SOBRE LA PAREJA EXACTA DE COHOMOTOPIA

POR JOSÉ ADEM

Introducción

Las parejas exactas fueron definidas y estudiadas por Massey en [5]. La operación derivación asocia con cada pareja exacta una nueva pareja exacta, obteniéndose mediante este proceso una sucesión espectral. En particular, con la pareja exacta de cohomotopía se obtiene la sucesión espectral de cohomotopía, donde las diferenciales pueden interpretarse, en términos generales, como operaciones cohomológicas.

El objeto de este trabajo es calcular el operador diferencial del primer derivado de la pareja exacta de cohomotopía. Se demuestra que dicho operador, salvo limitadas excepciones, puede expresarse por medio de un cuadrado de Steenrod definido mediante un apareamiento conveniente.

1. Cuadrados de Steenrod y apareamientos

Sean A y B dos grupos abelianos y

$$\lambda : A \to B$$

un homomorfismo tal que

$$\lambda(A) \subset {}_2B,$$

donde ${}_2B$ representa el subgrupo de B formado con los elementos de orden 2. Esto es, $2\lambda(a) = 0$ para $a \in A$.

Asociado con λ siempre puede definirse un apareamiento conmutativo de A consigo mismo en ${}_2B$, que representamos con $\cdot$, tal que

$$a \cdot a = \lambda(a), \tag{1.1}$$

para toda $a \in A$.

El apareamiento no resulta ser único. Para la construcción de tales apareamientos véase [10; p. 137].

Si suponemos que A admite un número finito de generadores, pueden también construirse apareamientos como sigue. Expresamos A como suma directa

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_h, \tag{1.2}$$

donde cada A_i es un grupo cíclico generado por un elemento a_i. Definimos

$$\begin{aligned} a_i \cdot a_j &= 0 \qquad \text{si} \qquad i \neq j, \\ a_i \cdot a_i &= \lambda(a_i), \end{aligned} \tag{1.3}$$

y extendemos $\cdot$ por bilinealidad a todo par de elementos de A. Obviamente, se obtiene de este modo un apareamiento conmutativo. Además, si $a = \sum n_i a_i$ es cualquier elemento de A, se tiene

$$a \cdot a = (\sum n_i a_i) \cdot (\sum n_i a_i) = \sum n_i^2 a_i \cdot a_i = \sum n_i^2 \lambda(a_i),$$

y puesto que $\lambda(a_i)$ es de orden 2, resulta

$$a \cdot a = \sum n_i \lambda(a_i) = \lambda(a),$$

por consiguiente, se cumple 1.1.

Ahora, sea K un complejo simplicial y consideremos A y B como grupos de coeficientes. Con uno de estos apareamientos podemos definir los cuadrados de Steenrod, Sq^k (cf. [12]), y se tiene el siguiente

TEOREMA 1.4. *Las operaciones* ($\mathrm{Sq}^k = \mathrm{Sq}^k_\lambda$)

$$\mathrm{Sq}^k : H^q(K; A) \to H^{q+k}(K; B),$$

definidas mediante cualquier apareamiento conmutativo $\cdot$, *de* A *consigo mismo en* ${}_2B$, *tal que* $a \cdot a = \lambda(a)$, *resultan ser independientes del apareamiento particular que se elija.*

DEMOSTRACIÓN. Supondremos que A admite un número finito de generadores. La demostración en el caso general, que es esencialmente la misma, puede verse en [10; p. 137].

Consideramos una descomposición de A como en 1.2. Sea $\{u\} \in H^q(K; A)$, luego $u \in Z^q(K; A)$ y $u = \sum_{i=1}^h u_i$, donde cada $u_i \in Z^q(K; A_i)$.

Con un apareamiento $\cdot$ que satisface 1.1 y usando los productos $\smile_t$, introducidos por Steenrod en [12], definimos las operaciones Sq^k. De la bilinialidad de $\smile_t$ resulta

$$\begin{aligned} u \smile_t u &= \left(\sum_{i=1}^h u_i\right) \smile_t \left(\sum_{i=1}^h u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^h u_i \smile_t u_i + \sum_{i<j} (u_i \smile_t u_j + u_j \smile_t u_i) \end{aligned}$$

Ahora, de [12; p. 299]

$$u_i \smile_t u_j + u_j \smile_t u_i \sim 0,$$

luego

$$u \smile_t u \sim \sum_{i=1}^h u_i \smile_t u_i ,$$

pero cada producto $u_i \smile_t u_i$ queda determinado por el producto $a_i \cdot a_i = \lambda(a_i)$, donde a_i es el generador de A_i. Esto demuestra 1.4.

Ahora, supongamos que se tiene el siguiente diagrama conmutativo de grupos abelianos y homomorfismos:

(1.5)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & B \\ \downarrow{\scriptstyle\phi} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ C & \xrightarrow{\mu} & D \end{array}$$

donde, $\lambda(A) \subset {}_2B$ y $\mu(C) \subset {}_2D$. Con λ y μ respectivamente, definimos Sq_λ^k y Sq_μ^k como en 1.4. Entonces, el siguiente diagrama es conmutativo:

(1.6)
$$\begin{array}{ccc} H^q(K; A) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}_\lambda^k} & H^{q+k}(K; B) \\ \downarrow{\scriptstyle\phi_*} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_*} \\ H^q(K; C) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}_\mu^k} & H^{q+k}(K; D) \end{array}$$

donde, ϕ_* y θ_* son respectivamente, los homomorfismos inducidos por los homomorfismos ϕ y θ en los grupos de coeficientes.

