ALGEBRAS DE HOPF Y FORMULAS DEL PRODUCTO

Por Oscar Valdivía G.

Introducción

En el presente trabajo se establecen fórmulas del producto para operaciones secundarias Φ_k asociadas con las siguientes relaciones del álgebra de Steenrod sobre Z_2 :

$$\rho_k = \mathrm{Sq}^1\,\mathrm{Sq}^k + \mathrm{Sq}^k\,\mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^{0,1}\,\mathrm{Sq}^{k-2}, \qquad (k > 2)$$

donde $\mathrm{Sq}^{0,1} = \mathrm{Sq}^1\,\mathrm{Sq}^2 + \mathrm{Sq}^2\,\mathrm{Sq}^1$.

Sean X, Y dos espacios topológicos y $X \times Y$ su producto. Consideramos clases de cohomología $u \in H^p(X)$, $v \in H^q(Y)$ y su producto cruz $u \times v \in H^{p+q}(X \times Y)$, donde la cohomología se considera con coeficientes en Z_2 y por comodidad se omite escribir el grupo de coeficientes. Sea M el conjunto de todos los enteros i tales que $2 \leq i \leq k-3$. Supongamos que las clases u y v satisfacen las siguientes condiciones:

1) $\mathrm{Sq}^k\,u = \mathrm{Sq}^k\,v = 0$, $\mathrm{Sq}^{k-2}\,u = \mathrm{Sq}^{k-2}\,v = 0$, $\mathrm{Sq}^1\,u = \mathrm{Sq}^1\,v = 0$.
2) Para cada $i \in M$ se tiene que

$$\mathrm{Sq}^{k-i}\,u = \mathrm{Sq}^{k-2-i}u = 0, \qquad \text{o bien que } \mathrm{Sq}^i\,v = 0.$$

3) Para cada $j \in M$ se tiene que

$$\mathrm{Sq}^{k-j}\,v = \mathrm{Sq}^{k-2-j}\,v = 0, \qquad \text{o bien que } \mathrm{Sq}^j\,u = 0.$$

Sean $P \subset M$ y $S \subset M$ los enteros que satisfacen, respectivamente, la primera parte de 2) y la primera parte de 3). Con estas hipótesis se demuestra la fórmula del producto siguiente:

$$\Phi_k(u \times v) = \Phi_k(u) \times v + u \times \Phi_k(v) + \textstyle\sum_{i \in P} \Phi_{k-i}(u) \times \mathrm{Sq}^i\,v$$
$$+ \textstyle\sum_{j \in S} \mathrm{Sq}^j\,u \times \Phi_{k-j}(v).$$

La indeterminación en este resultado es la mínima total de los términos que aparecen más, $\sum_{r+s=k} A_r(u) \times A_s(v)$, donde A_t es el subespacio vectorial de A generado por elementos homogéneos de grado t. Además, para los términos donde se tenga que $\mathrm{Sq}^i v = 0$ o bien que $\mathrm{Sq}^j\,u = 0$, la fórmula sigue valiendo al anular estos términos y reducir en la indeterminación la parte con que ellos contribuyen.

Bajo el automorfismo conjugación c, las relaciones ρ_k se transforman en las relaciones

$$c(\rho_k) = \mathrm{Sq}^1\,c(\mathrm{Sq}^k) + c(\mathrm{Sq}^k)\,\mathrm{Sq}^1 + c(\mathrm{Sq}^{k-2})\,\mathrm{Sq}^{0,1}.$$

Denotamos con $\phi_k{}^{\#}$ una operación cohomológica secundaria asociada con $c(\rho_k)$. Con los cambios obvios en las hipótesis se obtiene el resultado análogo al anterior para $\phi_k{}^{\#}(u \times v)$.

Como casos especiales, particularizando las hipótesis se obtienen fórmulas del producto con estructura simétrica.

El método que se sigue para establecer las fórmulas del producto para operaciones cohomológicas secundarias (§9) es establecer primero fórmulas de producto para operaciones funcionales (§8) y utilizar despues la segunda fórmula de Peterson-Stein que relaciona las operaciones cohomológicas secundarias con las funcionales. Con el fin de eliminar los "ejes" en la indeterminación, es necesario estudiar detalladamente la construcción de operaciones funcionales en espacios producto (§7), lo que permite tener una indeterminación menor. Por último, los "ejes" se eliminan estableciendo los resultados para el producto reducido de dos clases de cohomología, en operaciones funcionales, pasando despues a fórmulas del producto reducido para operaciones cohomológicas secundarias, y de allí a fórmulas del producto cruz.

Con el objeto de sistematizar las operaciones funcionales asociadas con relaciones, se introduce el concepto de álgebra de Hopf n-graduada en las primeras secciones del trabajo.

Quiero expresar mi sincero agradecimiento al Dr. José Adem por el estímulo recibido y las valiosas sugestiones que me brindó durante la elaboración de este trabajo.

1. Algebras n-graduadas

En esta sección introduciremos la noción de álgebra de Hopf n-graduada. Sean Z^+ el monoide de los enteros no negativos y $Z_{(n)}{}^+ = Z^+ \oplus \cdots \oplus Z^+$ la suma directa de n copias de Z^+. Sea K un anillo conmutativo con unidad $1 \neq 0$. Un *K-módulo n-graduado* A es una familia $\{A_\alpha \mid \alpha \in Z_{(n)}{}^+\}$ de K-módulos. Un homomorfismo $f : A \to B$ entre K-módulos n-graduados es una familia de K-homomorfismos

$$f_\alpha : A_\alpha \to B_\alpha , \qquad \alpha \in Z_{(n)}{}^+.$$

Si A y B son K-módulos n-graduados definimos $A \otimes B$ por

$$(A \otimes B)_\alpha = \oplus(A_\beta \otimes B_\gamma),$$

donde la suma directa se toma para $\beta + \gamma = \alpha$ y si $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ son homomorfismos entre K-módulos n-graduados, definimos $(f \otimes g) : A \otimes B \to A' \otimes B'$ como el homomorfismo dado por $(f \otimes g)_\alpha = \oplus(f_\beta \otimes g_\gamma)$, donde $\beta + \gamma = \alpha$.

El anillo K lo consideramos como un K-módulo n-graduado donde $K_0 = K_{(0,\cdots,0)} = K$ y $K_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in Z_{(n)}{}^+$ tal que $\alpha \neq 0$. Obviamente, $A \otimes K \approx A \approx K \otimes A$.

