SOBRE IDEALES LOCALMENTE DETERMINADOS

POR FRANCISCO TOMÁS

1. Whitney demostró en 1947 la conjetura de Schwartz de que todo ideal de funciones r veces continuamente diferenciables en un abierto de R^n, cerrado con respecto a la topología compacta de orden r, está determinado por sus ideales locales (ver [5], [6]). Si $\mathcal{E}^r$ es el anillo de tales funciones en el abierto G de R^n, se considera para cada $a = (a_1, \cdots, a_n) \in G$ el anillo $\mathcal{E}_a^r$ de los polinomios en $x_i - a_i$ módulo los monomios de grado $> r$ y el homomorfismo $\pi_a : \mathcal{E}^r \to \mathcal{E}_a^r$ definido así:

$$\pi_a(f) = \sum_{\sum_{j=1}^{n} i_j \leq r} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} i_j\,!} \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n} f(a)}{\partial_{x_1}^{\;i_1} \cdots \partial_{x_n}^{\;i_n}} (x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_n - a_n)^{i_n};$$

y el teorema de Whitney afirma entonces que, *si I es ideal cerrado de $\mathcal{E}^r$,*

$$I = \textstyle\bigcap_{a \in G} \pi_a^{-1}(I_a),$$

donde $I_a = \pi_a(I)$ (y, de hecho, I_a es ideal de $\mathcal{E}_a^r$).

Por otra parte Cartan demostró, ampliando un resultado de Oka (ver [2], teorema 4 ter; [4], teorema 1), un teorema análogo en el anillo $\mathcal{O}$ de las funciones holomorfas en un dominio de holomorfía D de C^n, relativamente a los ideales cerrados con la topología compacta. El teorema de Cartan (para ideales) puede expresarse de este modo: para cada $a \in D$, sea $\mathcal{O}_a$ el anillo de las series de potencias convergentes con centro en a, y sea $\pi_a : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_a$ el homomorfismo que asocia a cada $f \in \mathcal{O}$ la serie de $\mathcal{O}_a$ que la representa; entonces, *si I es un ideal cerrado de $\mathcal{O}$,*

$$I = \textstyle\bigcap_{a \in D} \pi_a^{-1}(I_a),$$

donde I_a es el ideal generado por $\pi_a(I)$ en $\mathcal{O}_a$.

A continuación se demuestra un análogo puramente algebraico de estos teoremas (ver teorema 1, sección 3; teorema 1′, sección 4). El teorema 1 implica, a través del corolario 1, que todo ideal I de $\mathcal{E}^r$ cerrado con la "topología abstracta de orden r" (ver sección 5) es intersección de los $\pi_a^{-1}(I_a)$. Una base de las vecindades de cero en la topología abstracta de orden r consta de los conjuntos de funciones cuyas derivadas de orden $\leq r$ se anulan en todos los puntos $a \in P$, donde P recorre todos los conjuntos finitos de puntos de G. La topología abstracta de orden r no es la misma que la compacta de orden r, pero el teorema de Whitney tiene como consecuencia inmediata el que todo ideal cerrado con esta última topología lo es también con la topología abstracta, y en este sentido el teorema 1 es una generalización del teorema de Whitney (sección 5). La situación es análoga para el teorema 1′ y el teorema de Cartan, pero su descripción se complica y no puede hacerse en este momento (ver sección 6).

Lo que posibilita estos resultados es: (1) el hecho de que $\mathcal{E}^r$ y $\mathcal{O}$ pueden interpretarse como subanillos de anillos obtenidos con procedimientos del Algebra Conmutativa a partir de los anillos $R[x_1, \cdots, x_{nu}]$ y $C[x_1, \cdots, x_{nu}]$, respectivamente, y (2) que estos anillos son noetherianos. La parte del trabajo contenida en las secciones 3 y 4 está desarrollada para una clase amplia de anillos noetherianos, que contiene a los que tienen idéntico.

