TOPOLOGIAS QUE CARACTERIZAN UN FLUJO CONTINUO

Por J. L. Arraut

Sea X un espacio métrico, R la recta real, y $\pi : X \times R \to X$ un flujo continuo sobre X. La pregunta a la cual damos respuesta es la siguiente: Que relación existe entre la familia $\pi(X)$ de los flujos continuos sobre X y la colección de las topologías que admite $X \times R$. Para responder a esta pregunta, hemos definido el concepto de una F-topología de $X \times R$ (ver Definición 1) y hemos mostrado lo siguiente: Sea $F(X)$ la familia de las F-topologías de $X \times R$, entonces existe una correspondencia biunívoca entre $\pi(X)$ y $F(X)$. Esta correspondencia está dada explicitamente, ie., dada una F-topología T; construimos el flujo π correspondiente y vice versa. Hacemos notar que es interesante el hecho que una topología en $X \times R$ resulte suficiente para determinar una estructura tan compleja como es la de un flujo continuo sobre X. Por ejemplo, un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias, que satisfaga condiciones de existencia y unicidad, define un flujo continuo sobre el espacio fase. Este trabajo tuvo su origen en conversaciones sostenidas con Peter Seibert. Aprovecho esta oportunidad para expresarle mi gratitud.

En este escrito, X denotará un espacio métrico con distancia d, y R, la recta real con la topología usual. Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$, al conjunto $S_\epsilon(x) = \{x' \in X : d(x', x) < \epsilon\}$ se le llama la vecindad esférica de centro x y radio ϵ. En el producto cartesiano $X \times R$, vamos a considerar varias topologías, en cada caso diremos de cual se trata. Si $A \subset X$ y $t \in R$, escribiremos A^t en lugar de $A \times \{t\}$. Asi por ejemplo: $X^t = X \times \{t\}$ y $S_\epsilon^{\,t}(x) = S_\epsilon(x) \times \{t\}$. Además si $B \subset X \times R$, escribiremos B^t por el conjunto $B \cap X^t$. Este doble uso de t como índice superior no dará lugar a confusiones y, por el contrario, nos simplificará mucho la notación. Finalmente, podemos considerar a X^t como un espacio métrico definiendo la distancia entre dos puntos (x, t) y (x', t) como $d(x, x')$.

Consideremos por el momento a $X \times R$ con la topología producto. Un *flujo continuo* sobre X es una función continua $\pi : X \times R \to X$ que satisface las propiedades siguientes:

F.1 $\pi(x, 0) = x, x \in X$

F.2 $\pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2), \quad x \in X, t_1, t_2 \in R.$

Es de uso generalizado escribir xt en lugar de $\pi(x, t)$. Con esta notación F.1 y 2 se escriben $x0 = x$ y $(xt_1)t_2 = x(t_1 + t_2)$ respectivamente. Aqui nos apegaremos a este uso. Para cada $t \in R$, π induce una función continua $\pi_t : X \to X$ dada por $\pi_t(x) = xt$. Es fácil ver que cada π_t es un homeomorfismo de X sobre X. Además para cada $x \in X$, π induce una función continua $\pi_x : R \to X$ dada por $\pi_x(t) = xt$. Al conjunto $\{xt \in X : t \in R\}$ se le llama la órbita del punto x.

Observese que en la definición de flujo continuo hemos considerado en $X \times R$ la topología producto. Sin embargo una topología en $X \times R$ bajo la cual π se mantuviera continua, no alteraría en nada los axiomas que definen un flujo continuo.

Sea $\pi: X \times R \to X$ un flujo continuo sobre X. Consideremos la colección

$$T_\pi = \{\pi^{-1}(U): U \quad \text{es abierto en} \quad X\}.$$

Es claro que T_π es una topología de $X \times R$; además es la topologiá con menos abiertos respecto a la cual π es continua.