Un *álgebra n-graduada* sobre K es un K-módulo n-graduado A con K-homomorfismos $\varphi_A : A \otimes A \to A$, $\eta_A : K \to A$ tales que los diagramas siguientes son conmutativos:

(1.1)
$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1 \otimes \varphi_A"] \arrow[d, "\varphi_A \otimes 1"] & A \otimes A \arrow[d, "\varphi_A"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\varphi_A"] & A
\end{tikzcd}$$

(1.2)
$$\begin{tikzcd}
K \otimes A \arrow[rr, "\eta_A \otimes 1"] & & A \otimes A \arrow[dl, "\varphi_A"] \\
& A \arrow[ul, "\approx"] \arrow[dl, "\approx"'] & \\
A \otimes K \arrow[rr, "1 \otimes \eta_A"] & & A \otimes A \arrow[ul, "\varphi_A"']
\end{tikzcd}$$

Los homomorfismos φ_A y η_A se llaman, respectivamente, multiplicación y unidad del álgebra A, además, la condición (1.1) expresa que el álgebra es *asociativa.* A es *álgebra conexa* si $\eta_A : K_0 \to A_0$ es isomorfismo.

Para A y B dos K-módulos n-graduados sea $T : A \otimes B \to B \otimes A$ la transformación definida por

$$T_\alpha(a \otimes b) = (-1)^t b \otimes a,$$

donde $a \in A_\beta, b \in B_\gamma$ con $\beta = (r_1, \cdots, r_n), \gamma = (s_1, \cdots, s_n), t = (r_1 + \cdots + r_n) \cdot (s_1 + \cdots + s_n)$ y $\alpha = \beta + \gamma$.

Si A y B son álgebras n-graduadas sobre K, el producto tensorial $A \otimes B$ es álgebra n-graduada sobre K con la multiplicación dada por la composición

$$A \otimes B \otimes A \otimes B \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{\varphi_A \otimes \varphi_A} A \otimes B$$

y la unidad por

$$K \approx K \otimes K \xrightarrow{\eta_A \otimes \eta_B} A \otimes B.$$

Un homomorfismo $f : A \to B$ entre álgebras n-graduadas es un homomorfismo tal que los siguientes diagramas son conmutativos,

(1.3)
$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "f \otimes f"] & A \arrow[d, "f"] \\
B \otimes B \arrow[r, "\varphi_B"] & B,
\end{tikzcd}$$

$$(1.4)\qquad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\eta_A} & A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ K & \xrightarrow{\eta_B} & B. \end{array}$$

Una aumentación de un álgebra n-graduada A es un homomorfismo $\epsilon : A \longrightarrow K$ entre álgebras.

Un K-módulo n-graduado M es un *A-módulo izquierdo* n-graduado o más brevemente un *A-módulo n-graduado,* si A es un álgebra n-graduada sobre $K,$ y si existe una transformación $\lambda_M : A \otimes M \longrightarrow M$ tal que los siguientes diagramas son conmutativos,

$$(1.5)\qquad \begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{1 \otimes \lambda_M} & A \otimes M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_A \otimes 1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_M} \\ A \otimes M & \xrightarrow{\lambda_M} & M, \end{array}$$

$$(1.6)\qquad \begin{tikzcd} K \otimes M \arrow[rr, "\eta \otimes 1"] & & A \otimes M \arrow[dl, "\lambda_M"] \\ & M, \arrow[ul, "\approx"] & \end{tikzcd}$$

donde η es la unidad de A. La transformación λ_M es la acción de A en M.

Un homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ entre A-módulos n-graduados es un K-homomorfismo tal que el diagrama

$$(1.7)\qquad \begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{\lambda_M} & M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1 \otimes f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ A \otimes N & \xrightarrow{\lambda_N} & N \end{array}$$

es conmutativo.

Sean M un A-módulo y N un B-módulo n-graduados con A y B álgebras n-graduadas sobre K. Entonces, $M \otimes N$ es un $A \otimes B$-módulo n-graduado con la acción

$$\lambda_{M \otimes N} : A \otimes B \otimes M \otimes N \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} A \otimes M \otimes B \otimes N \xrightarrow{\lambda_M \otimes \lambda_N} M \otimes N.$$

Un K-módulo n-graduado A es *coálgebra n-graduada* sobre K si existen K-homomorfismos

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A, \qquad \epsilon : A \longrightarrow K$$

tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

(1.8)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta \otimes 1"] \\ A \otimes A \arrow[r, "1 \otimes \Delta"] & A \otimes A \otimes A, \end{tikzcd}$$

(1.9)
$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\epsilon \otimes 1"] & & K \otimes A \arrow[dl, "\approx"] \\ & A \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\approx"] & \\ A \otimes A \arrow[rr, "1 \otimes \epsilon"] & & A \otimes K. \end{tikzcd}$$

Los homomorfismos Δ y ϵ se llaman comultiplicación y counidad de la coálgebra A respectivamente.

El producto tensorial $A \otimes B$ de dos coálgebras n-graduadas sobre K, es la coálgebra n-graduada con la comultiplicación

$$A \otimes B \xrightarrow{\Delta_A \otimes \Delta_B} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} A \otimes B \otimes A \otimes B$$

y la counidad

$$A \otimes B \xrightarrow{\epsilon_A \otimes \epsilon_B} K \otimes K \approx K.$$

Un homomorfismo $f : A \to B$ entre coálgebras n-graduadas es un K-homomorfismo tal que los diagramas

(1.10)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[d, "f"] & A \otimes A \arrow[d, "f \otimes f"] \\ B \arrow[r, "\Delta_B"] & B \otimes B \end{tikzcd}$$

(1.11)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\epsilon_A"'] & & B \arrow[dl, "\epsilon_B"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

son conmutativos.

También K es coálgebra n-graduada al definir $\Delta : K \rightarrow K \otimes K$, $\epsilon : K \rightarrow K$ con $\Delta(x) = 1 \otimes X$ y $\epsilon(x) = x$.

Una *aumentación* de una coálgebra n-graduada A sobre K es un homomorfismo $\eta : K \rightarrow A$ entre coálgebras.