2. En esta sección se recogen algunos resultados sobre anillos noetherianos que se utilizarán en las secciones 3 y 4.

Se considerará un anillo conmutativo noetheriano $\mathcal{B}$, no necesariamente con idéntico, pero tal que $\mathcal{B}$ no es el radical de ningún ideal primario propio de $\mathcal{B}$, lo que equivale a que todo ideal máximo sea primo. La condición se usará en sus dos formas.

Se supondrá que $M_1, \cdots, M_s$ son ideales máximos diferentes dos a dos y que $r_1, \cdots, r_s$ son enteros no negativos.

PROPOSICIÓN 1. *Sean $a_1, \cdots, a_s \in \mathcal{B}$. Existe $a \in \mathcal{B}$ tal que $a - a_i \in M_i^{ri}$ para $1 \leqq i \leqq s$.*

Se supone $s > 1$. La proposición se demostrará por inducción sobre $r = \sum_{i=1}^{s} r_i$. Es válida para $r = 0$ (si se conviene en que $M_i^0 = \mathcal{B}$). Supóngase que existe $a \in \mathcal{B}$ con $a - a_i \in M_i^{ri}$, $1 \leqq i \leqq s$; se comprobará que existe b tal que, por ejemplo, $b - a_i \in M_i^{ri}$ para $2 \leqq i \leqq s$ y $b - a_1 = (b - a) + (a - a_1) \in M_1^{r_1+1}$. La existencia de b es consecuencia de la siguiente afirmación, para $d = b - a$, $c = a_1 - a$:

Para cada $c \in M_1^{r_1}$ existe $d \in \mathcal{B}$ tal que $d - c \in M_1^{r_1+1}$ y $d \in M_i^{ri}$ para $2 \leqq i \leqq s$.

Se demuestra la afirmación. Sea $u \in \bigcap_{i=2}^{s} M_i^{ri}$, $u \notin M_1$; entonces $(M_1^{r_1+1}, u) = \mathcal{B}$ (porque para todo primario Q tal que $Q \supseteq (M_1^{r_1+1}, u)$, se cumple $\sqrt{Q} \supseteq M_1$, luego $\sqrt{Q} = \mathcal{B}$) y existen $d' \in \mathcal{B}$, $n \in Z$ y $e \in M_1^{r_1+1}$ tales que $c = e + d'u + nu$. Tomando $d = d'u + nu$ se termina la demostración.

PROPOSICIÓN 2. *Supóngase $s > 1$. Sea A un ideal de $\mathcal{B}$, y sea $a \in \mathcal{B}$; sean $a_i \in A$ tales que $a_i - a \in M_i^{r_1}$, $1 \leqq i \leqq s$. Para cada $u \in \mathcal{B}$ existen $a' \in A$ y un entero positivo t tales que*

$$a' - u^{(s-1)t}a \in \bigcap_{i=1}^{s} M_i^{ri}.$$

Sean, para $1 \leqq j \leqq s$, $b_j' \in \bigcap_{i \neq j} M_i^{ri}$, $b_j' \notin M_j$; existen $c_j \in \mathcal{B}, n_j \in Z, d_j \in M_j$ tales que $u = c_j b_j' + n_j b_j' + d_j$.

Sea $t \geqq \operatorname{Max}(r_1, \cdots, r_s)$; entonces

$$(u - c_j b_j' - n_j b_j')^t \in (u^t + \bigcap_{i \neq j} M_i^{ri}) \cap M_j^{rj}.$$

Tomando $b_j = (u - c_j b_j' - n_j b_j')^t - u^t$ se tiene, pues:

(1) $b_j \in \bigcap_{i \neq j} M_i^{ri}$;

(2) $b_j b_k \in \bigcap_{i=1}^s M_i^{r_i}$, para $j \neq k$; y

(3) $u^t + b_j \in M_j^{r_j}$.

