UN LEMME SUR LES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

PAR RENÉ THOM

Introduction

H. Whitney, dans son étude récente des singularités des applications plan sur plan [6], a introduit la notion fort importante d' "application excellente". Toute application assez voisine d'une application excellente est elle-même excellente, et toute application peut être approchée d'aussi près qu'on veut par une application excellente (dans un espace fonctionnel convenable); la notion apparait donc, comme l'extension en Géométrie Différentielle de la notion de "générique" bien connue en Géométrie Algébrique: en Géométrie Algébrique une propriété est dite générique pour les points d'un espace, si elle est vraie de tous les points de cet espace, à l'exception des points d'une vraie sous-variété; dans la théorie ici considérée, l'espace est un espace fonctionnel qui est un espace de Baire, et la sous-variété exceptionnelle est remplacée par un sous-espace fermé sans point intérieur. De plus, les applications excellentes ont la remarquable propriété que voici: *Toute application g assez voisine d'une application excellente f est topologiquement équivalente à f.* Pour tout couple d'entiers n, p, il est légitime de penser qu'il existe des applications excellentes de l'espace euclidien R^n dans R^p; avant d'aborder ce problème- à la vérité fort ardu- de l'existence des applications excellentes, on peut chercher à les caractériser par leurs singularités: on se propose de décrire et classifier un certain ensemble de singularités (S), tel que les applications qui présentent des singularités du type (S) et uniquement de celles-là forment un ensemble "générique" au sens précédent. Bien entendu, on recherche parmi tous les ensembles (S) qui jouissent de cette propriété un ensemble minimal; un tel ensemble est nécessairement unique, si, pour la topologie d'espace fonctionnel considéré, chaque singularité de (S) définit un ouvert. Ce sont là les singularités "génériques" que j'ai considérées dans un article récent [3]. La détermination du tableau des singularités génériques pour tout couple d'entiers (n, p) est un problème à peine abordé. Il est apparu toutefois qu'un lemme général sur l'approximation d'applications différentiables serait dans ce but d'une utilité considérable. Des cas particuliers de ce lemme ont été donnés par M. Morse dans le cas des fonctions, par H. Whitney et moi-même dans le cas des ensembles critiques du premier ordre d'une application. J'ai annoncé dans un Exposé au Séminaire Bourbaki (Paris, mai 1956) ce lemme sous sa forme la plus générale, sans en donner alors de démonstration complète. Depuis, les observations et suggestions que m'a présentées H. Whitney lors du *Congrès de Topologie de Mexico* m'ont amené à mettre au point cette démonstration, que je soumets ici. L'idée fondamentale n'a rien d'original, car elle se trouve déjà dans l'article [1] de M. Morse; mais la généralisation donnait lieu à d'assez considérables difficultés de présentation. On observera que le lemme général, restreint à l'ordre zéro, équivaut au théorème 1.5 d'un article antérieur [5].

Je donne ensuite quelques applications du Lemme, concernant notamment la structure des ensembles critiques des applications "excellentes" qui diminuent la dimension. Pour terminer, je reviens sur quelques points soulevés dans [3] et [4]. J'établis que toute variété algébrique réelle possède un cycle fondamental mod 2, ce qui permet d'affirmer de façon rigoureuse l'invariance par homotopie des classes d'homologie mod 2 des cycles critiques d'ordre supérieur.

Pour terminer, j'aimerais présenter quelques remarques relatives à la terminologie; à mon sens, la dénomination "excellente" devrait être réservée aux applications dont le type topologique ne varie pas lors d'une déformation assez petite. D'une application qui satisfait aux conditions du Lemme relativement à une sous-variété P donnée, on dirait qu'elle est "correcte sur P". On pourrait convenir d'appeler "correcte" absolument (sans référence à une sous-variété) une application dont les ensembles critiques de tous ordres sont donnés par des applications transversales sur les sous-variétés (cycles de Schubert, etc.) qui les définissent. Dans la terminologie de [3], générique à la source = correcte, générique au but = excellente. Par exemple: une fonction réelle sur $I = [0, 1]$ qui ne présente que des minimum et maximum à dérivée seconde $\neq 0$, est une fonction "correcte". Si de plus les valeurs critiques sont toutes distinctes, c'est une application excellente. L'avantage essentiel de l'adjectif "correct" est qu'il permet l'emploi du verbe "corriger", du substantif "correction". On pourrait ainsi éliminer l'emploi de l'adjectif "générique" (évitant ainsi de généraliser les abus auxquels il a donné lieu en Géométrie Algébrique). De même, on éviterait l'emploi de "régulier", "régulariser", etc. dans le sens du théorème 1.5 de [5], emploi fâcheux, car il donne à ces termes un sens tout différent de celui qui leur est déjà attribué en Analyse Fonctionnelle. On dirait ainsi: l'application f applique V^n dans M^p correctement sur la sous-variété P^{p-q}; remplacer f par une application g correcte sur P se dirait: corriger f. Avec cette terminologie, toute application excellente est correcte (au sens absolu); le problème central de la théorie est de montrer que toute application correcte (au sens absolu) est localement excellente.

Le Lemme Général

NOTATIONS. f est une application de classe C^q de l'espace euclidien R^n de coordonnées $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ dans l'espace euclidien R^m (coordonnées y_j, $j = 1, 2, \cdots m$). On introduit également un espace euclidien de grande dimension R^N, de coordonnées u_k, $k = 1, 2, \cdots, N$. Les variables u_k seront identifiées aux dérivées partielles d'ordre $\leqq r (r < q)$ de l'application f par des formules de la forme:

$$(1) \quad u_1 = y_1, \quad u_2 = y_2, \cdots, u_m = y_m; \quad u_{m+1} = \partial y_1/\partial x_1, \cdots, u_N = \partial^r y_m/(\partial x_n)^r.$$

A toute application $f: R^n \to R^m$ se trouve associée par les formules (1) une application $F: R^n \to R^N$, qu'on appellera l'application *dérivée* de l'application f.