Un K-módulo n-graduado A es *álgebra de Hopf n-graduada sobre* K si existen K-homomorfismos

$$\begin{aligned} &\varphi : A \otimes A \rightarrow A, \qquad && \eta : K \rightarrow A \\ &\Delta : A \rightarrow A \otimes A, && \epsilon : A \rightarrow K \end{aligned} \tag{1.12}$$

tales que

(a) (A, φ, η) es un álgebra n-graduada sobre K con aumentación ϵ,

(b) (A, Δ, ϵ) es una coálgebra n-graduada sobre K con aumentación η, y

(c) el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta \otimes \Delta"'] & A \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A \\ A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "1 \otimes T \otimes 1"] & & A \otimes A \otimes A \otimes A. \arrow[u, "\varphi \otimes \varphi"'] \end{tikzcd} \tag{1.13}$$

Fácilmente se deduce que Δ y φ son, respectivamente, homomorfismos entre álgebras y coálgebras con aumentación.

Un álgebra de Hopf n-graduada A es *conexa* si $\eta_0 : K_0 \rightarrow A_0$ es un isomorfismo.

El producto tensorial $M \otimes N$ de dos A-módulos n-graduados M y N, donde A es un álgebra de Hopf n-graduada sobre K, es el A-módulo n-graduado, con la acción

$$\lambda_{M \otimes N} : A \otimes M \otimes N \xrightarrow{\Delta \otimes 1 \otimes 1} A \otimes A \otimes M \otimes N \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} A \otimes M \otimes A \otimes N \xrightarrow{\lambda_M \otimes \lambda_N} M \otimes N.$$

M es un *álgebra sobre un álgebra de Hopf n-graduada* A si M es un A-módulo n-graduado y existe una multiplicación $\varphi_M : M \otimes M \rightarrow M$ que es un homomorfismo entre A-módulos n-graduados, esto es, que es conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes M \otimes M \arrow[r, "1 \otimes \varphi_M"] \arrow[d, "\lambda_{M \otimes M}"] & A \otimes M \arrow[d, "\lambda_M"] \\ M \otimes M \arrow[r, "\varphi_M"] & M. \end{tikzcd} \tag{1.14}$$

2. Sumas directas de álgebras

En esta sección, como una aplicación del §1, construiremos álgebras de Hopf n-graduadas. El anillo $K^n = K \oplus \cdots \oplus K$ que se obtiene tomando la suma directa de n copias de K se considera un K^n-módulo n-graduado donde $K_0{}^n = K_{(0,\ldots,0)}{}^n = K^n$ y $K_\beta{}^n = 0$ para toda $\beta \in Z_{(n)}{}^+$ con $\beta \neq 0$. Con cada K-módulo graduado $M = \{M_i\}$ asociaremos un K^n-módulo n-graduado

$$M^n = \{M_\alpha{}^n \mid \alpha \in Z_{(n)}{}^+\},$$

donde, para $\alpha = (t_1, \cdots, t_n)$, $M_\alpha{}^n = M_{t_1} \oplus \cdots \oplus M_{t_n}$ es la suma directa y la acción de K^n en M^n está definida por

$$[K_1, \cdots, K_n]\cdot[x_1, \cdots, x_n] = [K_1x_1, \cdots, K_nx_n].$$

Un homomorfismo entre K-módulos graduados $f : M \to N$ induce un homomorfismo $f_n : M^n \to N^n$ definido por

$$f_\alpha[x_1, \cdots, x_n] = [f_{t_1}(x_1), \cdots, f_{t_n}(x_n)], \qquad \alpha = (t_1, \cdots, t_n).$$

Ahora consideremos relaciones entre el producto tensorial y la suma directa. Si M y N son K-módulos graduados, el producto tensorial $M^n \oplus N^n$ es un K^n-módulo n-graduado y si $f : M \to P$, $g : N \to Q$ son K-homomorfismos, $f_n \otimes g_n : M^n \otimes N^n \to P^n \otimes Q^n$ es un homomorfismo entre K^n-módulos n-graduados.

Con el objeto de simplificar las demostraciones de resultados posteriores establecemos la siguiente

PROPOSICIÓN 2.1. *Todo diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ P & \xrightarrow{g} & Q \end{array}$$

de K-módulos graduados y homomorfismos induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{f_n} & N^n \\ \downarrow{\scriptstyle h_n} & & \downarrow{\scriptstyle k_n} \\ P^n & \xrightarrow{g_n} & Q^n \end{array}$$

de K^n-módulos n-graduados y homomorfismos.

La demostración es trivial.

Con el propósito de comparar los módulos n-graduados $(M \otimes N)^n$ y $M^n \otimes N^n$ definimos los homomorfismos,

$$\tau : (M \otimes N)^n \to M^n \otimes N^n \quad \text{y} \quad \sigma : M^n \otimes N^n \to (M \otimes N)^n.$$

Definimos en los generadores,

$$\tau[x_1 \otimes x_1', \cdots, x_n \otimes x_n'] = \textstyle\sum_1^n [0, \cdots, x_i, \cdots, 0] \otimes [0, \cdots, x_i', \cdots, 0],$$

$$\sigma([x_1, \cdots, x_n] \otimes [y_1, \cdots, y_n]) = [x_1 \otimes y_1, \cdots, x_n \otimes y_n]$$

y extendemos su definición por linealidad.

La siguiente proposición, cuya demostración es simple a partir de las definiciones, establece una relación entre estos homomorfismos.

PROPOSICIÓN 2.2. *Sean* $f : M \longrightarrow P$, $g : N \longrightarrow Q$, *K-homomorfismos. Si* $(f \otimes g)_n : (M \otimes N)^n \longrightarrow (P \otimes Q)^n$, $f_n \otimes g_n : M^n \otimes N^n \longrightarrow P^n \otimes Q^n$ *son los* K^n*-homomorfismos inducidos, se tiene*

$$\tau(f \otimes g)_n = (f_n \otimes g_n)\tau, \qquad \sigma(f_n \otimes g_n) = (f \otimes g)_n\sigma \quad \text{y} \quad \sigma(f_n \otimes g_n)\tau = (f \otimes g)_n .$$

Las proposiciones y corolarios que siguen en el resto de esta sección, se deducen fácilmente utilizando 2.1 y 2.2, y por esta razón sus demostraciones se omiten.