Se demuestra enseguida que

(4) $\sum_{i=1}^s [\prod_{j\neq i} (u^t + b_j)] - u^{(s-1)t} \in \bigcap_{i=1}^s M_i^{r_i}$.

En efecto, por (2) basta ver que

$$\sum_{i=1}^s (u^{(s-1)t} + u^{(s-2)t} \sum_{j\neq i} b_j) - u^{(s-1)t} \in \bigcap_{i=1}^s M_i^{r_i};$$

pero esta expresión es igual a $(s - 1)u^{(s-2)t}(u^t + \sum_{j=1}^s b_j)$, y la conclusión se obtiene de (1) y (3), ya que $u^t + \sum_{j=1}^s b_j = u^t + b_j + \sum_{k\neq j} b_k \in M_j^{r_j}$ para cada j.

Sea, finalmente, $a' = \sum_{i=1}^s a_i \prod_{j\neq i} (u^t + b_j)$; se tiene

$$a' - u^{(s-1)t} a = \sum_{i=1}^s [(a_i - a) \prod_{j\neq i} (u^t + b_j)] + a[\sum_{i=1}^s \prod_{j\neq i} (u^t + b_j) - u^{(s-1)t}],$$

donde el segundo sumando $\in \bigcap_{i=1}^s M_i^{r_i}$, por (4), y el primero también, por (3) y la hipótesis.

Proposición 3. *Sea Q un ideal primario de $\mathcal{B}$ que contiene a $\bigcap_{i=1}^s M_i^{r_i}$; sea $a \in \mathcal{B}$, y supóngase que existen $a_i \in Q$ tales que $a_i - a \in M_i^{r_i}$, $1 \leqq i \leqq s$. Entonces $a \in Q$.*

Sea $u \notin \sqrt{Q}$. Por la proposición anterior, $a' - u^{(s-1)t} a \in \bigcap_{i=1}^s M_i^{r_i} \subseteq Q$, para algún $a' \in Q$ y $t > 0$; por lo tanto $a \in Q$.

3. A partir de este momento se tratará con un anillo conmutativo noetheriano $\mathcal{A}$ que no es radical de ninguno de sus ideales primarios propios. Para cada cociente de $\mathcal{A}$ se cumplen estas mismas hipótesis y son aplicables los resultados de la sección anterior. Sea $\mathfrak{M}$ un conjunto de ideales máximos de $\mathcal{A}$.

Para un entero no negativo r sea, para cada $M \in \mathfrak{M}$, el anillo $\mathcal{A}_{M,r} = \mathcal{A}/M^{r+1}$, con la topología discreta, y sea $\varphi_{M,r}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{M,r}$ el homomorfismo canónico. Sea

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{M},r} = \prod_{M\in\mathfrak{M}} \mathcal{A}_{M,r},$$

con la topología producto y con las proyecciones

$$\pi_{M,r}: \mathcal{A}_{\mathfrak{M},r} \to \mathcal{A}_{M,r},$$

Se denotará por

$$\varphi_{\mathfrak{M},r}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathfrak{M},r}$$

el homomorfismo inducido por los $\varphi_{M,r}$; o sea que $\varphi_{\mathfrak{M},r}(a) = (\varphi_{M,r}(a))_{M\in\mathfrak{M}}$. Se tendrá en cuenta que $\varphi_{\mathfrak{M},r}(M)$ es ideal máximo de $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathcal{A})$, para todo $M \in \mathfrak{M}$.

Lema 1. *$\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathcal{A})$ es denso en $\mathcal{A}_{\mathfrak{M},r}$.*

Sea $x \in \mathcal{A}_{\mathfrak{M},r}$, y sea la vecindad $x + \bigcap_{i=1}^s \operatorname{Ker} \pi_{M_i,r} = x + V$ de x, $(M_i \in \mathfrak{M})$.