On se donne, dans l'espace R^N des variables u_k, une sous-variété P^{N-p} de codimension p, qu'on suppose plongée sans singularité. Soit $L(n, m; q)$ l'espace des applications f de R^n dans R^m, muni de la topologie définie par l'écart sur toutes les dérivées partielles d'ordre $\leqq q$ de f sur tout compact de R^n; c'est un espace de Baire. Le lemme général s'énonce:

LEMME GÉNÉRAL 1. *Etant donné un compact K de R^n, et une application f de R^n dans R^m, il existe des applications g arbitrairement voisines de f dans*

$$L(n, m; q)$$

telles que la restriction à K de l'application G dérivée de g soit transversale (t-régulière) sur P^{N-p} dans R^n dès que q est assez grand.

Ceci entraine que l'ensemble des f telles que la dérivée F de f, restreinte à K, soit transversale sur P^{N-p}, est un ouvert partout dense de $L(n, m; q)$.

On se ramène au problème local suivant:

LEMME LOCAL 2. *Pour tout couple de points $x \in K$, $y \in P$, tels que $y = F(x)$ (F dérivée de f), il est possible de définir:*

1°) *Un voisinage U_x de x dans R^n*

2°) *Un voisinage V_y de y dans R^N*

3°) *Un voisinage W_f de f dans $L(n, m; q)$ tels que:*

a) *Pour toute $g \in W_f$, l'image de U_x par la dérivée G de g est contenue dans V_y*

b) *Pour toute application $h \in W_f$, il existe des g arbitrairement voisines de h dans W_f, telles que l'application dérivée G de g, restreinte à $K \cap U_x$, est transversale dans R^N sur $V_y \cap P^{N-p}$.*

Montrons d'abord que le lemme local entraîne le lemme général: On recouvre le compact K d'un nombre fini de voisinages U_{x_i}, et soient V_{y_i}, W_{if} les voisinages associés. Posons $W = \bigcap_i W_{if}$, et soit (s_i) l'ensemble des $g \in W$ telles que la restriction à K_i de la dérivée G de g ne soit pas transversale sur $P^{N-p} \cap V_{y_i}$ dans V_{y_i}. L'ensemble (s_i) est dans W un fermé *sans point intérieur* (d'après le lemme local). Donc l'ensemble (s) des applications $g \in W$ telles que la dérivée G de g, restreinte à K, ne soit pas transversale sur P^{N-p} est la réunion (finie) des (s_i); c'est donc un fermé *sans point intérieur*. Donc toute $f \in W$ peut être approchée d'aussi près qu'on veut par une g telle que la restriction à K de la dérivée G de g soit transversale sur P^{N-p}.

Démonstration du Lemme local

Soit (x, y) le couple de points tel que $F(x) = y$. On supposera, pour simplifier l'écriture, que x est l'origine O de R_n. Dans un voisinage de y, la sous-variété P^{N-p} est définie par un système d'équations locales:

$$H_1(u_k) = H_2(u_k) = \cdots = H_p(u_k) = 0$$

et, dans ce voisinage, les différentielles $dH_j (j = 1, 2, \cdots, p)$ sont supposées linéairement indépendantes en tant que formes linéaires des du_k. C'est dire que, parmi tous les mineurs d'ordre p de la forme $D(H_j)/D(u_j)$, il en existe au moins un, soit $J = D(H_j)/D(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p})$, qui est différent de zéro dans un voisinage de y. On supposera que, sur le voisinage V_y de y, on a:

$$|J| \geqq B > 0 \tag{2}$$

Si on substitue dans J aux variables u_k les dérivées partielles d'une application g par les formules (1), alors J devient une fonction des coordonnées (x_i) qu'on désignera par $J(g)$.

Introduisons maintenant quelques notations: à la dérivation partielle

$$\partial^r/\partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_r},$$

on associe le monôme $(x_{k_1}) \cdots (x_{k_r})$. On posera, symboliquement,

$$\omega_k = [k_1, k_2, \cdots, k_r] \quad \text{et} \quad x_{k_1}x_{k_2} \cdots x_{k_r} = x_{\omega_k}.$$

On écrira de même $\partial^r y_j/\partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_r} = \partial^r_{\omega_k} y_j$. Si le monôme $x_{\omega'}$ contient le monome x_ω en facteur, on écrira $\omega' > \omega$ et $x_{\omega'} = x_\omega \, x_{[\omega' - \omega]}$. Définissons de même certains coefficients entiers $b_\omega^{\omega'}$, ne dépendant que de ω, ω' par la formule

$$\partial_\omega x_{\omega'} = b_\omega^{\omega'} x_{[\omega' - \omega]}$$

Observons que si ω ne divise pas ω', $b_\omega^{\omega'} = 0$. En changeant au besoin la numérotation des variables u_k, on supposera que les p variables u_j qui définissent le le jacobien J sont les p premières $u_1, u_2, \cdots, u_p$. On désignera par

$$\partial_{\omega_1}(y_{j_1}), \partial_{\omega_2}(y_{j_2}), \cdots, \partial_{\omega_p}(y_{j_p})$$

les dérivées partielles associées aux $u_1, \cdots, u_p$ par les formules (1), et par $x_{\omega_1}, \cdots, x_{\omega_p}$ les monômes correspondants. Soit g une application de R^n dans R^m définie par des fonctions: $y_j = g_j(x_i)$. On va déformer localement g (autour de 0) en remplaçant la fonction y_j par la fonction:

$$\bar{y}_k = g_k(x_i) + \sum \lambda_{\omega_q}/b_{\omega_q}^{\omega_q} \cdot x_{\omega_q} \tag{3}$$

où la sommation s'étend à tous les symboles ω_q, tels que la variable y_{j_q} (qu'on dérive par rapport à x_{ω_q}) coincide avec y_k. Dans la formule (3), les paramètres λ_{ω_q} seront supposés petits. On ajoute ainsi à y_k autant de monômes x_{ω_q} que y_k figure parmi les dérivées partielles associées au mineur J.