PROPOSICIÓN 2.3. *Si* M *es un álgebra graduada sobre* K *con multiplicación* $\varphi : M \otimes M \longrightarrow M$ *y unidad* $\eta : K \longrightarrow M$, *entonces, el* K^n*-módulo n-graduado* M^n *también es un álgebra n-graduada sobre* K^n *con multiplicación* $\bar{\varphi}_n : M^n \otimes M^n \longrightarrow M^n$, *dada por la composición*

$$M^n \otimes M^n \xrightarrow{\sigma} (M \otimes M)^n \xrightarrow{\varphi_n} M^n,$$

y unidad $\eta_n : K^n \longrightarrow M^n$, *definida por*

$$\eta_n[k_1, \cdots, k_n] = [\eta(k_1), \cdots, \eta(k_n)].$$

COROLARIO 2.4. *Si* M *es un álgebra graduada conexa sobre* K, *también* M^n *es álgebra n-graduada conexa sobre* K^n.

Construimos la transformación $\bar{T}_n : M^n \otimes N^n \longrightarrow N^n \otimes M^n$, definida como la composición

$$M^n \otimes N^n \xrightarrow{\sigma} (M \otimes N)^n \xrightarrow{T_n} (N \otimes M)^n \xrightarrow{\tau} N^n \otimes M^n,$$

donde $T : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$ está dada por

$$T_r(a \otimes b) = (-1)^{pq} b \otimes a,$$

para $a \in M_p$, $b \in N_q$ y $p + q = r$.

PROPOSICIÓN 2.5. *El producto tensorial* $M^n \otimes N^n$ *asociado a dos álgebras graduadas* M *y* N *sobre* K, *es un álgebra n-graduada sobre* K^n *con multiplicación dada por la composición*

$$M^n \otimes N^n \otimes M^n \otimes N^n \xrightarrow{1_n \otimes \bar{T}_n \otimes 1_n} M^n \otimes M^n \otimes N^n \otimes N^n \xrightarrow{\bar{\varphi}_n \otimes \bar{\varphi}_n} M^n \otimes N^n$$

y unidad por

$$K^n \approx (K \otimes K)^n \xrightarrow{(\eta \otimes \eta)_n} (M \otimes N)^n \xrightarrow{\tau} M^n \otimes N^n.$$

PROPOSICIÓN 2.6. *Un homomorfismo* $f : M \longrightarrow N$ *entre álgebras graduadas sobre* K *induce un homomorfismo* $f_n : M^n \longrightarrow N^n$ *entre álgebras n-graduadas sobre* K^n.

COROLARIO 2.7. *Si* M *es un álgebra graduada con aumentación* $\epsilon : M \longrightarrow K$, *también* M^n *tiene aumentación* $\epsilon_n : M^n \longrightarrow K^n$.

PROPOSICIÓN 2.8. *Si M es coálgebra sobre K con comultiplicación Δ y counidad ϵ, el K^n-módulo n-graduado M^n resulta también coálgebra n-graduada sobre K^n con comultiplicación $\bar{\Delta}_n : M^n \to M^n \otimes M^n$ dada por $M^n \xrightarrow{\Delta_n} (M \otimes M)^n \xrightarrow{\tau} M^n \otimes M^n$ y counidad $\epsilon_n : M^n \to K^n$ inducida por ϵ.*

PROPOSICIÓN 2.9. *El producto tensorial $M^n \otimes N^n$, donde M y N son dos coálgebras graduadas sobre K, es una coálgebra n-graduada sobre K^n con comultiplicación*

$$M^n \otimes N^n \xrightarrow{\bar{\Delta}_n \otimes \bar{\Delta}_n} M^n \otimes M^n \otimes N^n \otimes N^n \xrightarrow{1_n \otimes \bar{T}_n \otimes 1_n} M^n \otimes N^n \otimes M^n \otimes N^n$$

y counidad

$$M^n \otimes N^n \xrightarrow{\sigma} (M \otimes N)^n \xrightarrow{(\epsilon \otimes \epsilon)_n} (K \otimes K)^n \approx K^n.$$

PROPOSICIÓN 2.10. *Un homomorfismo $f : M \to N$ entre coálgebras graduadas induce un homomorfismo $f_n : M^n \to N^n$ entre coálgebras n-graduadas sobre K^n.*

COROLARIO 2.11. *Si M es coálgebra graduada sobre K con aumentación $\eta : K \to M$, entonces, la coálgebra n-graduada M^n tiene aumentación $\eta_n : K^n \to M^n$.*

PROPOSICIÓN 2.12. *Si A es un álgebra de Hopf sobre K con multiplicación $\varphi : A \otimes A \to A$, unidad $\eta : K \to A$, comultiplicación $\Delta : A \to A \otimes A$ y counidad $\epsilon : A \to K$, entonces, A^n es un álgebra de Hopf n-graduada sobre K^n con multiplicación $\bar{\varphi}_n : A^n \otimes A^n \to A^n$, unidad $\eta_n : K^n \to A^n$, comultiplicación $\bar{\Delta}_n : A^n \to A^n \otimes A^n$ y counidad $\epsilon_n : A^n \to K^n$.*

PROPOSICIÓN 2.13. *Si M es un A-módulo, donde A es un álgebra graduada sobre K, con la acción $\lambda_M : A \otimes M \to M$, entonces, el K^n-módulo n-graduado M^n es un A^n-módulo con la acción*

$$\bar{\lambda}_n : A^n \otimes M^n \xrightarrow{\sigma} (A \otimes M)^n \xrightarrow{\lambda_n} M^n.$$

PROPOSICIÓN 2.14. *Un homomorfismo $f : M \to N$ entre A-módulos induce el homomorfismo $f_n : M^n \to N^n$ entre A^n-módulos.*

PROPOSICIÓN 2.15. *Sean M un A-módulo y N un B-módulo, donde A y B son álgebras graduadas sobre K. Entonces, el producto tensorial $M^n \otimes N^n$ es un $A^n \otimes B^n$-módulo con la acción definida por*

$$A^n \otimes B^n \otimes M^n \otimes N^n \xrightarrow{1_n \otimes \bar{T}_n \otimes 1_n} A^n \otimes M^n \otimes B^n \otimes N^n \xrightarrow{\bar{\lambda}_n \otimes \bar{\lambda}_n} M^n \otimes N^n.$$

PROPOSICIÓN 2.16. *Si M y N son dos A-módulos, donde A es álgebra de Hopf sobre K, el producto tensorial $M^n \otimes N^n$ es también A^n-módulo, con la acción dada por*

$$A^n \otimes M^n \otimes N^n \xrightarrow{\bar{\Delta}_n \otimes 1_n \otimes 1_n} A^n \otimes A^n \otimes M^n \otimes N^n \xrightarrow{1_n \otimes \bar{T}_n \otimes 1_n} A^n \otimes M^n \otimes A^n \otimes N^n \xrightarrow{\bar{\lambda}_n \otimes \bar{\lambda}_n} M^n \otimes N^n.$$