PROPOSICION 1. *Sea $\pi: X \times R \to X$ un flujo continuo sobre X. La topología T_π de $X \times R$ tiene las siguientes propiedades:*

1) *T_π esta contenida en la topología producto de $X \times R$;*

2) *si $p: X \times R \to R$ es la proyección sobre R, entonces para todo $V \in T_\pi$, con $V \neq \emptyset$, $p(V) = R$;*

3) *para todo $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $V \in T_\pi$ tal que $(x, 0) \in V$ y $V^0 \subset S_\epsilon^0(x)$.*

4) *si $V \in T_\pi$ y $Vt' = \{(x, t) \in X \times R: (x, t - t') \in V\}$, entonces $Vt' \in T_\pi$.*

Demostración. Las propiedades 1) y 2) se siguen fácilmente de la definición de T_π y de F.2 respectivamente. Dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, definamos $V = \pi^{-1}(S_\epsilon(x))$. Claramente V cumple con lo pedido en 3). Finalmente, sea $V \in T_\pi$; ie., $V = \pi^{-1}(U)$ con U aberito en X y $t' \in R$. Ya que $\pi_{t'}$ es un homeomorfismo de X sobre X, tenemos que $\pi_{t'}(U)$ es abierto en X y por lo tanto $\pi^{-1}(\pi_{t'}(U)) \in T_\pi$. No es dificil verificar que $Vt' = \pi^{-1}(\pi_{t'}(U))$. Con esto queda probada la Proposición 1.

DEFINICIÓN 1. *Una topología T de $X \times R$ se le llama una F topología si satisface las propiedades siguientes:*

1. *T esta contenida en la topología producto de $X \times R$;*
2. *si $p: X \times R \to R$ es la proyección sobre R, entonces para todo $V \in T$, con $V \neq \emptyset$, $p(V) = R$;*
3. *para todo $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $V \in T$ tal que $(x, 0) \in V$ y $V^0 \subset S_\epsilon^0(x)$;*
4. *si $V \in T$ y $Vt' = \{(x, t) \in X \times R: (x, t - t') \in V\}$, entonces $Vt' \in T$.*

Nótese que la Proposición 1 nos dice que si $\pi: X \times R \to X$ es un flujo continuo sobre X, entonces T_π es una F-topología de $X \times R$. Sea ahora $\pi(X)$ la colección de todos los flujos continuos sobre X y $F(X)$, la colección de todas las F-topologías de $X \times R$. Consideremos la función

$$j: \pi(X) \to F(X),$$

donde $j(\pi) = T_\pi$. El esqueleto de este trabajo consiste en mostrar que j es una correspondencia biunívoca. Para llegar a esto vamos a probar antes algunos lemas.

LEMA 1. *Sea T una F-topologiá de $X \times R$. Para cada $t \in R$, la topología inducida por T en X^t coincide con la topología que define la métrica en X^t.*

Demostración. Denotemos por T^t la topología inducida por T en X^t y por D^t, la definida por la métrica. Vamos a mostrar el lema para $t = 0$. Sea $V^0 \in T^0$; ie., $V^0 = V \cap X^0$ con $V \in T$. Como T está contenida en la topología producto de $X \times R$, entonces, para cada punto $(x, 0) \in V$, existen $\epsilon > 0$ y $\alpha > 0$ tales que $S_\epsilon(x) \times (-\alpha, \alpha) \subset V$ y, por lo tanto, $S_\epsilon^0(x) \subset V^0$. De esto se sigue que $V^0 \in D^0$. Tomemos ahora $U \in D^0$, y sea $(x, 0)$ un punto cualquiera de U. Sea $\epsilon > 0$ tal que

$S_\epsilon^0(x) \subset U$, entonces ya que T es una F-topología existe $V \in T$ tal que $(x, 0) \in V$ y $V^0 \subset S_\epsilon^0(x)$. De esto se sigue que $U \in T^0$. La propiedad 4 de la Definición 1 nos permite trasladar esta demostración para cualquier $t \in R$.