Les paramètres λ_ω étant supposés variables, et les coordonnées (x_i) d'un point voisin de 0 étant fixées, calculons la dérivée partielle

$$\partial H_i/\partial \lambda_{\omega_q} = \sum_k \partial H_i/\partial u_k \cdot \partial \bar{u}_k/\partial \lambda_{\omega_q} \qquad k = 1, 2, \cdots, N \tag{4}$$

en désignant par $\bar{u}_k$ les dérivées partielles de l'application $\bar{g}$.

$$\bar{u}_s = \partial \bar{y}_{j_s}/\partial x_{\omega_s} = \partial_{\omega_s} g_{j_s} + \partial_{\omega_s}\left(\sum \lambda_{\omega_\mu}/b_{\omega_\mu}^{\omega_\mu} \cdot x_{\omega_\mu}\right) \tag{5}$$

où la sommation s'étend à tous les ω_μ ($\mu = 1, 2, \cdots, p$) associés à des dérivées partielles de la fonction y_{j_s}. Deux cas sont possibles: ou ω_μ contient ω_s ; dans ce cas:

$$\partial^{r_s}(1/b_{\omega_\mu}^{\omega_\mu} \cdot x_{\omega_\mu})/\partial x_{\omega_s} = b_{\omega_s}^{\omega_\mu}/b_{\omega_\mu}^{\omega_\mu} \cdot x_{[\omega_\mu - \omega_s]}$$

en particulier, si la variable u_s figure parmi les variables u_k relatives a J (i.e si $s \leqq p$), alors ω_s figure parmi les ω_μ, et l'on a le terme:

$$\partial^{r_s}(1/b_{\omega_s}^{\omega_s} \cdot x_{\omega_s})/\partial x_{\omega_s} = 1$$

Si, au contraire, x_{ω_μ} n'est pas divisible par x_{ω_s}, alors la dérivée $\partial_{\omega_s}(x_{\omega_\mu}) = 0$. Finalement (5) donne:

$$\bar{u}_s = \partial g_{i_s}/\partial x_{\omega_s} + \sum_{(\omega_\mu > \omega_s)} \lambda_{\omega_\mu} b_{\omega_s}^{\omega_\mu}/b_{\omega_\mu}^{\omega_\mu} \cdot x_{[\omega_\mu - \omega_s]} \tag{6}$$

et, en isolant le terme obtenu pour $\omega_\mu = \omega_k$, si $s = k \leqq p$:

$$\bar{u}_k = \partial g_{j_k}/\partial x_{\omega_k} + \lambda_{\omega_k} + \sum_{k \neq \mu (\omega_\mu > \omega_s)} \lambda_{\omega_\mu} b_{\omega_k}^{\omega_\mu}/b_{\omega_\mu}^{\omega_\mu} \cdot x_{[\omega_\mu - \omega_k]} \tag{6'}$$

Par suite, en substituant (6) (et (6')) dans (4), on a:

$$\partial H_i/\partial \lambda_{\omega_\mu} = \sum_{k=1,2,\cdots,N} \partial H_i/\partial u_k \cdot b_{\omega_k}^{\omega_\mu}/b_{\omega_\mu}^{\omega_\mu} \cdot x_{[\omega_\mu - \omega_k]}$$

et, en isolant du $\sum$ le terme obtenu pour $k = \mu$, si $\mu < p$.

$$\partial H_i/\partial \lambda_{\omega_k} = \partial H_i/\partial u_k + \sum_{j \neq k (\omega_k > \omega_j)} \partial H_i/\partial u_j \cdot b_{\omega_j}^{\omega_k}/b_{\omega_k}^{\omega_k} \cdot x_{[\omega_k - \omega_j]}$$

On écrira, pour simplifier $\lambda_{\omega_k} = \lambda_k (k = 1, 2, \cdots, p)$. Si on forme le jacobien $K = D(H_1, H_2, \cdots, H_p)/D(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$, on voit que, pour $(x_i) = 0$, K se réduit au mineur $J = D(H_1, H_2, \cdots, H_p)/D(u_1, u_2, \cdots, u_p)$.

Le voisinage V_y de y dans R^N étant déterminé par la condition (2), on fera choix d'un voisinage W_f de f dans $L(n, m; q)$, assez petit pour que l'image de $0 = x$ par la dérivée G de toute $g \in W_f$ soit dans un ouvert V'_y contenu dans intérieur de V_y. Cela étant, on choisira le voisinage U_x de O assez petit dans R^n pour que:

a) l'image de U_x par la dérivée G de toute $g \in W_f$ soit contenue dans V_y

b) Pour toute $g \in W_f$, la différence $| K(g) - J(g) |$ soit $<B/2$ en tout point de U_x.

Une telle majoration est possible uniformément quel que soit $g \in W_f$ parce que, pour toute $g \in W_f$, les dérivées partielles de g sont majorées par des quantités fixes, ce qui permet de majorer la différence $K - J$.