PROPOSICIÓN 2.17. *Si M es un álgebra sobre un álgebra de Hopf A, entonces, M^n es álgebra n-graduada sobre el álgebra de Hopf A^n.*

3. Acciones inducidas en la suma directa

En esta sección definiremos dos transformaciones Γ y Λ que desempeñan un papel importante en el resto del trabajo. Si A y M son K-módulos graduados, usando el K^n-módulo n-graduado $A^n \otimes M^n$ construiremos $\mathfrak{D}(A^n \otimes M^n)$ módulo graduado donde $\mathfrak{D}(A^n \otimes M^n)_r = (A^n \otimes M^n)_\gamma$ para $\gamma = (r, \cdots, r)$.

Si suponemos que M es un A-módulo, donde A es álgebra graduada sobre K, con acción $\lambda : A \otimes M \to M$, definimos la transformación

$$\Gamma : \mathfrak{D}(A^n \otimes M^n)_r \to M_r \tag{3.1}$$

mediante la composición

$$(A^n \otimes M^n)_\gamma \xrightarrow{\sigma} (A \otimes M)_\gamma{}^n \xrightarrow{\lambda_n} M_\gamma{}^n \xrightarrow{\Sigma} M_r,$$

donde, $\gamma = (r, \cdots, r)$ y Σ está dada por

$$\Sigma[x_1, \cdots, x_n] = x_1 + \cdots + x_n.$$

Esto es,

$$\Gamma([a_1, \cdots, a_n] \otimes [x_1, \cdots, x_n]) = \lambda(a_1 \otimes x_1) + \cdots + \lambda(a_n \otimes x_n).$$

Análogamente, la transformación

$$\Lambda : A_\alpha{}^n \otimes M_s \to M_\beta{}^n \tag{3.2}$$

donde, $\alpha = (r_1, \cdots, r_n)$ y $\beta = (r_1 + s, \cdots, r_n + s)$, se define como la composición

$$A_\alpha{}^n \otimes M_s \xrightarrow{\approx} (A_{r_1} \otimes M_s) \oplus \cdots \oplus (A_{r_n} \otimes M_s) \xrightarrow{\lambda_n} M_\beta{}^n.$$

Es decir,

$$\Lambda([a_1, \cdots, a_n] \otimes x) = [\lambda(a_1 \otimes x), \cdots, \lambda(a_n \otimes x)].$$

Si consideramos $a = [a_1, \cdots, a_n] \in A_\alpha{}^n$ un elemento fijo, donde $\alpha = (r_1, \cdots, r_n)$, entonces, las transformaciones Γ y Λ inducen

$$\Gamma_a : M_\gamma{}^n \to M_r, \qquad \gamma = (t_1, \cdots, t_n) \tag{3.3}$$

$$\Lambda_a : M_s \to M_\beta{}^n, \qquad \beta = (r_1 + s, \cdots, r_n + s) \tag{3.4}$$

definidas por

$$\Gamma_a[x_1, \cdots, x_n] = \lambda(a_1 \otimes x_1) + \cdots + \lambda(a_n \otimes x_n),$$

con $r_i + t_i = r$, $i = 1, \cdots, n$ y

$$\Lambda_a(x) = [\lambda(a_1 \otimes x), \cdots, \lambda(a_n \otimes x)].$$

4. El álgebra de Steenrod

El álgebra de Steenrod A sobre Z_2 es el álgebra graduada asociativa generada por $\mathrm{Sq}^0 = 1, \mathrm{Sq}^1, \cdots, \mathrm{Sq}^i, \cdots$, sujeta a las relaciones de Adem. El álgebra de Steenrod resulta álgebra de Hopf conexa donde la comultiplicación Δ está definida en los generadores por

$$\Delta(\mathrm{Sq}^k) = \textstyle\sum_{i=0}^{k} \mathrm{Sq}^i \otimes \mathrm{Sq}^{k-i}. \tag{4.1}$$

Luego, se puede definir el automorfismo conjugación $c : A \to A$ (ver [16]) con las propiedades siguientes:

$$(c \otimes c)T_\Delta = {}_\Delta c, \qquad c\varphi = \varphi(c \otimes c)T, \tag{4.2}$$

donde, φ es la multiplicación (composición) en A.

Para todo par (X, A) de espacios topológicos consideraremos cohomología singular con coeficientes en Z_2, y siempre omitiremos escribir el grupo de coeficientes. El álgebra graduada $\{H^i(X, A)\}$ la designaremos por $H^*(X, A)$. La estructura multiplicativa en $H^*(X, A)$ la determina el producto $\smile$.

Para todo par (X, Y) de espacios topológicos, tenemos un triángulo exacto

$$\begin{tikzcd} H^*(X, Y) \arrow[rr, "j^*"] & & H^*(X) \arrow[dl, "i^*"] \\ & H^*(Y) \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

donde i^* y j^* son los Z_2-homomorfismos inducidos por las inclusiones $i : Y \subset X$, $j : X \subset (X, Y)$ y δ es la cofrontera. Se sigue de [15; p. 958] la

PROPOSICIÓN 4.3. *Los Z_2-módulos graduados $H^*(X, Y)$, $H^*(X)$ y $H^*(Y)$ son $H^*(X)$-módulos y j^*, i^*, δ son $H^*(X)$-homomorfismos.*

Como es bien sabido, $H^*(X, Y)$ es álgebra sobre el álgebra de Hopf A ([16]).

Sea λ la acción de $H^*(X)$ en $H^*(X, Y)$ según 4.3, y λ', λ'' las acciones de A, respectivamente, en $H^*(X)$, $H^*(X, Y)$. Definimos, la acción

$$\omega : A \otimes H^*(X) \otimes H^*(X, Y) \to H^*(X) \otimes H^*(X, Y),$$

por $\omega = (\lambda' \otimes \lambda'')(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta \otimes 1 \otimes 1)$. Fácilmente se comprueba que

$$\lambda\omega = \lambda'(1 \otimes \lambda),$$

lo que expresa una relación entre las estructuras de $H^*(X, Y)$ como A-módulo y $H^*(X)$-módulo.