LEMA 2. *Sea T una F-topología de $X \times R$. Si V_1 y V_2 son dos elementos de T tales que, para cierta $t \in R$, $V_1^t \subset V_2^t$, entonces $V_1 \subset V_2$.*

Demostración. Supongamos que $V_1 \not\subset V_2$, ie., que $V_1 - V_2 \neq \emptyset$. Es fácil ver que esto también implica que $V_1 - \bar{V}_2 \neq \emptyset$. Ahora bien, $V_1 - \bar{V}_2 \in T$ y, ya que $V_1^t \subset V_2^t$, tenemos que $p(V_1 - \bar{V}_2) \neq R$. Esto contradice el punto 2 de la Definición 1 y prueba el lema.

COROLARIO 1. *Si $V \in T$ es tal que, para alguna $t \in R$, $V^t = X^t$, entonces $V = X \times R$.*

COROLARIO 2. *Si $F \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado de $X \times R$ (respecto a la opología T), entonces $p(F) = R$.*

Demonstración. Supongamos que $p(F) \neq R$, ie., que existe $t \in R$ tal que $F^t = \emptyset$. Entonces $V = X \times R - F$ es un elemento de T con la propiedad que $V^t = X^t$. Aplicando ahora el Corolario 1 a V, se tiene que $V = X \times R$; ie., $F = \emptyset$.

COROLARIO 3. *$X \times R$ con una F-topología T es un espacio regular.*

Demostración. Sea $V \in T$ y $(x, t) \in V$. Por el Lema 1, V^t es un abierto de X^t en la topologiá que define la métrica, ie., $V^t \in D^t$. Ahora bien, ya que X^t con la topologiá D^t es un espacio regular, existe $\epsilon > 0$ tal que $\overline{S_\epsilon^t(x)} \subset V^t$. Nuevamente por el Lema 1 existe $V_1 \in T$ tal que $V_1^t = S_\epsilon^t(x)$. Finalmente, por el Corolario 2, $\bar{V}_1^t \subset V^t$ implica $\bar{V}_1 \subset V$. Resumiendo: dado $V \in T$ y $(x, t) \in V$, existe $V_1 \in T$ tal que $(x, t) \in V_1$ y $\bar{V}_1 \subset V$.

TEOREMA 1. *La función $j: \pi(X) \to F(X)$ dada por $j(\pi) = T_\pi$ es biunívoca, ie.:*
(i) dada $T \in F(X)$, existe $\pi \in \pi(X)$ tal que $T_\pi = T$;
(ii) $T_\pi = T_{\pi'}$ implica $\pi = \pi'$.

La manera como vamos a demostrar (i) es la siguiente: Definimos una relación de quivalencia en $X \times R$ con la topologiá T, de tal suerte que el espacio cociente de $X \times R$ bajo la relación es X y la función identificación es π. Seguidamente probamos que $\pi \in \pi(X)$. Denotemos por $N(x, t)$ la familia de vecindades en T de $(x, t) \in X \times R$ y consideremos la siguiente relación de equivalencia,

$$(x, t) \sim (x', t'), \quad \text{si y solo si} \quad N(x, t) = N(x', t').$$

Denotemos por $\{(x, t)\}$ la clase de equivalencia del punto (x, t). Vamos a mostrar que en cada clase hay uno y solo un elemento de la forma $(x, 0)$. Sea $(x_0, t_0) \in X \times R$ y $\{(x_0, t_0)\}$, su clase. Consideremos el conjunto