Les voisinages U_x, V_y, W_f étant ainsi choisis, soit g une application de W_f; formons une application $\bar{g}$, voisine de g, dont la restriction à U_x s'obtient à partir de g par les formules (3); on pourra évidemment supposer que $\bar{g}$ est dans W_f si les λ_k sont pris assez petits. Dans ces conditions on aura, en tout point de U_x; $| J(\bar{g}) | > B$ (formule (2)), et $| K(\bar{g}) - J(\bar{g}) | > B/2$. Par suite, sur U_x, $| K(\bar{g}) | > B/2$. Considérons alors le système d'équations:

$$H_1(\bar{u}_k) = H_2(\bar{u}_k) = \cdots = H_p(\bar{u}_k) = 0, \tag{7}$$

ou les $\bar{u}_k$ désignent les dérivées partielles de l'application $\bar{g}$, données par les formules (6). L'ensemble (S) des points de U_x solutions de (7) est l'image réciproque de $P^{N-p} \cap V_y$ par l'application $\bar{G}$ dérivée de $\bar{g}$. Supposons que pour $\lambda = 0$, l'ensemble $S = G^{-1}(P \cap V_y)$ ne soit pas vide dans U_x ; s'il n'en était pas ainsi pour toute g assez voisine de f, le lemme local serait établi, puisque $G(U_x)$ ne rencontrerait pas P. Il existe alors au moins un point (x_0) de U_x, tel que, pour $\lambda = 0$, le système (7) soit satisfait. Puisque $K(g) \neq 0$ sur U_x, le système (7) peut être résolu par rapport aux variables λ, en vertu du théorème des fonctions implicites; on obtient ainsi des fonctions: $\lambda_1 = \psi_1(x_i)$, $\lambda_2 = \psi_2(x_i) \cdots \lambda_p = \psi_p(x_i)$, qui définissent une application ψ de U_x dans R^p, de classe C^{q-r}. On a $\psi(x_0) = 0$. Si $q - r > n - p$, le théorème de Sard permet d'affirmer que l'application a des valeurs régulières arbitrairement voisines de $(\lambda_k = 0)$. Soit λ_k^0 une telle valeur régulière. Je dis que si l'on forme l'application $\bar{g}$ correspondant à $\lambda_k = \lambda_k^0$, alors l'application dérivée $\bar{G}$ de $\bar{g}$, restreinte à U_x, est transversale sur $P \cap V_y$. En effet, soient (x_i) les coordonées d'un point x tel que $\bar{G}(x) \in P$; alors le système (7) est satisfait pour $x = (x_i)$ et $\lambda_k = \lambda_k^0$, donc $\psi_k(x_i) = \lambda_k^0$. Dire que l'application ψ admet λ_k^0 pour valeur régulière, c'est dire qu'en tout point (x_i) tel que $\psi_k(x_i) = \lambda_k^0$, le produit extérieur $d\psi_1 \wedge d\psi_2 \wedge \cdots \wedge d\psi_p$ est une forme linéaire non nulle des $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$. Formons alors la différentielle totale de la fonction $H_i(\bar{u}_k)$ par rapport aux variables x_j et λ_k :

$$dH_i(\textit{totale}) = dH_i(\lambda \textit{ fixes}) + \sum_k \partial H_i/\partial\lambda_k \cdot d\lambda_k$$

Or, si l'on remplace $d\lambda_k$ par la différentielle $d\psi_k$ de la fonction ψ_k on obtient $dH_i = 0$, puisque, pour $\lambda_k = \psi_k(x_i)$, la fonction H_i est identiquement nulle (système (7)). Donc:

$$dH_i(\lambda_k \textit{ fixes}) = -\sum \partial H_i/\partial\lambda_k \cdot d\psi_k$$

et, par produit extérieur $(\lambda_k = \lambda_k^0)$:

$$dH_1 \wedge dH_2 \wedge \cdots \wedge dH_p = \sum (-1)^p D(H_1, H_2, \cdots, H_p)/D(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \cdot d\psi_1 \wedge d\psi_2 \wedge \cdots \wedge d\psi_p .$$

Le second membre étant non nul par rapport aux $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$, le premier membre l'est aussi, ce qui montre que l'application $\bar{G}$, pour $\lambda_k = \lambda_k^0$ est, sur U_x, transversale sur P^{N-p}. Le lemme est ainsi entièrement démontré.

Applications du Lemme Général

Mise sous forme "correcte" d'une application. Soit f une application de R^n dans R^m; comme on l'a vu dans [3] le lieu S_r des points de R^n où le rang de l'application f est égal à $(m - r)$, est, après une éventuelle correction de f, une sous-variété de codimension $r(n - m + r)$ (produit des corangs). On a vu, que, dans ces conditions, la dimension de S_r est toujours strictement inférieure à la dimension m de l'espace-but.

Supposons qu'on se soit donné dans R^n une sous-variété P^{n-q}, définie par un système d'équations $g_j(x_i) = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, \mathrm{q})$; on se propose de rechercher le lieu des points $S_r(P)$ tels que l'application f, restreinte à P, soit de rang $(m - r)$; on sera amené à résoudre le système $g_j(x_i) = 0$ par rapport à q des variables x_i, et à écrire, au moins localement, les équations de P sous la forme $x_j = h_j(x_k)$, $j = 1, 2, \cdots, q$, $k = q + 1, \cdots, n$, par exemple; la restriction de f à P est alors donnée par les équations $y_r = f_r(h_j(x_k); x_k)$, et on écrira que les mineurs d'un certain rang de la matrice jacobienne de cette application composée sont tous nuls; les mineurs ainsi introduits contiennent nécessairement les dérivées du premier ordre des fonctions h_j, donc des fonctions g_j, et ceci sous forme non triviale (c'est-à-dire, avec des coefficients non nuls contenant les dérivées de f); supposons alors que la sous-variété P^{n-q} soit la sous-variété critique S_r précédemment considérée; alors le lieu $S_{r'}$, (S_r) des points de S_r en lesquels le rang de la restriction de f à S_r s'abaisse de r' unités est donné par l'annulation d'un certain nombre de mineurs qui contiennent sous forme non triviale les dérivées du premier ordre des équations de S_r, par suite les dérivées du second ordre de l'application f. On pourra rendre l'application f correcte pour ces conditions (en la laissant correcte sur S_r, bien entendu). Ceci montre que $S_{r'}$, (S_r) sera, pour l'application corrigée, une vraie sous-variété de S_r ; en tout point du complémentaire de $\overline{S_1(S_r)}$ dans S_r, l'application f (restreinte à S_r) est de rang maximum.