5. Ciertas relaciones especiales

En general, un ideal bilateral M de un álgebra de Hopf B sobre K, con comultiplicación Δ, es ideal de Hopf si $\Delta(M) \subset M \otimes B + B \otimes M$. Si M es ideal de Hopf, B/M tiene estructura de álgebra de Hopf inducida por la de B ([16]).

Sea R el álgebra graduada asociativa y libre sobre Z_2, generada por $\mathrm{Sq}^0 = 1$, $\mathrm{Sq}^1, \cdots, \mathrm{Sq}^i, \cdots$. Con la comultiplicación Δ definida por (4.1) R es álgebra de Hopf conexa ([2]) y, por lo tanto, se puede definir el automorfismo conjugación $c : R \to R$. Si I es el ideal bilateral de R generado por las relaciones de Adem, entonces I es ideal de Hopf y R/I es el álgebra de Steenrod A.

Con cada par de elementos x, y de R consideramos el conmutador $[x, y] = xy + yx$. Esto define una transformación bilineal $[\ ,\ ] : R \times R \to R$. Análogamente, la transformación

$$[\ ,\ ] : (R \otimes R) \times (R \otimes R) \to R \otimes R$$

definida por $[x \otimes x', y \otimes y'] = xy \otimes x'y' + yx \otimes y'x'$ es bilineal y además

$$[x \otimes x', y \otimes y'] = [x, y] \otimes x'y' + yx \otimes [x', y']. \tag{5.1}$$

Con $\sigma_i = \mathrm{Sq}^i$, se demuestra fácilmente que los siguientes elementos de R son relaciones en A:

$$\rho_k = [\sigma_1, \sigma_k] + [\sigma_1, \sigma_2]\sigma_{k-2}, \qquad (k > 2). \tag{5.2}$$

Sea J el ideal bilateral de R generado por los elementos $\rho_3, \rho_4, \cdots, \rho_i, \cdots$. Demostraremos que J es ideal de Hopf, pero antes determinaremos la imagen de $[\sigma_i, \sigma_k]$ bajo la comultiplicación Δ.

Lema 5.3. *Se tiene que*

$$\Delta[\sigma_j, \sigma_k] = \textstyle\sum_{r=0}^{j} \sum_{s=0}^{k} ([\sigma_r, \sigma_s] \otimes \sigma_{j-r}\sigma_{k-s} + \sigma_{k-s}\sigma_{j-r} \otimes [\sigma_r, \sigma_s]).$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta[\sigma_j, \sigma_k] &= [\Delta(\sigma_j), \Delta(\sigma_k)] \\ &= [\textstyle\sum_{r=0}^{j} \sigma_{j-r} \otimes \sigma_r, \sum_{s=0}^{k} \sigma_{k-s} \otimes \sigma_s] \\ &= \textstyle\sum_{r=0}^{j} \sum_{s=0}^{k} [\sigma_{j-r} \otimes \sigma_r, \sigma_{k-s} \otimes \sigma_s]. \end{aligned}$$

Ahora usando (5.1) e intercambiando $j - r$ y $k - s$, respectivamente, por r y s en la primera parte de la suma, se obtiene 5.3.

Como consecuencia inmediata se obtiene el

Lema 5.4. *Se tiene que*

$$\Delta([\sigma_r, \sigma_s]\sigma_t) = \textstyle\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \sum_{n=0}^{t} ([\sigma_i, \sigma_j]\sigma_n \otimes \sigma_{r-i}\sigma_{s-j}\sigma_{t-n} \\ + \sigma_{s-j}\sigma_{r-i}\sigma_{t-n} \otimes [\sigma_i, \sigma_j]\sigma_n).$$

Teorema 5.5. *Se tiene que*

$$\Delta(\rho_k) = \textstyle\sum_{j=0}^{k-3} (\rho_{k-j} \otimes \sigma_j + \sigma_j \otimes \rho_{k-j}).$$

Demostración. Se sigue aplicando los Lemas 5.3 y 5.4.

Del Teorema 5.5 se sigue que $\Delta(J) \subset J \otimes R + R \otimes J$, por lo tanto, J es ideal de Hopf y $\hat{A} = R/J$ es álgebra de Hopf sobre Z_2.

Para las "relaciones duales"

$$c(\rho_t) = [\sigma_1, c(\sigma_t)] + c(\sigma_{t-2})[\sigma_1, \sigma_2], \qquad (t > 2)$$

del Teorema 5.5 y haciendo uso de (4.2) obtenemos

$$(5.6) \qquad \Delta c(\rho_k) = \textstyle\sum_{j=0}^{k-3} (c(\sigma_j) \otimes c(\rho_{k-j}) + c(\rho_{k-j}) \otimes c(\sigma_j)).$$

6. Las transformaciones Λ y Γ

Aplicaremos las construcciones dadas en §2 y §3 a los resultados obtenidos en en §4. De los resultados establecidos en §4 se deducen las siguientes:

PROPOSICIÓN 6.1. *Para todo par (X, Y) de espacios topológicos, la suma directa de n copias de $H^*(X, Y)$, que denotamos con $H^*(X, Y)^n$ es álgebra sobre Z_2^n. Además, los Z_2^n-módulos n-graduados $H^*(X, Y)^n$, $H^*(X)^n$ y $H^*(Y)^n$ son $H^*(X)^n$-módulos y los homomorfismos inducidos en la suma directa, que denotamos por j_n^*, i_n^*, δ_n son $H^*(X)^n$-homomorfismos.*

PROPOSICIÓN 6.2. *Para el álgebra de Steenrod A sobre Z_2, el Z_2^n-módulo A^n es álgebra de Hopf conexa y para todo par (X, Y) de espacios, $H^*(X, Y)^n$ es A^n-módulo y también puede considerarse álgebra n-graduada sobre A^n. Además, $\mathfrak{D}(A^n \otimes H^*(X, Y)^n)$ resulta un Z_2^n-módulo graduado.*