Sean $a_i \in \mathfrak{A}$ con $\varphi_{M_i,r}(a_i) = \pi_{M_i,r}(x)$, $i \leqq i \leqq s$. Por la proposición 1 existe $a \in \mathfrak{A}$ con $\varphi_{M_i,r}(a) = \varphi_{M_i,r}(a_i)$ y se tiene, por lo tanto, $\pi_{M_i,r}(\varphi_{\mathfrak{M},r}(a)) = \pi_{M_i,r}(x)$, $i \leqq i \leqq s$, de donde $\varphi_{\mathfrak{M},r}(a) \in x + V$.

LEMA 2. *Sea I un ideal cerrado de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}$. Entonces I es la intersección de todos los $\bar{A}$ tales que*:

(a) *A es ideal abierto de $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$,*

(b) *$\bar{A} \supseteq I$.*

Debe comprobarse que, dado $x \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r} - I$, existe A cumpliendo (a) y (b) tal que $x \notin \bar{A}$. Pero, en efecto, existe $V = \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \pi_{M_i,r}$ tal que $(x + V) \cap I = \emptyset$; sea $I' = (I, V)$, el ideal generado por I y V, que es ideal abierto de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}$ (porque V es ideal abierto), y se cumple $x \notin I'$; sea $A = I' \cap \varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$, ideal abierto de $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$. Por el lema 1, $I' = \bar{A}$.

LEMA 3. *Sea A ideal abierto de $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$. (Supóngase que $A \supseteq (\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \pi_{M_i,r}) \cap \varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$). Si $B_1, \cdots, B_t$ son ideales de $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$ y $A = B_1 \cap \cdots \cap B_t$, entonces $\bar{A} = \bar{B}_1 \cap \cdots \cap \bar{B}_t$.)*

Bastará ver el caso $t = 2$. Debe comprobarse que $\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \subseteq \bar{A}$. Sea $x \in \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2$; para cada $W = \bigcap_{j=1}^{v} \operatorname{Ker} \pi_{N_j,r}$, $N_j \in \mathfrak{M}$, existe, para $i = 1, 2$, $b_i \in B_i$ con $b_i \in x + (\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \pi_{M_i,r}) \cap W = x + V \cap W$. Como existe $a \in (x + V) \cap \varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$, también se cumple $b_i \in a + V$, y

$$b_1 - b_2 \in V \cap \varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A}) \subseteq A,$$

de donde

$$b_1 \in B_1 \cap B_2 = A$$

y

$$(x + W) \cap (B_1 \cap B_2) \supseteq (x + V \cap W) \cap (B_1 \cap B_2) \ni b_1 .$$

Esto significa que $x \in \bar{A}$.

LEMA 4. *Sea Q ideal primario abierto de $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$. (Supóngase que $Q \supseteq (\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \pi_{M_i,r}) \cap \varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$). Entonces $\bar{Q} = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \overset{-1}{\pi}_{M,r}(\pi_{M,r}(Q))$.*

Debe demostrarse que $\bar{Q}$ contiene la intersección. Sea

$$x \in \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \overset{-1}{\pi}_{M,r}(\pi_{M,r}(Q));$$

entonces existen $a_i \in Q$ con $a_i - x \in \operatorname{Ker} \pi_{M_i,r}$. Por el lema 1, dado el abierto $W = \bigcap_{j=1}^{v} \operatorname{Ker} \pi_{N_j,r}$, $N_j \in \mathfrak{M}$, existe $a \in \varphi_{\mathfrak{M},r}(A)$ tal que

$$a - x \in (\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \pi_{M_i,r}) \cap W = V \cap W.$$