Cette construction se généralise: on pourra définir $S_{r''}S_{r'}S_r$ comme lieu des points ou la restriction de f à $S_{r'}S_r$ est de rang infériur de r'' unités au rang maximum: ce lieu est une vraie sous-variété dont les équations contiennent de façon non triviale les dérivées troisièmes de l'application f; et ainsi de suite, on définira, par induction, des ensembles critiques d'ordre k, associés à un symbole $S_{i_1}S_{i_2} \cdots S_{i_k}$, qui seront des sous-variétés définies par des équations contenant les dérivées d'ordre k de l'application f.

Un problème général et non résolu consiste, pour tout couple d'entiers n, m, et tout symbole $S_{i_1} \cdots S_{i_k}$, à calculer la dimension de la variété associée au symbole, de façon à dresser le tableau des symboles qui conduisent à des variétés de dimension positive: ce sont les seules qui se présentent pour des applications "correctes" (au sens absolu). Dans mon exposé au Séminaire Bourbaki, j'ai donné ce tableau pour $n, m \leqq 5$; comme me l'a fait remarquer H. Whitney, le tableau contient l'inexactitude suivante: la singularité $S_2(S_1)$ apparait pour la première fois pour $n = 5$, $m = 4$, et non $n = 4$, $m = 3$ ainsi qu'il est porté. De même, le problème de la classification topologique de ces singularités n'est qu'à peine abordé; on sait que pour un point de S_1 (avec $n \geqq m$), le type topologique est déterminé par la donnée de l'indice de la forme quadratique transversale; ce type ne peut varier qu'en traversant la sous-variété exceptionnelle du 2° ordre $S_1(S_1)$. Il n'en va plus de même pour S_2, sur lequel le type topologique peut varier, sans qu'on ait à traverser une variété critique du second ordre (remarque que m'a communiquée H. Whitney). Il est intéressant toutefois d'énoncer une propriété générale des applications "correctes" dans le cas où l'application f abaisse la dimension ($n \geqq m$).

THÉOREME 3. *Si f est une application correcte de R^n dans R^m, avec $n \geqq m$, l'image reciproque par f d'une sous-variété P^{m-q} de R^m, de codimension q, est de dimension $n - q$ ou de dimension $m - q$. Autrement dit: quand on passe de P à $f^{-1}(P)$, il y a conservation soit de la dimension, soit de la codimension.*

Démonstration. Supposons que $f^{-1}(P)$ contienne des points réguliers pour l'application f, soit x par exemple; dans ces conditions, f applique un vosinage de x correctement sur P dans un voisinage de $y = f(x)$; par suite, l'image réciproque $f^{-1}(P)$ est, dans un ce voisinage de x, une sous-variété de dimension $n - q$. Si $f^{-1}(P)$ ne contient aucun point régulier pour f, alors $f^{-1}(P)$ est contenue dans l'ensemble (S) des points singuliers; par suite $f^{-1}(P)$ a des points dans un $S_{i_1} \cdots S_{i_j}$ d'ordre minimal j; au voisinage d'un tel point x $f^{-1}(P)$ est entièrement contenue dans cette veriété critique d'ordre j; comme, en un point de $S_{i_1} \cdots S_{i_j}$ qui n'appartient pas aux variétés critiques d'ordre $k + 1$ $S_{i_0}S_{i_1} \cdots S_{i_j}$ contenues dedans, f est une injection de rang maximum, P a nécessairement même dimension que $f^{-1}(P)$.

Ce théorème est d'un emploi commode pour reconnaitre qu'une application n'est pas correcte; par exemple, l'application de R^4 sur R^4 définie dans [3] par les équations: $U = u$, $V = v$, $X = x^2 + y^2$, $Y = ux + vy$, n'est pas correcte, car l'image réciproque de l'axe des X, $U = V = Y = 0$ est le 2-plan $u = v = 0$, remarque que je dois également à H. Whitney. De même, la plupart des applications qui sont définies (dans le domaine réel) comme des applications analytiques complexes ne sont pas correctes: un exemple typique est donné par l'application associée à l'éclatement d'un point (σ-Prozess) dans C^2.

Propriétés homologiques globales des ensembles singuliers

Dans le lemme général, nous avons supposé que la sous-variété P de l'espace R^N des variables u_k identifiées aux dérivées partielles de f était plongée sans singularités. En fait, cette condition est rarement satisfaite dans la pratique; la sous-variété P qu'on rencontre est en général une sous-variété algébrique de R^N, pourvue en général de singularités. On sait qu'alors on peut définir dans P une suite de sous-variétés emboîtées $P \supset P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_r \supset P_{r+1}$, telle que P_{j+1}, est le lieu des points singuliers de P_j ; alors $P_j - P_{j+1}$ est une sous-variété sans singularités, à laquelle on peut appliquer le lemme général; finalement on obtient une application f correcte sur chaque complémentaire $P_j - P_{j+1}$, et ce, simultanément pour tous les indices j. On obtient ainsi de précieux renseignements sur la façon dont $f^{-1}(P_{j+1})$ est plongée dans $f^{-1}(P_j)$. Cf [3], où on a étudié le cas où P est un cycle de Schubert de la grassmannienne.