Sean

$$(6.3) \qquad \begin{aligned} \Lambda &: A_\alpha^n \otimes H^r(X, Y) \to H^*(X, Y)_\mu^n, \\ \Gamma &: \mathfrak{D}(A^n \otimes H^*(X, Y)^n)_r \to H^r(X, Y), \end{aligned}$$

las transformaciones consideradas en §3, donde $\alpha = (t_1, \cdots, t_n)$, $\mu = (t_1 + r, \cdots, t_n + r)$. Tomando elementos fijos $a \in A_\alpha^n$, $b \in A_\gamma^n$, con

$$(6.4) \qquad a = [a_1, \cdots, a_n], \qquad b = [b_1, \cdots, b_n],$$

las transformaciones Λ, Γ inducen

$$(6.5) \qquad \begin{aligned} \Lambda_b &: H^r(X, Y) \to H^*(X, Y)_\theta^n, \\ \Gamma_a &: H^*(X, Y)_\beta^n \to H^r(X, Y) \end{aligned}$$

donde $\beta = (r_1, \cdots, r_n)$, $\gamma = (s_1, \cdots, s_n)$, $\theta = (s_1 + r, \cdots, s_n + r)$ y $\beta + \alpha = (r, \cdots, r)$. Explícitamente,

$$\Lambda_b(x) = [b_1x, \cdots, b_nx], \qquad \Gamma_a[x_1, \cdots, x_n] = \textstyle\sum_1^n a_ix_i.$$

Sean φ y λ, respectivamente, la multiplicación y la acción de A en $H^*(X, Y)$. Sea

$$\Psi : A_\alpha^n \otimes H^r(X, Y) \otimes H^s(X, Y) \to (H^*(X, Y) \otimes H^*(X, Y))_\beta^n.$$

Con $\beta = (t_1 + r + s, \cdots, t_n + r + s)$, la transformación definida por la composición

$$\Psi = (\lambda \otimes \lambda)_n(1 \otimes T \otimes 1)_n j(\Delta_n \otimes 1 \otimes 1),$$

donde j es el isomorfismo que distribuye el producto tensorial en la suma directa. Fácilmente se comprueba que se tiene

$$(6.6) \qquad \varphi_n \Psi = \Lambda(1_n \otimes \varphi).$$

7. Operaciones funcionales

Cada elemento $\theta \in A$ de grado s, determina una operación cohomológica estable $\theta : H^q(Y) \to H^{q+s}(Y)$. Dada una transformación contínua $f : X \to Y$, sea $u \in H^q(Y)$ tal que $f^* u = 0$ y $\theta(u) = 0$. Con estas hipótesis se define la operación funcional (ver [15])

$$(7.1) \qquad \theta_f(u) \in H^{q+s-1}(X)/[\theta H^{q-1}(X) + f^* H^{q+s-1}(Y)].$$

Ahora, supongamos que θ es un elemento del álgebra de Steenrod A de grado $r + 1$ y que

$$(7.2) \qquad \theta = \textstyle\sum_1^n \alpha_i \beta_i$$

con α_i, β_i elementos de A de grados, respectivamente, s_i, t_i, tal que $r + 1 = s_i + t_i$ para cada i. Haciendo $a = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ y $b = [\beta_1, \cdots, \beta_n]$ según (6.5) resulta que

$$(7.3) \qquad \theta = \Gamma_a \Lambda_b .$$

Dada una transformación contínua $f : X \to K$ y $u \in \oplus_{i=1}^n H^{q_i}(K)$ tal que $f^* u = 0$, $\Gamma_a(u) = 0$, se puede definir (ver [3]) la operación funcional

$$(7.4) \qquad \Gamma_{af}(u) \in H^{q+r}(X)/[f^* H^{q+r}(K) + \textstyle\sum_1^n \alpha_i H^{q_i-1}(X)],$$

donde $q_i = q + t_i$.

Análogamente, con $v \in H^q(K)$ tal que $f^* \Lambda_b(v) = 0$, $\Gamma_a \Lambda_b(v) = 0$, se obtiene $\Gamma_{af} \Lambda_b(v)$.

Con el objeto de substituir el producto de dos transformaciones contínuas por una inclusión, determinaremos el cilindro de tal producto. Sean $f_i : X_i \to Y_i$ (i = 1, 2) transformaciones contínuas y $(Y_1 \times Y_2)_{f_1 \times f_2}$ el cilindro de la transformación $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ [15; p. 966]. Los elementos de este cilindro son de la forma

$$(x_1, x_2, t), \quad 0 \leq t < 1, \quad (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2,$$
$$(f_1^{-1}(y_1) \times f_2^{-1}(y_2) \times 1) \cup (y_1, y_2), \qquad (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 .$$

Proposición 7.5. *Los pares* $((Y_1 \times Y_2(_{f_1 \times f_2}, X_1 \times X_2)$ *y* $(Y_{1f_1} \times Y_{2f_2}, X_1 \times X_2)$ *son del mismo tipo de homotopía.*

Demostración. Definimos las transformaciones contínuas g, h

$$X_1 \times X_2 \times I \cup Y_1 \times Y_2 \underset{h}{\overset{g}{\rightleftarrows}} (X_1 \times I \cup Y_1) \times (X_2 \times I \cup Y_2)$$

por

$$g(x_1, x_2, t) = (x_1, t, x_2, t), \qquad g(y_1, y_2) = (y_1, y_2),$$
$$h(x_1, s, x_2, t) = (x_1, x_2, 1 - (1 - s)(1 - t)), \qquad h(y_1, y_2) = (y_1, y_2),$$
$$h(x_1, s, y_2) = (f_1(x_1), y_2), \qquad h(y_1, x_2, t) = (y_1, f_2(x_2)).$$

Estas transformaciones respetan las respectivas identificaciones, por lo tanto, inducen las transformaciones contínuas

$$((Y_1 \times Y_2)_{f_1 \times f_2}, X_1 \times X_2) \underset{h'}{\overset{g'}{\rightleftarrows}} (Y_{1f_1} \times Y_{2f_2}, X_1 \times X_2).$$

Ahora construimos una transformación contínua

$$F : ((Y_1 \times Y_2)_{f_1 \times f_2} \times I, X_1 \times X_2 \times I) \to ((Y_1 \times Y_2)_{f_1 \times f_2}, X_1 \times X_2)$$

como sigue:

$$F(x_1, x_2, t, r) = (x_1, x_2, t + r(t - t^2)), \qquad 0 \leq t < 1$$
$$F(y_1, y_2, r) = (y_1, y_2), \qquad t = 1.$$

Observamos que $0 \leq t < 1$ implica que $0 \leq t + r(t - t^2) < 1$ y se comprueba fácilmente que F es una homotopía entre la identidad y $h'g'$. Análogamente, definimos la transformación contínua

$$G : (Y_{1f_1} \times Y_{2f_2} \times I, X_1 \times X_2 \times I) \to (Y_{1f_1} \times Y_{2f_2}, X_1 \times X_2)$$

con

$$G(x_1, s, x_2, t, r) = (x_1, s + r(t - st), x_2, t + r(s - st)), \quad 0 \leq s < 1, 0 \leq t < 1,$$
$$G(y_1, x_2, t, r) = (y_1, x_2, r + t(1 - r)), \qquad s = 1, \qquad 0 \leq t < 1,$$
$$G(x_1, s, y_2, r) = (x_1, r + (1 - r)s, y_2), \qquad 0 \leq s < 1, \qquad t = 1,$$
$$G(y_1, y_2) = (y_1, y_2).$$

Esta transformación es también una homotopía entre la identidad y $g'h'$. Por consiguiente el par g', h' es una equivalencia homotópica y esto termina la demostración de 7.5.