Pero

$$a - a_i \in \operatorname{Ker} \pi_{M_i,r} \cap \varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A}), \qquad 1 \leqq i \leqq s,$$

de donde

$$a - a_i \in \varphi_{\mathfrak{M},r}(M_i^{r+1}) = (\varphi_{\mathfrak{M},r}(M_i))^{r+1},$$

y, por la proposición 3, $a \in Q$; por lo tanto

$$(x + W) \cap Q \supseteq (x + V \cap W) \cap Q \ni a.$$

TEOREMA 1. *I es ideal cerrado de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}$ si y solo si*

$$I = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \overset{-1}{\pi}_{M,r}(\pi_{M,r}(I)).$$

Debe demostrarse que, si I es cerrado, se cumple la igualdad. Por el lema 2,

$$I = \bigcap_{A \in S_1} \bar{A},$$

donde S_1 consta de los ideales abiertos A de $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$ tales que $\bar{A} \supseteq I$.

Por ser $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$ noetheriano, $A = \bigcap_{i=1}^{t} Q_i$, donde los Q_i son primarios y abiertos. Por el lema 3, $\bar{A} = \bigcap_{i=1}^{t} \bar{Q}_i$, de donde

$$I = \bigcap_{Q \in S_2} \bar{Q},$$

donde S_2 consta de los ideales primarios abiertos Q de $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$ tales que $\bar{Q} \supseteq I$.

Por el lema 4,

$$\bar{Q} = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \overset{-1}{\pi}_{M,r}(\pi_{M,r}(Q)),$$

y es claro que $\pi_{M,r}(Q) \supseteq \pi_{M,r}(I)$ (puesto que $\pi_{M,r}(Q) = \pi_{M,r}(\bar{Q}) \supseteq \pi_{M,r}(I)$). Por lo tanto

$$I = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} (\bigcap_{Q \in S_M} \overset{-1}{\pi}_{M,r}(\pi_{M,r}(Q))),$$

donde S_M consta de los ideales primarios abiertos Q de $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$ tales que $\pi_{M,r}(Q) \supseteq \pi_{M,r}(I)$, y es claro que

$$\bigcap_{Q \in S_M} \overset{-1}{\pi}_{M,r}(\pi_{M,r}(Q)) \supseteq \overset{-1}{\pi}_{M,r}(\pi_{M,r}(I)),$$

de donde

$$I = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \overset{-1}{\pi}_{M,r}(\pi_{M,r}(I)).$$

COROLARIO 1. *Sea $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},r}$ un subanillo de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}$ que contenga al anillo $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A})$ y sea $\pi'_{M,r}$ la restricción de $\pi_{M,r}$ a $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},r}$. Entonces, I' es ideal cerrado de $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},r}$ si y solo si*

$$I' = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \overset{\prime -1}{\pi}_{M,r}(\pi'_{M,r}(I')).$$

Porque si I es la cerradura de I' en $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}$, I es ideal cerrado de $\mathfrak{A}_{M,r}$, por el lema 1, y

$$\begin{aligned} I' = I \cap \mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},r} &= [\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \overset{-1}{\pi}_{M,r}(\pi_{M,r}(I))] \cap \mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},r} \\ &\supseteq \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \overset{\prime -1}{\pi}_{M,r}(\pi'_{M,r}(I')) \supseteq I'. \end{aligned}$$

4. En esta sección se obtiene en análogo del teorema 1 para $r = \infty$. Los productos y límites proyectivos de anillos que se introducen tienen siempre la topología de producto y de límite proyectivo, respectivamente; esto es, las menos finas que hacen que todos los homomorfismos que aparecen sean continuos. Los homomorfismos que no se explicitan son los homomorfismos obvios.

(a) Sea

$$\lambda_{\mathfrak{M},r}^{r+1}: \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r+1} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}$$

el homomorfismo inducido por los $\lambda_{M,r}^{r+1}: \mathfrak{A}_{M,r+1} \longrightarrow \mathfrak{A}_{M,r}$; y sean

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty} = \varprojlim \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}\,, \qquad \lambda_{\mathfrak{M},r}: \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}\,.$$

Obviamente $\lambda_{\mathfrak{M},r}^{r+1} \circ \varphi_{\mathfrak{M},r+1} = \varphi_{\mathfrak{M},r}$.

