IDENTIFICACION DE ESPACIOS DE BANACH CON SU DUAL

POR GUILLERMO RESTREPO

Sea H un espacio de Hilbert, y sea H^* el dual. El teorema de representación de Riesz nos permite identificar H y H^* por medio de una isometría via el producto escalar de H. Mas precisamente, si $x \cdot y$ es el producto escalar de x por y, entonces $x \leftrightarrow x'(x'(y) = x \cdot y)$ es una isometría de H sobre H^*. Nos preguntamos ahora si dato un espacio de Banach X podemos definir en X un producto escalar positivo $x \cdot y$ tal que $x \leftrightarrow x'$ sea una transformación lineal bicontinua de X sobre X^* (no se requiere que sea una isometría). *Demostraremos que esta pregunta se contesta afirmativamente si la topología de X puede definirse por una norma α tal que α y α^* (la normal dual en X^*) sean de clase C^2 en $X - \{0\}$ y $X^* - \{0\}$ respectivamente.* Para las nociones de cálculo diferencial en espacios de Banach, vease [1]. Esta nota fue motivada por una pregunta que hacen Bonic y Frampton en [2]: si α y α^* son de Clase C^2 en $X - \{0\}$ y $X^* - \{0\}$ respectivamente, es X hilbertable?

Supongamos que la topología de X está definido por una norma α con α y α^* de clase C^2 en $X - \{0\}$ y $X^* - \{0\}$ respectivamente. Sea $f(x) = (\alpha(x))^2/2$. Entonces $f'(x) = \alpha(x)\alpha'(x)$. Se demuestra (en [3], Th. 4) que $x \to \alpha(x)\alpha'(x)$ es una transformación de X sobre X^* y que $f'(\lambda x) = \lambda f'(x), \lambda > 0$. Sea $x_0 \neq 0$, $x_0 \in X$, $\alpha(x_0) = 1$. Las hipótesis sobre α y α^* muestran que $f''(x_0): X \to X^*$ es un isomorfismo de X sobre X^*. Demostremos ahora que el producto escalar $x \cdot y = (f''(x_0)(x))(y) = f''(x_0)[x, y]$ es positivo; esto es,

$$(1) \qquad f''(x_0)[u, u] \geq 0 \quad \text{para todo} \quad u \in X.$$

Partiremos de la relación $2f(x) = f'(x) \cdot x$, que puede verificarse sin dificultad. Diferenciando esta expresión, se obtiene $2f'(x) \cdot y = f'(x) \cdot y + f''(x)[y, x]$; esto es,

$$(2) \qquad f'(x) \cdot y = f''(x) \cdot [y, x]$$

(a) Si $\alpha'(x_0) \cdot u = 0$, entonces

$$f(x_0 + \lambda u) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (\lambda u) + f \cdot (x_0)[\lambda u, \lambda u] + 0(\lambda^2)$$

y por tanto

$$f''(x_0)[u, u] = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)}{2} \geq 0.$$

(b) Si $\alpha'(x_0) \cdot u \neq 0$, podemos escribir $u = v + \lambda x_0$, $v \neq 0$, $\alpha'(x_0) \cdot v = 0$. Entonces,

$$(3) \quad f''(x_0)[u, u] = f''(x_0)[v, v] + \lambda^2 f''(x_0)[x_0, x_0] + \lambda f''(x_0)[v, x_0] + \lambda f''(x_0)[x_0, v]$$

Ahora, por (2), $f''[x_0, v] = f'(x_0) \cdot v = 0$, $f''(x_0)[v, x_0] = 0$, y $f''(x_0)[x_0, x_0] = 0$. Por tanto, $f''(x_0)[u, u] = f''(x_0)[v, v] \geq 0$.

Hemos así demostrado que, si α y α^* son de clase C^2 en $X - \{0\}$ y $X^* - \{0\}$ respectivamente, entonces la segunda derivada de $f(x) = (\alpha(x))^2/2$ en todo punto x_0, $x_0 \neq 0$ define un producto escalar positivo $u \cdot v = f''(x_0)[u, v]$. Este producto escalar define la correspondencia $u \leftrightarrow u'$ entre X y X^* por $u'(v) = u \cdot v = f''(x_0)[u, v]$ y es unisomorfismo entre X y X^*.

Observación 1. No sabemos si la hipótesis de que α y α^* sean de clase C^2 en $X - \{0\}$ y $X^* - \{0\}$ implique que X sea hilbertable. En la demostración anterior no demostramos que $f''(x_0)[u, u] > 0$ si $u \neq 0$. Aun si pudieramos demostrar que $f''(x_0)[u, u]$ es estrictamente positivo para algún x_0, quedaría pendiente el problema de si la nueva norma $\beta(u) = (f''(x_0)[u, u])^{1/2}$ es equivalente a la norma original α. Tal sería el caso si suponemos que $f''(x_0)[u, u] \geq C(\alpha(u))^2$ para alguna constante $C > 0$; pero esta hipótesis tiene fuertes implicaciones geométricas con respecto a la curvatura de la bola unidad definida por α, como ha sido demostrado por Lorch [4].

Observación 2. Se demuestra en [2] que en los espacios $L^p(\Omega, \mu)$, la norma usual es de clase C^n, si $p \neq 2k$, $k = 1, 2, \cdots$, donde n es el mayor entero menor que p; y de clase C^∞, si $p = 2k$. Por tanto α y α^* no pueden ser ambas de clase C^2. No se conoce ejemplos de espacios de Banach no hilbertables tales que α y α^* sean de clase C^2.

Agregado en las pruebas: Despues de escribir este artículo el Dr. R. Bonic tuvo la gentileza de comunicarme el siguiente.

Teorema. *Sea X un espacio de Banach cuya topología puede definirse por una normal α tal que α y α^* son de clase C^2 en $X - \{0\}$ y $X^* - \{0\}$ respectivamente. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea $f(x) = (\alpha(x))^2/2$ la función definida anteriormente, y sea $A = f''(x_0)$. Demostramos que $A: X \to X^*$ es biyectiva y que $p(x) = (Ax \cdot x)^{1/2}$ es una norma continua (ver Observación 1). Demostremos ahora que $p(x)$ es equivalente a la norma original α.

Ahora, $\{x \mid p(x) \leq 1\}$ es acotado en la topología débil en X ya que $A: X \to X^*$ es biyectiva. En efecto, si $x' \in X^*$, $x' = Ay$ para algún $y \in X$, y por la desigualdad de Schwartz se tiene que $|x' \cdot x| = |Ay \cdot x| \leq p(y) \cdot p(x) \leq p(y)$. Como todo conjunto acotado en la topología débil es acotado en la fuerte se sigue que existe una constante $c > 0$ tal que $p(x) \geq c\alpha(x)$ y p es equivalente a α. (Esta demostración se debe a R. Bonic y F. Reis.)

Centro de Investigación del I. P. N., México, D. F.

Referencias

[1] S. Dieudonne, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1960.
[2] R. Bonic and S. Frampton, *Smooth functions on Banach manifolds*, (en prensa).
[3] G. Restrepo, *Differentiable norms*, Bol. Soc. Mat. Mex., ser. 2, **10** (1965), 47–55.
[4] E. R. Lorch, *A curvature study of convex bodies in Banach spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **34** (1953), 105–12.