Se omitirá la demostración de 1.6, ya que es únicamente una verificación directa usando las fórmulas empleadas en la demostración de 1.4.

En nuestras aplicaciones los grupos de coeficientes serán grupos de homotopía de esferas $\pi_n(S^q)$. De acuerdo con un teorema de Serre (cf. [8]), los grupos $\pi_n(S^q)$ admiten un número finito de generadores y en general resultan ser grupos finitos.

Como es bien sabido, $\pi_{n+1}(S^n)$ es un grupo cíclico de orden 2 para $n > 2$. Representemos con $\nu_n \in \pi_{n+1}(S^n)$ su generador. Si $\alpha \in \pi_n(S^q)$, con la operación de composición se obtiene $\alpha \circ \nu_n \in \pi_{n+1}(S^q)$. La operación $\alpha \circ \nu_n$ es bilineal

$$(H(\nu_n) = 0 \text{ en } 5.15 \text{ de } [13]),$$

por lo tanto $2(\alpha \circ \nu_n) = 0$.

Sea

$$E: \pi_{n+1}(S^q) \to \pi_{n+2}(S^{q+1})$$

el homomorfismo suspensión. Definimos

(1.7)
$$\lambda: \pi_n(S^q) \to \pi_{n+2}(S^{q+1}),$$

como

$$\lambda(\alpha) = E(\alpha \circ \nu_n) = (E\alpha) \circ \nu_{n+1},$$

para $\alpha \in \pi_n(S^q)$. Claramente, λ es un homomorfismo y $2\lambda(\alpha) = 0$. Luego, con λ como en 1.7 y con cualquier apareamiento que satisfaga 1.1, podemos definir las operaciones

(1.8)
$$\mathrm{Sq}^k: H^p(K; \pi_n(S^q)) \to H^{p+k}(K; \pi_{n+2}(S^{q+1})).$$

2. Grupos de cohomotopía

La teoría de los grupos de cohomotopía fué estudiada y desarrollada por Spanier en [11]. Véase este trabajo para las definiciones y propiedades que se mencionan.

Sea (K, L) un par donde K es un complejo celular finito y L un subcomplejo cerrado. El q-grupo de cohomotopía, representado por $\pi^q(K, L)$, queda definido si $\dim (K - L) < 2q - 1$. Sus elementos lo forman las clases de homotopía de transformaciones $(K, L) \to (S^q, x_0)$, donde S^q es una q-esfera.

Si $\dim K < 2q - 1$, se tiene la sucesión exacta

$$\pi^q(K, L) \xrightarrow{j} \pi^q(K) \xrightarrow{i} \pi^q(L) \xrightarrow{\Delta} \pi^{q+1}(K, L) \xrightarrow{j} \cdots$$

donde i, j son los homomorfismos inducidos por las inclusiones respectivas y Δ es el operador cofrontera de cohomotopía.

Representemos con K^p el p-esqueleto de K y sea $C^n(K; \pi_n(S^q))$ el grupo de n-cocadenas de K con coeficientes en $\pi_n(S^q)$. Para $n < 2q - 1$, existe un isomorfismo

$$\psi : \pi^q(K^n, K^{n-1}) \to C^n(K; \pi_n(S^q)),$$

definido como sigue. Sea σ^n una n-celda orientada de K y f: $(E^n, S^{n-1}) \to (\sigma^n, \dot{\sigma}^n)$ la transformación característica de σ^n (cf. [11; p. 218]). Dado $\alpha \in \pi^q(K^n, K^{n-1})$ con $\alpha = \{g\}$, donde g: $(K^n, K^{n-1}) \to (S^q, x_0)$ es un representante, consideramos la composición

$$(E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{f} (\sigma^n, \dot{\sigma}^n) \overset{i}{\subset} (K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{g} (S^q, x_0).$$

Luego, si $h = gif$, su clase $\{h\} \in \pi_n(S^q)$, y la cocadena $\psi(\alpha) \in C^n(K; \pi_n(S^q))$ queda definida por $\psi(\alpha) \cdot \sigma^n = \{h\}$.

El homomorfismo ψ es natural en el sentido de que conmuta con los homomorfismos inducidos por transformaciones.