(b) Los homomorfismos $\varphi_{\mathfrak{M},r}: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}$ determinan el

$$\varphi_{\mathfrak{M},\infty}: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}\,,$$

y la siguiente afirmación es consecuencia inmediata del lema 1 y las definiciones:

PROPOSICIÓN 4. *$\varphi_{\mathfrak{M},\infty}(\mathfrak{A})$ es denso en $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}$* .

(c) Sean

$$\mathfrak{A}_{M,\infty} = \varprojlim \mathfrak{A}_{M,r}\,, \qquad \lambda_{M,r}: \mathfrak{A}_{M,\infty} \longrightarrow \mathfrak{A}_{M,r}\,,$$

($\mathfrak{A}_{M,\infty}$ no es otra cosa que el completado separado M-ádico de $\mathfrak{A}$);

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}^{*} = \textstyle\prod_{M \in \mathfrak{M}} \mathfrak{A}_{M,\infty}\,, \qquad \pi_{M,\infty}: \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}^{*} \longrightarrow \mathfrak{A}_{M,\infty}\,.$$

(d) Este inciso se refiere a la conmutatividad de las operaciones producto y límite proyectivo. Se define una aplicación $\psi: \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}^{*}$. Un elemento de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}$ es de la forma $a = (a_r)_{r \in N}$ tal que $\lambda_{\mathfrak{M},r}^{r+1}(a_{r+1}) = a_r$, donde

$$a_r = (a_{r,M})_{M \in \mathfrak{M}} \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}\,, \qquad a_{r,M} \in \mathfrak{A}_{M,r}\,;$$

un elemento de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}^{*}$ es de la forma $a^{*} = (a_M{}^{*})_{M \in \mathfrak{M}}$, donde

$$a_M{}^{*} = (a_{M,r}^{*})_{r \in N} \in \mathfrak{A}_{M,\infty}\,, \qquad a_{M,r}^{*} \in \mathfrak{A}_{M,r}\,, \qquad \lambda_{M,r}^{r+1}(a_{M,r+1}^{*}) = a_{M,r}^{*}\,.$$

Entonces $\psi(a) = a^{*}$, donde $a_{M,r}^{*} = a_{r,M}$ para todo $r \in N$, $M \in \mathfrak{M}$.

Se omite el escribir con todo detalle la comprobación de:

PROPOSICIÓN 5. *ψ es un isomorfismo de anillos topológicos entre $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}$ y $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}^{*}$. Una vez identificados estos anillos se cumple*

$$\pi_{M,r} \circ \lambda_{\mathfrak{M},r} = \lambda_{M,r} \circ \pi_{M,\infty}\,.$$

(e) Sea I un ideal cerrado de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}$. Entonces

$$I = \textstyle\bigcap_{r \in N} \overset{-1}{\lambda}_{\mathfrak{M},r}(\overline{\lambda_{\mathfrak{M},r}(I)}).$$

Por el teorema 1,

$$\overline{\lambda_{\mathfrak{M},r}(i)} = \textstyle\bigcap_{M \in \mathfrak{M}} \overset{-1}{\pi}_{M,r}\,(\pi_{M,r}(\overline{\lambda_{\mathfrak{M},r}(I)})),$$

y es claro que

$$\pi_{M,r}\overline{(\lambda_{\mathfrak{M},r}(I))} = \pi_{M,r}(\lambda_{\mathfrak{M},r}(I)).$$

