idénticamente cero sobre la superficie del toro descrito por V y continua excepto en el eje $PMQL$, y $\partial l/\partial y \to \infty$ cuando $(x^2 + y^2)^{1/2} \to 0$. Si consideramos $PMQL$ como trayectoria del campo transformado, se realizan las condiciones buscadas. Las trayectorias que inicialmente entraban al toro generado por V sin cortar el eje, dan ahora un cierto número de vueltas, (mayor mientras más cerca de $PMQL$ pasaban), y después tienden a algún ciclo límite fuera de las bases de los conos, sobre la superficie de T. Finalmente, dentro del cilindro que tiene por tapas las bases de los conos, hay una esfera con centro en O, que es inaccesible desde fuera siendo O la única singularidad del sistema transformado.

F. B. Fuller [2], utilizando un método equivalente a la sección de trayectorias, ha construído un interesante ejemplo de un toro sólido con un campo vectorial que no se anula en ninguna parte y sin trayectorias cerradas no contractibles en el toro.

Universidad Nacional Autónoma de México e
Instituto Nacional de la Investigación Científica

Referencias

[1] H. Poincaré, Oeuvres, Tome I, Paris, Gauthier-Villars 1951.
[2] F. B. Fuller, *Note on trajectories in a Solid-Torus*. Ann. of Math., 53, (1952), p. 438–439