Definimos $\delta_0 : \pi^q(K^n, K^{n-1}) \to \pi^{q+1}(K^{n+1}, K^n)$ mediante la composición

$$\pi^q(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{j} \pi^q(K^n) \xrightarrow{\Delta} \pi^{q+1}(K^{n+1}, K^n),$$

esto es $\delta_0 = \Delta j$. Como ha sido demostrado por Spanier, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^q(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\delta_0} & \pi^{q+1}(K^{n+1}, K^n) \\ \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ C^n(K; \pi_n(S^q)) & \xrightarrow{E\delta} & C^{n+1}(K; \pi_{n+1}(S^{q+1})) \end{array}$$

donde $E\delta$ es el homomorfismo que resulta de la composición

$$C^n(K; \pi_n(S^q)) \xrightarrow{\delta} C^{n+1}(K; \pi_n(S^q)) \xrightarrow{E} C^{n+1}(K; \pi_{n+1}(S^{q+1})),$$

del operador cofrontera y el homomorfismo inducido por la suspensión

$$E:\pi_n(S^q) \to \pi_{n+1}(S^{q+1}),$$

en los grupos de coeficientes. En este caso E es un isomorfismo, ya que

$$n < 2q - 1.$$

Por lo tanto, si $n < 2q - 2$, el n-grupo de cohomología calculado con $E\delta$ es simplemente $H^n(K; \pi_n(S^q))$. Además, si $n < 2q - 2$, se tiene la sucesión

$$\pi^{q-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \xrightarrow{\delta_0} \pi^q(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\delta_0} \pi^{q+1}(K^{n+1}, K^n),$$

donde $\delta_0\delta_0 = 0$. Definimos

(2.1) $$\mathcal{H}^{n,n-q}(K) = \textit{núcleo}\ \delta_0/\delta_0\pi^{q-1}(K^{n-1}, K^{n-2}).$$

Claramente, como ψ es natural y $\psi\delta_0 = (E\delta)\psi$ se obtiene el siguiente (cf. [5; p. 252]).

LEMA 2.2. *Si $n < 2q - 2$, el isomorfismo ψ induce un isomorfismo natural*

$$\psi_*:\mathcal{H}^{n,n-q}(K) \to H^n(K; \pi_n(S^q)).$$

3. La pareja exacta de cohomotopía

Consideremos las parejas exactas introducidas por Massey en [5]. Sea

$$\begin{tikzcd} A(K) \arrow[rr, "i"] & & A(K) \arrow[dl, "\Delta"] \\ & C(K) \arrow[ul, "j"] & \end{tikzcd}$$

la pareja exacta de cohomotopía. Los grupos bigraduados $A(K)$ y $C(K)$ quedan definidos por

$$A^{p,q}(K) = \pi^{p-q}(K^p),$$

$$C^{p,q}(K) = \pi^{p-q}(K^p, K^{p-1}),$$

para $p \geqq 0$ y $p > 2q + 1$. Los homomorfismos

$$j:C^{p,q}(K) \to A^{p,q}(K),$$

$$i:A^{p,q}(K) \to A^{p-1,q-1}(K),$$

son los inducidos en los grupos de cohomotopía por las inclusiones respectivas, y el homomorfismo

$$\Delta:A^{p,q}(K) \to C^{p+1,q}(K)$$

es el operador cofrontera de cohomotopía. Para los otros valores de p, q los grupos y homomorfismos los consideramos definidos como en [5; p. 249][1].

El operador diferencial de la pareja exacta de cohomotopía es el endomorfismo $\delta_0: C(K) \to C(K)$ definido por $\delta_0 = \Delta j$. La exactitud implica $\delta_0\delta_0 = 0$. Aplicando la derivación introducida por Massey obtenemos el *primer derivado* que resulta ser la pareja exacta

$$\begin{tikzcd} \Gamma(K) \arrow[rr, "i_1"] & & \Gamma(K) \arrow[dl, "\Delta_1"] \\ & \mathcal{H}(K) \arrow[ul, "j_1"] & \end{tikzcd}$$

donde $\Gamma(K) = i(A(K))$ y $\mathcal{H}(K) = H(C(K))$, es la cohomología de $C(K)$ con respecto al operador cofrontera δ_0. Los homomorfismos i_1, j_1 y Δ_1 son los inducidos en forma natural por i, j y Δ, respectivamente. Los grupos $\Gamma(K)$ y $\mathcal{H}(K)$ están bigraduados y si $n < 2q - 2$, el grupo $\mathcal{H}^{n, n-q}(K)$ es claramente el determinado en 2.1. El operador diferencial del primer derivado es el endomorfismo $d: \mathcal{H}(K) \to \mathcal{H}(K)$ definido por $d = \Delta_1 j_1$. Resulta $d^2 = dd = 0$. Iterando este proceso obtenemos los derivados sucesivos de la pareja exacta de cohomotopía. Asociada a la pareja exacta se tiene la sucesión espectral

$$(C(K), \delta_0), \qquad (\mathcal{H}(K), d), \qquad (\mathcal{H}_1(K), d_1), \qquad \text{etc.},$$

donde, $\delta_0 = \Delta j$, $d = \Delta_1 j_1$, $d_1 = \Delta_2 j_2$, etc., y $\mathcal{H}(K) = H(C(K))$, $\mathcal{H}_1(K) = H(\mathcal{H}(K))$, etc.

Usando la bigraduación de los grupos, la pareja exacta de cohomotopía puede representarse mediante la siguiente red de grupos y homomorfismos

$$\begin{tikzcd} & & \arrow[d, "i"] & & \\ \cdots \arrow[r, "\Delta"] & \pi^q(K^{n+1}, K^n) \arrow[r, "j"] & \pi^q(K^{n+1}) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "i"] & \pi^{q+1}(K^{n+2}, K^{n+1}) \arrow[r, "j"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\Delta"] & \pi^q(K^n, K^{n-1}) \arrow[r, "j"] & \pi^q(K^n) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "i"] & \pi^{q+1}(K^{n+1}, K^n) \arrow[r, "j"] & \cdots \\ & & \; & & \end{tikzcd}$$

[1] La pareja exacta de cohomotopía puede definirse también como en [6; p. 248]. En nuestro caso, ambas formas conducen al mismo resultado 4.1.