Aplicando entonces la segunda parte de la proposición 5:

$$\begin{aligned} I &= \bigcap_{r\in N} \overset{-1}{\lambda}_{\mathfrak{M},r} \left(\bigcap_{M\in\mathfrak{M}} \overset{-1}{\pi}_{M,r}(\pi_{M,r}(\lambda_{\mathfrak{M},r}(I)))\right) \\ &= \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} \overset{-1}{\pi}_{M,\infty}\left(\bigcap_{r\in N} \overset{-1}{\lambda}_{M,r}(\lambda_{M,r}(\pi_{M,\infty}(I)))\right) \\ &= \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} \overset{-1}{\pi}_{M,\infty}(\overline{\pi_{M,\infty}(I)}). \end{aligned}$$

Se ha demostrado, pues:

TEOREMA 1'. *I es ideal cerrado de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}$ si y solo si*

$$I = \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} \overset{-1}{\pi}_{M,\infty}(\overline{\pi_{M,\infty}(I)}).$$

Del mismo modo que se demuestra el corolario 1, usando ahora la proposición 4, se tiene:

COROLARIO 1'. *Sea $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},\infty}$ un subanillo de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}$ que contenga al anillo $\varphi_{\mathfrak{M},\infty}(\mathfrak{A})$, y sea $\pi'_{\mathfrak{M},\infty}$ la restricción de $\pi_{M,\infty}$ a $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},\infty}$. Entonces, I' es ideal cerrado de $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},r}$ si y solo si*

$$I' = \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} \overset{\prime-1}{\pi}_{M,\infty}(\overline{\pi'_{M,\infty}(I')}).$$

Los resultados anteriores pueden también demostrarse siguiendo el mismo procedimiento de la sección 3, partiendo de los $\mathfrak{A}_{M,\infty}$ en lugar de los $\mathfrak{A}_{M,r}$.

5. Sea ahora $\mathfrak{A} = R[x_1, \cdots, x_n]$, y sean $\mathfrak{M}$ el conjunto de los ideales máximos de $\mathfrak{A}$ asociados a puntos de un abierto G de R^n y $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},r} = \mathcal{E}^r$ el anillo de las funciones r veces continuamente diferenciables. Se considera $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},r} \subseteq \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}$ identificando f $\in \mathcal{E}^r$ con el elmento de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}$ cuyas componentes son los π_a (f), y se cumple $\varphi_{\mathfrak{M},r}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},r}$. La topología de $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},r}$ se llamará topología abstracta de orden r. Si M_a es el ideal asociado a $a \in G$, se tiene $\mathfrak{A}_{M_a,r} = \mathcal{E}_a^r$ y $\pi'_{M_a,r} = \pi_a$, y es consecuencia inmediata del teorema de Whitney la siguiente afirmación:

(A) *Un ideal de $\mathcal{E}^r$ cerrado con la topología compacta de orden r es cerrado con la topología abstracta de orden r.*

Por el corolario 1, además, la afirmación es equivalente a dicho teorema.

6. La discusión relativa al teorema de Cartan no es tan simple como la anterior. Primero, un comentario marginal:

Como se ha visto, cada $\mathcal{E}^r$, donde impera la topología compacta de orden r, está asociado a un subanillo de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},r}$. En cambio, el anillo de funciones holomorfas en un dominio de holomorfía, donde aparentemente la topología adecuada es la topología compacta (de orden cero), corresponderá a un subanillo de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}$. Esta aparente falta de simetría la explican las desigualdades de Cauchy, pues gracias a ellas todas las topologías compactas en el anillo de funciones holomorfas en un abierto de C^n coinciden. Este hecho no se utilizará.

Sea pues $\mathfrak{A} = C[x_1, \cdots, x_n]$, y sea $\mathfrak{M}$ el conjunto de ideales máximos de $\mathfrak{A}$ asociados a puntos del dominio de holomorfía D. Sea $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{M},\infty}$ el anillo $\mathcal{O}$ de funciones holomorfas en D; se cumple $\varphi_{\mathfrak{M},\infty}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathfrak{A}_{\mathfrak{M},\infty}$. El anillo $\mathfrak{A}_{M_a,\infty}$, para el ideal

M_a asociado a $a = (a_1, \cdots, a_n) \in D$, consta de las series de potencias formales en $x_i - a_i$, y será necesario considerar incluído en él al anillo $\mathcal{O}_a$ de series de potencias convergentes con centro en a. La topología de $\mathcal{O}$ como subespacio de $\mathcal{A}_{\mathfrak{M},\infty}$ se llamará topología abstracta de orden ∞. Se observa que $\pi_a = \pi'_{M_a,\infty}$.