$$M = \{x \in X : {}^\exists V_x \in N(x, 0) : (x_0, t_0) \notin V_x\}.$$

Afirmamos que $M \neq X$. De otro modo, el abierto $V = \bigcup_{x \in X} V_x$ tendría la propiedad que $V^0 = X^0$; es decir, $V = X \times R$ y sin embargo $(x_0, t_0) \notin V$. Tomemos ahora $x \in X - M$; esto quiere decir que todo elemento de $N(x, 0)$ contiene a (x_0, t_0). Queremos ver que también todo elemento de $N(x_0, t_0)$ contiene a $(x, 0)$ y por lo tanto $(x, 0) \in \{(x_0, t_0)\}$. Supongamos que existe $V_1 \in N(x_0, t_0)$ tal que $(x, 0) \notin V_1$. Entonces, ya que $X \times R$ es un espacio regular (ver Corolario 3), existe $V \in N(x_0, t_0)$ tal que $\bar{V} \subset V_1$. El punto $(x, 0)$ y el cerrado $\bar{V}^0$ son ajenos; y, tomando en cuenta que en X^0 las topologías T^0 y D^0 coinciden (ver Lema 1), podemos encontrar $V_2 \in N(x, 0)$ tal que $V_2^0 \cap V^0 = \emptyset$. Esto contradice el punto 2 de la Definición 1, pues $V_2 \cap V \in T$, $(x_0, t_0) \in V_2 \cap V$ y, como $V_2^0 \cap V^0 = \emptyset$, entonces $p(V_2 \cap V) \neq R$. Con argumentos análogos se puede probar que $(x, 0)$ es el único representante en X^0 de la clase $\{(x_0, t_0)\}$. Identifiquemos ahora cada una de las clases de equivalencia con su único representante en X^0. Sea $\pi_1: X \times R \to X^0$ la función identificación; ie., $\pi_1(x, t) = (x', 0)$ donde $(x', 0) \in \{(x, t)\}$. Y sea C la topología cociente en X^0; ie.,

$$C = \{U \subset X^0 : \pi_1^{-1}(U) \in T\}.$$

Vamos a probar que $C = D^0$. Sea $U \in C$; entonces, si $V = \pi_1^{-1}(U)$ (ie., $V = \bigcup\{(x, 0)\}$ con $(x, 0) \in U$), es claro que $V^0 = U$ y por lo tanto $U \in T^0 = D^0$. Tomemos ahora $U \in D^0$; entonces, como $D^0 = T^0$, existe $V \in T$ tal que $V^0 = U$. Es fácil ver que $(x', t') \in V$ si y solo si $(x', t') \sim (x, 0)$ para algún $(x, 0) \in U$, ie., si y solo si $(x', t') \in \pi^{-1}(U)$. De esto se sigue que $V = \pi_1^{-1}(U)$ y por lo tanto $U \in C$. Finalmente, para definir el flujo continuo π, consideremos la isometría $i: X^0 \to X$ dada por $i(x, 0) = x$. Sea $\pi: X \times R \to X$ dada por $\pi(x, t) = x'$ donde $(x', 0)$ es el único representante en X^0 de la clase $\{(x, t)\}$; ie., $\pi = i\pi_1$. Por el momento, tenemos que π es una función continua de $X \times R$, con la topología T, en X con la topología dada por la métrica. Además, ya que $C = D^0$, se sigue de inmediato que $T_\pi = T$. Sólo nos resta mostrar que π satisface las propiedades F.1 y 2. Ahora bien, $\pi(x, 0) = i\pi_1(x, 0) = i(x, 0) = x$, luego π satisface F.1. Para probar F.2, haremos uso de los hechos siguientes: (a) $(x, t) \sim (x', t')$ implica $\pi(x, t) = \pi(x', t')$; (b) $(x, t) \sim (x', t')$ implica $(x, t + t'')(x', t' + t'')$ para $t'' \in R$. La propiedad (b) se sigue fácilmente del punto 4 en la Definición 1. Sean pues $x \in X$ y $t_1, t_2 \in R$. Primero tenemos $(x, t_1) \sim (\pi(x, t_1), 0)$ y, por (b), $(x, t_1 + t_2) \sim (\pi(x, t_1), t_2)$; finalmente, por (a), $\pi(x, t_1 + t_2) = \pi(\pi(x, t_1), t_2)$. Con esto queda demostrado la parte (i) del teorema. Respecto a la parte (ii), nótese que está implícitamente contenida en la demostración de (i), pues ésta es constructiva.

Centro de Investigación del I P N, México, D.F.

Referencias

[1] J. L. Arraut, *Limit sets and periodical orbits*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **10** (1965).

[2] V. V. Nemytskii y V. V. Stepanov, Qualitative theory of differential equations. Princeton Univ. Press (1960).