En esta red, la exactitud vale a lo largo de trayectorias en zig-zag,

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \xrightarrow{\Delta} \pi^q(K^{n+1}, K^n) \xrightarrow{j} & \pi^q(K^{n+1}) & & & \\ & \downarrow{\scriptstyle i} & & & \\ & \pi^q(K^n) \xrightarrow{\Delta} \pi^{q+1}(K^{n+1}, K^n) \xrightarrow{j} \cdots, & & & \end{array}$$

asociadas a las sucesiones exactas de cada par (K^{n+1}, K^n). El operador

$$d: \mathcal{H}^{n,n-q}(K) \to \mathcal{H}^{n+2,n-q+1}(K)$$

queda determinado como sigue. Sea $\{\alpha\} \in \mathcal{H}^{n,n-q}(K)$ y $\alpha \in \pi^q(K^n, K^{n-1})$ un representante. Luego $\delta_0\alpha = \Delta j(\alpha) = 0$. Por la exactitud en zig-zag, existe $\beta \in \pi^q(K^{n+1})$ tal que $i(\beta) = j(\alpha)$. Luego, formamos $\Delta(\beta) \in \pi^{q+1}(K^{n+2}, K^{n+1})$. Puesto que $j\Delta = 0$, se sigue que $\Delta(\beta)$ es un cociclo bajo δ_0 y $d\{\alpha\} = \{\Delta(\beta)\}$.

4. El teorema principal

Usando el homomorfismo λ de 1.7 definimos Sq^2 como en 1.8. Nuestro resultado principal es el siguiente

TEOREMA 4.1. *Si $n < 2q - 2$, el siguiente diagrama es conmutativo* (cf. [5; p. 264])[2]

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{n,n-q}(K) & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}^{n+2,n-q+1}(K) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} \\ H^n(K; \pi_n(S^q)) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^2} & H^{n+2}(K; \pi_{n+2}(S^{q+1})) \end{array}$$

Pospondremos la demostración para las secciones siguientes y nos dedicaremos aquí a señalar algunas implicaciones de este resultado.

Desde luego, ya que ψ_* es un isomorfismo, el teorema 4.1 determina explícitamente el operador diferencial d, para aquellos grupos $\mathcal{H}^{p,q}(K)$ que pueden identificarse con grupos de cohomología. Como $d^2 = dd = 0$, resulta $\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2 = 0$ en

$$H^n(K; \pi_n(S^q)) \xrightarrow{\mathrm{Sq}^2} H^{n+2}(K; \pi_{n+2}(S^{q+1})) \xrightarrow{\mathrm{Sq}^2} H^{n+4}(K; \pi_{n+4}(S^{q+2})),$$

donde los apareamientos están asociados con los homomorfismos

$$\lambda: \pi_n(S^q) \to \pi_{n+2}(S^{q+1}) \text{ y } \lambda': \pi_{n+2}(S^{q+1}) \to \pi_{n+4}(S^{q+2}),$$

definidos como en 1.7. Por lo tanto, si $\alpha \in \pi_n(S^q)$ resulta

$$\lambda'\lambda(\alpha) = (E^2\alpha) \circ \nu_{n+2} \circ \nu_{n+3},$$

[2] Un teorema del mismo tipo que 4.1 es el demostrado por Peterson en [6; p. 254]. De acuerdo con [7; p. 265] este resultado puede también extenderse a las parejas exactas de grupos de cohomotopía generalizados.

donde E^r denota el homomorfismo suspensión iterado r veces. Pero $\nu_{n+2} \circ \nu_{n+3} = \gamma_{n+2}$ es el generador de $\pi_{n+4}(S^{n+2})$, que es un grupo cíclico de orden 2. Por lo tanto,

$$(4.2) \qquad \begin{aligned} \lambda'\lambda(\alpha) &= (E^2\alpha) \circ \gamma_{n+2} \\ &= E[(E\alpha) \circ \gamma_{n+1}] \\ &= E[(E\alpha) \circ (E^{n-1}\gamma)], \end{aligned}$$

con $\gamma_{n+2} = E\gamma_{n+1}$ y $\gamma_{n+1} = E^{n-1}\gamma$, donde $\gamma = \gamma_2$ es el generador de $\pi_4(S^2)$.

Estudiaremos las conclusiones que pueden derivarse para $\lambda'\lambda(\alpha)$ del hecho que $\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2 = 0$.

Si $n = q$, entonces $\pi_n(S^q) \approx Z$, $\pi_{n+2}(S^{q+1}) \approx Z_2$ y $\pi_{n+4}(S^{q+2}) \approx Z_2$. Los apareamientos resultan ser los naturales y $\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2 = 0$ en este caso, es bien conocido.