Supposons que P, en tant que polyèdre, soit un cycle à coefficients dans un groupe G; soit U un voisinage ouvert de P dans R^N dont P est rétracte par déformation; alors il existe, pour l'application dérivée F de f, un "homomorphisme de Gysin" de $H_j(P)$ dans $H_{n-N+j}(F^{-1}(P))$. On peut donc affirmer que l'image réciproque $F^{-1}(P)$ porte un cycle, même si f n'est pas correcte (ceci sous la seule condition que $F^{-1}(P)$ soit un rétracte absolu de voisinage).

Si l'on s'intéresse aux propriétés homologiques de $F^{-1}(P)$, il est donc important de connaître les propriétés homologiques de P. Dans le cas où P est une variété algébrique réelle (complète), on sait que P possède un cycle fondamental mod 2. Le fait parait connu, mais, comme il est fréquent en Géométrie Algébrique, il semble impossible d'en trouver une démonstration dans la littérature. J'en soumets ici une démonstration, dont je dois, en partie, le principe à une suggestion de C. Chevalley.

Soit r la dimension de la variété P; soit P_1 la variété des points singuliers de P; $P - P_1$ est de dimension r, et la dimension de P_1 est au plus $r - 1$; si elle est $<r - 1$, alors le théorème est démontré, puisqu'alors P est une pseudo-variété; si P_1 est de dimension $r - 1$, on considère un point régulier de P_1 (point de $P_1 - P_2$). On coupe en ce point par une section plane orthogonale à P_1 (et de dimension complémentaire à $(r - 1)$); la section ainsi obtenue est une courbe algébrique Γ qui présente en x un point singulier. Dire que P est un cycle mod 2, c'est dire qu'en tout point x de P_1 il existe un nombre pair de r-simplexes qui contiennent x dans leurs faces; c'est donc, par section, affirmer qu'il existe un nombre pair de branches issues du point singulier x de la courbe Γ. Ceci se démontre comme suit: soit S la courbe algébrique complexe correspondante: c'est, topologiquement, une surface. Ceci peut s'affirmer, dans le cas, réalisé dans la pratique très fréquemment, où la courbe Γ est définie par un système d'équations $G_j(x_j) = 0$ en nombre égal à (dimension du plan H) -1; si les différentielles dG_j sont en effet indépendantes en un point régulier de Γ voisin de x, elles sont également indépendantes en tant que différentielles complexes, et la courbe Γ, en coefficients complexes, est une courbe complexe, donc une surface. On utilise alors le fait que la variété algébrique réelle Γ est le lieu L des points fixes de l'involution I définie sur S par le passage $x_i \to \bar{x}_i$ des coordonnées à leurs nombres conjugués. On sait qu'en général, $\chi(L) = \chi(S)$ mod 2. Si on applique cette relation, au bord B de l'étoile de x dans S, ce bord se compose d'un certain nombre de cercles; donc la caractéristique $\chi(B)$ de ce bord B est paire; donc aussi le nombre des points fixes de I dans B, c'est-à-dire le nombre des branches réelles de Γ issues de x.

On voit que cette démonstration ne vaut que si on suppose la variété P, de dimension r dans R^N, définie localement par un système de $N - r$ équations; cela n'est pas pour nous une restriction, car on n'utilise jamais le lemme général I que sous cette condition. Il serait néanmoins bien utile de lever cette restriction.[1]

Ce théorème permet de montrer de facon rigoureuse l'invariance par homotopie des classes d'homologie mod 2 des cycles critiques d'ordre quelconque pour une application $f: V^n \to M^m$.

Supposons qu'une singularité d'une application $f: R^n \to R^m$ soit définie comme l'ensemble des zéros communs à certains polynomes en nombre q des dérivées partielles de f. Dans ces conditions, si le lieu P est une sous-variété de codimension q, c'est un cycle mod 2; si de plus la singularité a une signification intrinsèque, on peut définir, pour une application $f: V^n \to M^m$, l'ensemble singulier (σ) du type considéré; les considérations locales énoncées plus haut montrent que ce lieu possède un cycle fondamental mod 2, de dimension $n - q$, puisque c'est

[1] En fait, on peut toujours, par projection sur un plan, supposer que la courbe Γ est plane. dans ce cas, elle est définie par une équation, et le raisonnement du texte est valable sans aucune restriction. Par ailleurs il est bien clair que la projection ne modifie en rien le nombre des branches issues de x.

vrai localement. En fait, de façon plus précise, l'ensemble P est alors défini dans un fibré de "jets d'ordre supérieur" au sens d'Ehresmann de V^n dans M^m comme une sous-variété de sections; à toute application $f: V^n \to M^m$ est attachée une application dérivée F qui est une section de ce fibré au dessus de V^n, et on est ramené à considérer l'intersection $F(V^n)$ et de P. Si deux applications f, g sont homotopes, on forme l'homotopie $G: V^n \times I \to M^m \times I$, définie par $G(x, t) = [G_t(x), t]$. Le même raisonnement que plus haut montre alors que les cycles fondamentaux des deux ensembles singuliers de f et g sont homologues mod 2 dans V^n, car ils forment le bord de $G^{-1}(P)$.

Il peut d'ailleurs arriver que P soit un cycle entier, auquel cas (au moins si V^n et M^m sont orientables) il donne naissance à une classe de cohomologie duale entière de dimension q.

Ces considérations s'appliquent aux ensembles critiques d'ordre supérieur du type $S_{i_1}, S_{i_2}, \cdots, S_{i_k}$; en particulier, pour une application d'une variété V^n dans un espace euclidien R^{n+k}, les classes d'homologie mod 2 de ces cycles ne dépendent pas de l'application, et sont des invariants de la structure différentiable de V^n.