Sea I un ideal de $\mathcal{O}$ cerrado con respecto a la topología compacta. Del corolario (7.3.5) de [3] (Cap. 0, pág. 67) se concluye, por ser $\mathcal{O}_a$ y $\mathcal{A}_{M_a,\infty}$ noetherianos y locales, que

(1) $\mathcal{A}_{M_a,\infty}$ es un $\mathcal{O}_a$ - módulo fielmente plano, y

(2) todo ideal de $\mathcal{A}_{M_a,\infty}$ es cerrado (con la topología de $\mathcal{A}_{M_a,\infty}$ como límite proyectivo de los anillos $\mathcal{A}_{M_a,r}$).

De (1) y de (6.6.1) de [3] (Cap. 0, pág. 58; ver también [1], Cap. 1, sec. 3, no. 5, prop. 8, pág. 50) se concluye:

$$I_a = (\mathcal{A}_{M_a,\infty} I_a) \cap \mathcal{O}_a .$$

Pero $I_a = \pi_a(I) = \pi'_{M_a,\infty}(I)$ y, por (2), el ideal $\mathcal{A}_{M_a,\infty}\pi'_{M_a,\infty}(I)$ de $\mathcal{A}_{M_a,\infty}$ es cerrado, por lo tanto igual a $\overline{\pi'_{M_a,\infty}(I)}$, y

$$I_a = \overline{\pi'_{M_a,\infty}(I)} \cap \mathcal{O}_a .$$

Finalmente, como la imagen de π_a está en $\mathcal{O}_a$,

$$\pi_a^{-1}(I_a) = \pi'^{-1}_{M_a,\infty}(\overline{\pi'_{M_a,\infty}(I)} \cap \mathcal{O}_a) = \pi'^{-1}_{M_a,\infty}(\overline{\pi'_{M_a,\infty}(I)}),$$

y, por el teorema de Cartan,

$$I = \bigcap_{M_a \in \mathfrak{M}} \pi'^{-1}_{M_a,\infty}(\overline{\pi'_{M_a,\infty}(I)}),$$

de donde:

(B) *Un ideal de $\mathcal{O}$ cerrado con la topología compacta es cerrado con la topología abstracta de orden ∞.*

La afirmación equivale al teorema de Cartan, porque si I es cerrado con la topología compacta, entonces, por (B) y el corolario 1′,

$$I = \bigcap_{M_a \in \mathfrak{M}} \pi'^{-1}_{M_a,\infty}((\overline{\pi'_{M_a,\infty}(I)}) \supseteq \bigcap_{a \in D} \pi_a^{-1}(I_a) \supseteq I.$$

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL I.P.N., MÉXICO, D. F.

REFERENCIAS

[1] N. BOURBAKI, Algèbre Commutative, Hermann, 1961.
[2] H. CARTAN, *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes*, Bull. Soc. Math. France, **78** (1950).
[3] A. GROTHENDIECK, *Le langage des schémas*, Publ. Math. I.H.E.S., No. 4 (1960).
[4] K. OKA, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables (VII, Sur quelques notions arithmétiques)*, Bull. Soc. Math. France, **78** (1950).
[5] L. SCHWARTZ, *Les théorèmes de Whitney sur les fonctions différentiables*, Sém. Bourbaki, exp. 43 (1950–51).
[6] H. WHITNEY, *On ideals of differentiable functions*, Amer. J. Math., **70** (1948).