Con $n > q$ sea $\alpha \in {}_2\pi_n(S^q)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de grupos y homomórfismos:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(S^q) & \xrightarrow{\lambda} & \pi_{n+2}(S^{q+1}) & \xrightarrow{\lambda'} & \pi_{n+4}(S^{q+2}) \\ \uparrow \xi & & \uparrow \zeta & & \uparrow \eta \\ Z_2 & \xrightarrow{\kappa} & Z_2 & \xrightarrow{\rho} & Z_2 \end{array}$$

donde $\xi(1) = \alpha$, $\zeta(1) = \lambda(\alpha)$, $\eta(1) = \lambda'\lambda(\alpha)$, $\kappa(1) = 1$, $\rho(1) = 1$. Claramente, la situación en cada cuadrado del diagrama es como en 1.5.

Sea $X = K(Z_2, n)$ un complejo de Eilenberg-MacLane (cf. [3]). Se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H^n(X; \pi_n(S^q)) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^2} & H^{n+2}(X; \pi_{n+2}(S^{q+1})) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^2} & H^{n+4}(X; \pi_{n+4}(S^{q+2})) \\ \uparrow \xi_* & & \uparrow \zeta_* & & \uparrow \eta_* \\ H^n(X; Z_2) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^2} & H^{n+2}(X; Z_2) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^2} & H^{n+4}(X; Z_2) \end{array}$$

La cohomología $H^*(X; Z_2)$ ha sido calculada por Serre en [9]. En particular, se tiene que $H^n(X; Z_2) \approx Z_2$ y si v es el generador de este grupo, entonces

$$\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2 v \neq 0.$$

Por otra parte, $0 = \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2\xi_* v = \eta_*\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2 v$. Esto implica que $\eta(1) \equiv 0 \bmod 2$. Luego, se tiene que $\lambda'\lambda(\alpha) \equiv 0 \bmod 2$. De 4.2 se sigue que $(E^2\alpha) \circ \gamma_{n+2} \equiv 0 \bmod 2$. Como $E: \pi_{n+3}(S^{q+1}) \to \pi_{n+4}(S^{q+2})$ es un isomorfismo si $n < 2q - 2$, resulta que $(E\alpha) \circ \gamma_{n+1} \equiv 0 \bmod 2$. Como $E: \pi_n(S^q) \to \pi_{n+1}(S^{q+1})$ es un isomorfismo, tomando $m = n + 1$, $p = q + 1$, obtenemos el siguiente

TEOREMA 4.3. *Sea $\alpha \in {}_2\pi_m(S^p)$ con $m < 2p - 3$ y $\beta \in \pi_{m+2}(S^m)$. Entonces,*

$$\alpha \circ \beta \equiv 0 \bmod 2.$$

Siguiendo una observación de I. M. James, este resultado puede presentarse también en la siguiente forma. De acuerdo con un teorema de Barratt y Hilton (cf. [1; p. 432]) se tiene que

$$(E\alpha) \circ (E^{n-1}\gamma) = \pm(E^{q-1}\gamma) \circ (E^3\alpha).$$

Por lo tanto, de 4.2 y de los resultados anteriores, se obtiene el

TEOREMA 4.4. *Sea* $\alpha \epsilon_2 \pi_n(S^q)$ *con* $n < 2q - 2$ *y* $\gamma \epsilon \pi_4(S^2)$. *Entonces,*

$$(E^{q-1}\gamma) \circ (E^3\alpha) \equiv 0 \bmod 2.$$

Si $m = n + 3$, $p = q + 1$, el teorema 4.4. puede también formularse en la siguiente forma equivalente.

TEOREMA 4.5. *Sea* $\alpha \epsilon_2 \pi_m(S^{p+2})$ *con* $m < 2p - 1$ *y* $\beta \epsilon \pi_{p+2}(S^p)$. *Entonces,*

$$\beta \circ \alpha \equiv 0 \bmod 2.$$

5. El complejo auxiliar Q

Para demostrar el teorema 4.1 se construirá un complejo auxiliar Q. Este queda determinado por el grupo de coeficientes $\pi_n(S^q)$. Si $n = q$, $Q = M^{n+2}$, es simplemente el plano proyectivo complejo suspendido $n - 2$ veces. Como complejo cellular Q resulta ser $e^0 \cup e^n \cup e^{n+2}$, donde $e^0 \cup e^n$ es una n-esfera S^n y la celda e^{n+2} está pegada a S^n mediante una transformación esencial $\dot{E}^{n+2} \to S^n$. Se tiene

$$\begin{aligned} \pi_i(Q) &= 0 \qquad \text{para} \qquad i < n, \\ \pi_n(Q) &\approx \pi_n(S^n), \\ \pi_{n+1}(Q) &= 0. \end{aligned}$$

Si $q < n < 2q - 1$, entonces, de acuerdo con Serre (cf. [8]), el grupo $\pi_n(S^q)$ es un grupo abeliano finito. Luego, podemos considerar

$$\pi_n(S^q) = G_1 \oplus \cdots \oplus G_h,$$

donde cada G_i es un grupo cíclico finito de orden k_i y generador γ_i. En este caso construimos el complejo

$$Q = Q_1 \vee \cdots \vee Q_h,$$

como sigue. Los subcomplejos Q_i están unidos en un sólo punto e^0. Si k_i es un número impar,

$$Q_i = e^0 \cup e_i^n \cup e_i^{n+1},$$

donde la unión $e^0 \cup e_i^n$ es una n-esfera S_i^n y la celda e_i^{n+1} está pegada a S_i^n mediante una transformación $\dot{E}^{n+1} \to S_i^n$ de grado k_i. Si k_i es un número par, entonces

$$Q_i = e^0 \cup e_i^n \cup e_i^{n+1} \cup e_i^{n+2},$$

donde $e^0 \cup e_i^n \cup e_i^{n+1}$ es como antes y la celda e_i^{n+2} está pegada a S_i^n mediante una transformación esencial $\dot{E}^{n+2} \to S_i^n$.