Mais le champ d'application de ce théorème semble plus étendu que le seul domaine des singularités "correctes". Donnons en quelques exemples:

Singularités de codimension finie. (presque-génériques au sens de [4]). Supposons qu'un ensemble singulier σ pour une application $f: R^n \to R^m$ soit défini par l'annulation de q polynomes portant sur les dérivées partielles de f; si $q > n$, cette singularité n'apparait pas pour une application "correcte". Mais il est aisé de la faire apparaitre: il suffit d'augmenter la dimension de l'espace source R^n en le multipliant par R^{q-n}; on introduira dans ce but $q - n$ nouveaux paramètres t_j; dans ces conditions, la singularité σ peut se présenter de façon correcte pour une application de R^q dans R^m; l'inconvénient, dans cette façon de faire, est que la singularité n'a plus une signification intrinsèque, car la fibration (t_j = const) de R^q joue dans sa définition un rôle essentiel. On peut cependant redonner à la singularité son caractère intrinsèque par l'artifice suivant: on multiplie également l'espace-but R^m par l'espace des paramètres t_j; on obtient ainsi pour nouvel espace-but un R^{m+q-n}, et on plonge f dans une application $F: R^q \to R^{m+q-n}$ avec conservation des paramètres t_j. Exemple: Soit, dans l'espace $L(R, R)$ des fonctions $y = f(x)$, le point d'inflexion d'une fonction, défini par $f' = f'' = 0$; on introduit le paramètre t, et on est ramené à considérer les applications du plan (x, t) dans l'axe Oy, de telle façon que l'application dérivée F soit "correcte" sur la sous variété $y'_x = y''_x = 0$. La façon la plus simple de l'obtenir consiste à poser $y'' = 6x$, $y' = 3x^2 + t$, d'ou, par intégration $y = x^3 + tx$; dans ces conditions l'application intrinsèque $(x, t) \to (y, t)$ associée n'est autre que le cusp de Whitney [6]. De même un point méplat, où $y' = y'' = y''' = 0$ donnerait, par la même construction, naissance à la singularité $S_1(S_1(S_1))$ du 3° ordre d'une application de R^3 dans R^3. On dira que les fonctions qui présentent une inflexion (critique) forment un sous-espace de codimension 1 de $L(R, R)$, celles qui présentent un méplat un sous-espace de codimension 2.

Il semble qu'il y ait là une construction de caractère tout-à-fait général: à toute singularité de codimension k pour $L(n, m)$ est associé—de façon unique?—une singularité "correcte" pour $L(n + k, m + k)$. Réciproquement, si l'on a pour $L(n + k, m + k)$, une singularité ponctuelle correcte pour laquelle le rang de l'application est k, on peut trouver k fonctions coordonnées (t_j) qui sont conservées par l'application f, et, si l'on fait $(t_j) = 0$ on obtient une application de R^n dans R^m de codimension k, qu'on pourrait appeler la *singularité "extraite"* de la singularité initiale. Cette façon de parler peut d'ailleurs se justifier: au voisinage d'un point ordinaire de l'ensemble J des applications $f \in L(n, m)$ qui présentent la singularité considérée, il existe un voisinage de f dans lequelle J est défini comme lieu des zéros de k fonctions $G_j = 0$, les fonctions G_j étant différentiables au sens de Fréchet sur $L(n, m)$, et les différentielles dG_j étant indépendantes; l'ensemble J, en ses points ordinaires, apparait ainsi comme une variété "banachique" plongée dans $L(n, m)$ avec une codimension finie. Toutefois, une théorie générale de ces variétés de Banach n'existant pas actuellement, nous n'userons pas de cette manière de voir, qui semble cependant prometteuse. Il semble qu'ainsi les singularités des applications différentiables se divisent en deux catégories: celles de codimension finie, et celles de codimension infinie. Les singularités de codimension finie, en tant que singularités extraites de singularités correctes, satisfont au théorème 3 relatif à l'abaissement de dimension. De plus, comme les singularités correctes, elles sont algébroides, c'est-à-dire qu'elles admettent des modèles définis par des applications algébriques. Ces deux critères permettent quelquefois de reconnaitre qu'une singularité est de codimension infinie. Par exemple les singularités des fonctions e^{-1/x^2}, $x \sin 1/x$ à l'origine, sont de codimension infinie parce que non algébroides. La singularité de $L(2, 2)$ définie par les équations $x = u$, $xy = v$ (éclatement de l'origine $u = v = 0$) est également de codimension infinie, parce qu'elle ne satisfait pas au théorème 3: elle est cependant algébroide.

Nous terminons par un exemple; celui des rebroussements dans les espaces de lacets différentiables. Pour une courbe de $L(R, R^m)$ il n' y a pas de singularités "correctes" si $m > 1$ (pour $m = 1$, on a la singularité correcte d'équation $y = x^2$); pour $m > 1$, la première singularité non correcte rencontrée est évidemment le rebroussement défini par $y_i' = 0$. Comme on a m conditions indépendantes pour une seule variable x, la singularité est de codimension $m - 1$; on peut former la singularité "correcte" associée: c'est le point "cuspidal" d'une application de R^m dans R^{2m-1}, qui a été étudié par Whitney [7].

Soit V^n une variété différentiable compacte; il est clair, tout d'abord, que l'espace $\Omega_d(V)$ des lacets différentiables de V, muni de sa topologie d'espace fonctionnel avec écart sur les dérivées d'ordre $\leqq r$, a même type d'homotopie singulier que l'espace des lacets continus: on peut en effet "régulariser" uniformément les lacets continus en lacets différentiables, et la régularisation est une homotopie-équivalence. Soit J le sous-espace de $\Omega_d(V)$ constitué des lacets qui présentent au moins un point de rebroussement; comme on l'a vu plus haut, J est de codimension $(n - 1)$ dans $\Omega_d(V)$; on se propose de montrer l'existence d'une classe de cohomologie $u \in H^{n-1}(V^n; Z)$ duale à J, et de la déterminer. Précisons: soit z_{n-1} une classe d'homologie de $H_{n-1}(\Omega_d)$; supposons z_{n-1} réalisable comme une image d'une variété différentiable orientée compacte W^{n-1} par une application $g: W^{n-1} \to \Omega_d$; soit $G: W^{n-1} \times S^1 \to V^n$ l'application correspondant par $G(w, t) = g(w)(t)$. On va montrer que le nombre algébrique des points de rebroussements présentés par les lacets de $g(W^{n-1})$ est égal à la valeur prise par la classe de cohomologie u sur la classe z. (En réalité, on obtiendra un peu moins que cela: on obtiendra, non une classe de $H^{n-1}(\Omega_d)$, mais seulement un élément de $Hom(H_{n-1}(\Omega_d); Z)$). Mais il faut d'abord définir le degré associé à un rebroussement. On y arrivera en considérant le problème préliminaire suivant:

PROBLÈME. *Etant donnée une application h d'une variété P^n orientée dans V^n, soit X un champ de vecteurs sur P^n; que peut-on dire du nombre algébrique des points où l'image $\dot{h}(X)$ par l'application $\dot{h}$ dérivée de h est nulle?*

Ici, on définira le degré par la construction classique: soit x un point tel que $\dot{h}(X) = 0$ (singularité isolée); on fait choix d'une petite sphère de centre x; elle est appliquée par h dans une petite sphère ayant pour centre $h(x)$, et le degré est le degré de cette application. Pour définir les orientations des petites sphères, on doit supposer P^n et V^n orientées.

Le problème, dans ces conditions, peut être aisément résolu; généralisant la construction faite pour l'application identique, qui donne la caractéristique d'Euler-Poincaré, on forme, dans le produit $P^n \to V^n$, le graphe $G(h)$ de l'application h; soit j l'homéomorphisme de P^n défini par le champ de vecteurs X; les graphes $G(h)$ et $G(h \circ j)$ se rencontrent précisément aux points ou $\dot{h}(X) = 0$, et cela, avec le degré convenable. Si l'application h est corrigée, on n'obtiendra que des points x d'intersection isolés de degré ± 1. Le nombre algébrique de points ainsi obtenu n'est autre que la "self-intersection" du graphe $G(h)$ dans $P \to V$: ce nombre peut être calculé aisément dès qu'on connait le type d'homologie de h; dans le cas où P et V sont identiques, c'est le *nombre de Lefschetz* $\lambda(h)$ de l'application h.

Ainsi, à tout cycle singulier z réalisé par une variété W^{n-1}, on peut associer ce nombre $\lambda(G)$, qui donne le nombre algébrique des points où le champ de vecteur tangent aux trajectoires $S^1 \times x$ est annulé; or, un tel point est évidemment un rebroussement pour le lacet qui le contient.

Supposons maintenant qu'on ait un cycle singulier z_{n-1} , somme finie de simplexes singuliers différentiables dans Ω_d ; après correction, on peut supposer que tous les simplexes singuliers de z_{n-1} , de dimension $<n - 1$, ne rencontrent pas J; il est clair qu'on peut obtenir toute l'homologie de Ω_d avec des simplexes "corrigés" de ce type: les simplexes σ de dimension $<n - 1$ ne rencontrent pas J, et ceux de dimension $\geqq n - 1$ sont "corrects" sur J (On corrige dans ce but l'application associée $S^1 \times \sigma$); alors il y a visiblement additivité du nombre des points singuliers pour les chaines singulières de dimension $n - 1$; et, si deux cycles sont homologues $z - z' = \partial c^n$, les points singuliers dans z, z' forment le bord d'un arc singulier dans c^n. Ceci définit bien une classe de cohomo-

logie $u \in H^{n-1}(\Omega_d)$. Pour calculer explicitement cette classe, on réalisera les générateurs de $H_{n-1}(\Omega_d)$ par des variétés différentiables (ce qui est possible après une éventuelle multiplication), et on calculera le nombre de Lefschetz de l'application associée. Exemple:

Lacets différentiables de la sphère S^n. Le groupe $H^{n-1}(\Omega_d)$ est alors isomorphe à Z, engendré par la classe v, suspendue de la classe fondamentale $s \in H^n(S^n)$; on réalise un générateur de $H_{n-1}(\Omega_d)$ par une sphère S^{n-1}, plongée dans Ω_d de telle façon que l'application associée $h: S^1 \times S^{n-1} \to S^n$ soit de degré 1; le nombre de Lefschetz de h se calcule immédiatement: il est égal à $\chi(S^n)$. Donc:

Théorème 4. *Dans l'espace des lacets différentiables d'une sphere S^n, l'ensemble J des lacets qui présentent au moins un rebroussement admet pour classe de cohomologie duale le produit par $\chi(S^n)$ de la classe fondamentale de $H^{n-1}(\Omega_d)$.*

Université de Strasbourg

Références

[1] M. Morse, The Calculus of Variations in the large. Am. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. XVIII.

[2] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*. Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1942), pp. 883–90.

[3] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*. Ann. de l'Institut Fourier, 1956.

[4] R. Thom, *Même titre*. Exposé au Seminaire Bourbaki. Paris, mai 1956.

[5] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*. Commentarii. Math. Helv., 28, (1954), pp. 17–86.

[6] H. Whitney, *On singularities of mappings of euclidean spaces. Mappings of the plane into the plane*. Ann. of Math. 62, (1955), pp. 379–91.

[7] H. Whitney, *The general type of singularity of a set of* $(2n - 1)$*-smooth functions of n variables*. Duke Math. Journal, 10 (1943), pp. 161–72.