El complejo Q resulta un complejo *normal* y cada Q_i un complejo *elemental* en el sentido de Chang (cf. [2]). Claramente, se tiene que

$$\pi_i(Q) = 0 \qquad \text{para} \qquad i < n,$$

luego, el isomorfismo de Hurewicz implica que

$$\pi_n(Q) \approx H_n(Q) \approx \pi_n(S^q).$$

Establecemos el isomorfismo

$$\theta: \pi_n(Q) \xrightarrow{\approx} \pi_n(S^q),$$

como sigue. Si $\alpha_i \in \pi_n(Q)$ representa la clase de una transformación $S^n \to S_i^n \subset Q_i$ de grado 1, entonces $\theta(\alpha_i) = \gamma_i$.

En ambos casos, k_i par o impar, se tiene que $\pi_{n+1}(Q_i) = 0$ (cf. [4; p. 130]), y puesto que

$$\pi_{n+1}(Q) = \textstyle\sum_{i=1}^h \pi_{n+1}(Q_i),$$

resulta

$$\pi_{n+1}(Q) = 0.$$

Definimos el cociclo $w \in Z^n(Q; \pi_n(S^q))$ como $w = \sum_{i=1}^h w_i$, donde

$$w_i \cdot e_j^n = \begin{cases} \gamma_i & \text{si} \quad j = i, \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i. \end{cases}$$

LEMA 5.1. *Sea K un complejo simplicial con* $\dim K \leqq n + 2$. *Dado* $\{u\} \in H^n(K; \pi_n(S^q))$, *existe una transformación $f: K \to Q$ tal que $f^*\{w\} = \{u\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Partimos de $f: K^{n-1} \to Q$ con $f(K^{n-1}) = e^0$. Si σ es una n-celda de K, extendemos a $f: (K^n, K^{n-1}) \to (Q, e^0)$ de modo que $f \mid (\sigma, \dot{\sigma})$ represente $\theta^{-1}(u \cdot \sigma)$. Esto implica que $f^{\#} w = u$, donde $f^{\#}$ es el homomorfismo en cocadenas inducido por f.

La obstrucción para extender f a K^{n+1} es un cociclo $c^{n+1}(f) \in Z^{n+1}(K; \pi_n(Q))$. Por el teorema de adición de la homotopía, se tiene

$$\theta c^{n+1}(f) = \delta u = 0,$$

luego $c^{n+1}(f) = 0$ y f puede extenderse a $f: (K^{n+1}, K^{n-1}) \to (Q, e^0)$. Finalmente, como $\pi_{n+1}(Q) = 0$, se sigue que f se puede extender a K^{n+2}, lo que demuestra el lema.

6. Demostración de 4.1 para Q

Demostraremos el teorema 4.1 para el complejo Q. Con $n < 2q - 2$ tenemos los casos $q > n$, $q = n$ y $q < n$. Si $q > n$, los grupos son cero y el teorema es trivial. De los dos casos restantes consideremos $q < n$ y sea $\{\alpha\} \in \mathcal{H}^{n, n-q}(Q)$

con $\alpha \in \pi^q(Q^n, e^0)$. Luego $\delta_0\alpha = \Delta j(\alpha) = 0$. Por lo tanto, existe $\beta \in \pi^q(Q^{n+1})$ tal que $i(\beta) = j(\alpha)$. Elegimos β y formamos $\Delta\beta \in \pi^{q+1}(Q, Q^{n+1})$. Por definición, $d\{\alpha\} = \{\Delta\beta\}$.

Sean

$$f_i^n:(E^n, \dot{E}^n) \to (S_i^n, e^0),$$

$$f_i^{n+2}:(E^{n+2}, \dot{E}^{n+2}) \to (M_i^{n+2}, S_i^n),$$

con $M_i^{n+2} = S_i^n \cup e_i^{n+2}$, respectivamente, las transformaciones características de e_i^n y e_i^{n+2} (se considera e_i^{n+2} únicamente cuando k_i es número par).

De la construcción de Q se sigue que las f_i^n son transformaciones de grado 1 y que $f_i^{n+2} \mid \dot{E}^{n+2}$ representa el generador ν_n de $\pi_{n+1}(S_i^n)$, que es un grupo cíclico de orden 2. Por lo tanto, M_i^{n+2} resulta homotópicamente equivalente al plano proyectivo complejo suspendido $n - 2$ veces.

Calcularemos los valores de los cociclos $\psi(\alpha)$ y $\psi(\Delta\beta)$ en las celdas de Q. Si $h:(Q^n, e^0) \to (S^q, x_0)$ es un representante de α, definimos $h_i = h \mid S_i^n$. El valor de $\psi(\alpha)$ en e_i^n es $\gamma \in \pi_n(S^q)$, donde

$$\gamma = \{h_i f_i^n\}. \tag{6.1}$$

Para calcular los valores de $\psi(\Delta\beta)$ partimos de h': $(Q^{n+1}, e^0) \to (S^q, x_0)$ que es una extensión de h y representa a β. A continuación construimos un representante de $\Delta\beta$ como sigue. Sea E^{q+1} una celda con frontera S^q. Claramente, h' extiende a h'': $(Q, Q^{n+1}) \to (E^{q+1}, S^q)$. Luego, si t: $(E^{q+1}, S^q) \to (S^{q+1}, x_0)$ es una transformación de grado 1, la composición th'' es un representante de $\Delta\beta$ (cf. [11; p. 216]). Ahora, si definimos $\bar{h}_i = h'' \mid (M_i^{n+2}, S_i^n)$, el valor de $\psi(\Delta\beta)$ en e_i^{n+2} es $\xi \in \pi_{n+2}(S^{q+1})$, donde $\xi = \{t\bar{h}_i f_i^{n+2}\}$. Consideremos la composición

$$(E^{n+2}, \dot{E}^{n+2}) \xrightarrow{f_i^{n+2}} (M_i^{n+2}, S_i^n) \xrightarrow{\bar{h}_i} (E^{q+1}, S^q) \xrightarrow{t} (S^{q+1}, x_0), \tag{6.2}$$

que representa ξ. Claramente, $(\bar{h}_i f_i^{n+2}) \mid \dot{E}^{n+2}$ es un representante[3] de $\gamma \circ \nu_n$, donde γ es el elemento de $\pi_n(S^q)$ determinado en 6.1 y ν_n el generador de $\pi_{n+1}(S^n)$. Por lo tanto, la ξ determinada con la composición 6.2 es igual a $E(\gamma \circ \nu_n)$, la suspensión de $\gamma \circ \nu_n$ (cf. [13; p. 206]).

Tomemos un apareamiento de $\pi_n(S^q)$ consigo mismo en $\pi_{n+2}(S^{q+1})$, como el de 1.7. Con este apareamiento el resultado anterior se expresa como sigue. Si $\psi(\alpha)\cdot e_i^n = \gamma$, entonces $\psi(\Delta\beta)\cdot e_i^{n+2} = \gamma\cdot\gamma$.

Por otra parte, con ese apareamiento definamos

$$\mathrm{Sq}^2:H^n(Q; \pi_n(S^q)) \to H^{n+2}(Q; \pi_{n+2}(S^{q+1})),$$

como en 1.4.

Sea $u = \psi(\alpha)$, luego $\{u\} \in H^n(Q; \pi_n(S^q))$. Obviamente,

$$H^p(Q; \pi_p(S^q)) = \textstyle\sum_{i=1}^h H^p(Q_i; \pi_p(S^q)).$$

---

[3] Según la conveniencia de cada caso, consideramos los representantes de elementos de $\pi_p(S^q)$ como $S^p \to S^q$ o como $(E^p, \dot{E}^p) \to (S^q, x_0)$.

Entonces, $\{u\} = \sum_{i=1}^{h} \{u_i\}$ donde $u_i \cdot e_i^n = \psi(\alpha)\cdot e_i^n = \gamma$. Como u_i es cociclo, resulta $(\delta u_i)\cdot e_i^{n+1} = k_i\gamma = 0$. Tenemos que $\mathrm{Sq}^2\{u\} = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{Sq}^2\{u_i\}$ y de la construcción de Q se sigue que $\mathrm{Sq}^2\{u_i\} = 0$ si k_i es número impar.

Los valores de Sq^2 en la cohomología de M_i^{n+2} son bien conocidos (cf. [12]). Usando la inclusión $M_i^{n+2} \subset Q_i$ podemos fácilmente calcular Sq^2 en la cohomología de Q_i. Obtenemos así el siguiente resultado. Con k_i par, consideramos Z_{k_i} apareado consigo mismo en Z_2, de modo que el cuadrado del generador de Z_{k_i} es el generador de Z_2. Sea $\{v_i\} \in H^n(Q_i\,;\,Z_{k_i})$ tal que $v_i\cdot e_i^n = 1$. Entonces, $\mathrm{Sq}^2\{v_i\}$ es el generador de $H^{n+2}(Q_i\,;\,Z_2)$.

Ahora, partiendo de $u_i\cdot e_i^n = \gamma$ con $k_i\gamma = 0$, construimos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(S^q) & \xrightarrow{\lambda} & \pi_{n+2}(S^{q+1}) \\ \uparrow{\scriptstyle\phi} & & \uparrow{\scriptstyle\theta} \\ Z_{k_i} & \xrightarrow{\mu} & Z_2 \end{array}$$

Donde, $\phi(1) = \gamma$, $\theta(1) = \gamma\cdot\gamma$, $\mu(1) = 1$ y $\lambda(\alpha) = \alpha\cdot\alpha$. Aplicando 1.6, se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^n(Q_i\,;\,\pi_n(S^q)) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^2} & H^{n+2}(Q_i\,;\,\pi_{n+2}(S^{q+1})) \\ \uparrow{\scriptstyle\phi_*} & & \uparrow{\scriptstyle\theta_*} \\ H^n(Q_i\,;\,Z_{k_i}) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^2} & H^{n+2}(Q_i\,;\,Z_2). \end{array}$$

Claramente, $\phi_*\{v_i\} = \{u_i\}$ y, tenemos que

$$\mathrm{Sq}^2\{u_i\} = \mathrm{Sq}^2\phi_*\{v_i\} = \theta_*\mathrm{Sq}^2\{v_i\}$$

Sea $\mathrm{Sq}^2 u_i$ un representante de $\mathrm{Sq}^2\{u_i\}$. De lo anterior resulta

$$(\mathrm{Sq}^2 u_i)\cdot e_i^{n+2} = \gamma\cdot\gamma$$

Por lo tanto, si $\{u\} = \{\psi(\alpha)\} = \psi_*\{\alpha\}$, hemos demostrado que

$$\{\psi(\Delta\beta)\} = \psi_*\{\Delta\beta\} = \psi_* d\{\alpha\} = \mathrm{Sq}^2\psi_*\{\alpha\},$$

que es lo que afirma 4.1.

En el caso $n = q$ se obtiene la misma conclusión, procediendo en forma análoga con $Q = S^n \cup e^{n+2}$. Luego, el teorema 4.1 queda demostrado para el complejo Q.

7. Demostración de 4.1 para un complejo arbitrario

LEMA 7.1. *Si* 4.1 *vale para el* $(n + 2)$*-esqueleto de* K, *entonces vale para* K.

DEMOSTRACIÓN. La inclusión $i{:}K^{n+2} \subset K$ induce homomorfismos entre los grupos. Si $\alpha \in \mathcal{H}^{n,n-q}(K)$ entonces $i^*\alpha \in \mathcal{H}^{n,n-q}(K^{n+2})$ y por hipótesis vale 4.1, esto es

$$\psi_* d i^* \alpha = \mathrm{Sq}^2 \psi_* i^* \alpha.$$

Puesto que todos los homomorfismos que aparecen en esta expresión son naturales, resulta

$$i^* \psi_* \, d\alpha = i^* \mathrm{Sq}^2 \psi_* \alpha.$$

Como $i^* : H^{n+2}(K; \pi_n(S^q)) \to H^n(K^{n+2}; \pi_n(S^q))$ es un monomorfismo, lo anterior implica

$$\psi_* \, d\alpha = \mathrm{Sq}^2 \psi_* \alpha,$$

lo que demuestra 7.1.

Finalmente, demostraremos 4.1 para K^{n+2}. Dado $\alpha \in \mathcal{H}^{n, n-q}(K^{n+2})$, sea $f: K^{n+2} \to Q$ una transformación como en 5.1, tal que $f^* w = u$, donde $u = \psi_* \alpha$. Claramente, existe $\beta \in \mathcal{H}^{n, n-q}(Q)$ tal que $w = \psi_* \beta$. Luego $f^* \beta = \alpha$.

Como 4.1 vale para Q, se tiene

$$\psi_* \, d\beta = \mathrm{Sq}^2 \psi_* \beta.$$

Por lo tanto, $f^* \psi_* \, d\beta = f^* \mathrm{Sq}^2 \psi_* \beta$. De donde resulta que $\psi_* \, d\alpha = \mathrm{Sq}^2 \psi_* \alpha$. Luego, 4.1 vale para K^{n+2}, lo que establece 4.1 para una K arbitraria.

Universidad Nacional Autónoma de México e
Instituto Nacional de la Investigación Científica.

Referencias

[1] M. G. Barratt and P. J. Hilton, *On join operations in homotopy groups*, Proc. London Math. Soc., (3) 3 (1953), p. 430–445.

[2] S. C. Chang, *Homotopy invariants and continuous mappings*, Proc. Roy. Soc., A, 202 (1950), p. 253–263.

[3] S. Eilenberg and S. MacLane, *On the groups* $H(\Pi, n)$, I, Ann. of Math., 58 (1953), p. 55–106.

[4] P. J. Hilton, An introduction to homotopy theory, Cambridge Univ. Press, 1953.

[5] W. S. Massey, *Exact couples in algebraic topology*, I, II; III, IV, V, Ann. of Math. 56 (1952), p. 363–396; 57 (1953), p. 248–286.

[6] F. P. Peterson, *Some results on cohomotopy groups*, Amer. J. of Math. 78 (1956), p. 243–258.

[7] ——, *Generalized cohomotopy groups*, Amer. J. of Math. 78 (1956), p. 259–281.

[8] J.-P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés. Applications*, Ann. of Math., 54 (1951), p. 425–505.

[9] ——, *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane*, Comment. Math. Helv., 27 (1953), p. 198–232.

[10] N. Shimada, *Homotopy classification of mappings of a 4-dimensional complex into a 2-dimensional sphere*, Nagoya Math. J., 5 (1953), p. 127–144.

[11] E. Spanier, *Borsuk's cohomotopy groups*, Ann. of Math., 50 (1949), p. 203–245.

[12] N. E. Steenrod, *Products of cocycles and extensions of mappings*, Ann. of Math., 48 (1947), p. 290–320.

[13] G. W. Whitehead, *A generalization of the Hopf invariant*, Ann. of Math., 51 (1950), p. 192–237.