La acción natural del producto tensorial $A \otimes A$, donde A es el álgebra de Steenrod, en el anillo de cohomología $H^*(X \times Y)$ del producto de dos espacios X, Y, está definida por $(\theta \otimes \nu) \cdot (u \times v) = \theta u \times \nu v$, donde θ y ν son elementos de A y x es el producto cruz (ver [16]). Sea $f \times g : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ una transformación contínua y supongamos que $u \in H^m(Y_1 \times Y_2)$ es tal que $(f \times g)^* u = 0$, $(\theta \otimes \nu) u = 0$, donde $\theta \in A_r$, $\nu \in A_s$. Con estas hipótesis se define la operación funcional $(\theta \otimes \nu)_{f \times g}(u)$ con indeterminación

(7.6) $$(f \times g)^* H^{m+r+s-1}(Y_1 \times Y_2) + (\theta \otimes \nu) H^{m-1}(X_1 \times X_2).$$

Siendo los grupos de cohomología espacios vectoriales sobre Z_2, usando las fórmulas de Künneth, la condición $(f\times g)^*u = 0$ puede expresarse mediante los núcleos de f^* y g^*. Explícitamente, existe una descomposición de u, de la forma

$$u = \textstyle\sum_i a_i \times b_i + \sum_j c_j \times d_j,$$

donde $a_i \in H^{p_i}(Y_1), b_i \in H^{m-p_i}(Y_2), c_j \in H^{q_j}(Y_1), d_j \in H^{m-q_j}(Y_2) (0 \leq p_i \leq m, 0 \leq q_j \leq m)$ con $f^*a_i = 0, g^*d_j = 0$. Usando esta descomposición, construiremos otra operación funcional que también denotamos con $(\theta \otimes \nu)_{f\times g}(u)$, que reduce su indeterminación de (7.6) a la siguiente:

(7.7) $\quad Q(\theta \otimes \nu, X_1\times X_2) = \sum_i \theta H^{p_i-1}(X_1)\times g^*\nu b_i + \sum_j f^*\theta c_j \times \nu H^{m-q_j-1}(X_2).$

La construcción de esta operación se indica a continuación. Considerando la transformación $f\times g$ como una inclusión, con las sucesiones exactas de cohomología de los pares $(Y_1\times Y_2, X_1\times X_2)$, (Y_1, X_1), (Y_2, X_2) formamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^*(X_1\times Y_2) & \xrightarrow{\delta_1\times 1} & H^*(Y_1\times Y_2, X_1\times Y_2) & \xrightarrow{(j_1\times 1)^*} & H^*Y_1\times Y_2 & \xrightarrow{(f\times 1)^*} & H^*(X_1\times X_2) \\
\downarrow{\scriptstyle (1\times g)^*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle (1\times g)^*} \\
H^*(X_1\times X_2) & \xrightarrow{\delta} & H^*(Y_1\times Y_2, X_1\times X_2) & \xrightarrow{j^*} & H^*(Y_1\times Y_2) & \xrightarrow{(f\times g)^*} & H^*(X_1\times X_2) \\
\uparrow{\scriptstyle (f\times 1)^*} & & \uparrow{\scriptstyle \pi_2^*} & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle (f\times 1)^*} \\
H^*(Y_1\times X_2) & \xrightarrow{1\times\delta_2} & H^*(Y_1\times Y_2, Y_1\times X_2) & \xrightarrow{(1\times j_2)^*} & H^*(Y_1\times Y_2) & \xrightarrow{(1\times g)^*} & H^*(Y_1\times X_2)
\end{array}$$

(7.8)

donde, π_1^*, π_2^* son, respectivamente, los homomorfismos inducidos por las inclusiones de $(Y_1\times Y_2, X_1\times X_2)$ en $(Y_1\times Y_2, X_1\times Y_2)$ y en $(Y_1\times Y_2, Y_1\times X_2)$. Como $f^*a_i = 0$ y $g^*d_j = 0$, existen elementos w_i y w_j', respectivamente, de $H^{p_i}(Y_1, X_1)$ y $H^{m-q_j}(Y_2, X_2)$ tales que $j_1^*w_i = a_i$, $j_2^*w_j' = d_j$. De la conmutatividad del diagrama (7.8) se sigue que el elemento $w = \pi_1^*(\sum_i w_i\times b_i) + \pi_2^*(\sum_j c_j\times w_j')$ de $H^m(Y_1\times Y_2, X_1\times X_2)$ es tal que $j^*w = u$, además $j^*(\pi_1^*(\sum_i \theta w_i\times \nu b_i) + \pi_2^*(\sum_j \theta c_j\times \nu w_j')) = 0$, por lo tanto, existe un elemento $z \in H^{m+r+s-1}(X_1\times X_2)$ tal que

$$\delta z = (\textstyle\sum_i \theta w_i \times \nu b_i) + (\sum_j \theta c_j \times \nu w_j'),$$

el que tomamos como un representante de $(\theta \otimes \nu)_{f\times g}(u)$. Este elemento está determinado en forma única módulo elementos de $Q(\theta \otimes \nu, X_1\times X_2)$.

Utilizando la construcción dada se demuestra que esta operación funcional es natural.

Como en (7.2) supongamos que $\theta = \sum_1^n \alpha_i\beta_i$ es un elemento de A de grado $r+1$, luego se tiene $\Delta(\theta) = \sum_1^n \Delta(\alpha_i)\Delta(\beta_i)$. Denotando con a' y b', respectivamente, los elementos $[\Delta(\alpha_1), \cdots, \Delta(\alpha_n)]$ y $[\Delta(\beta_1), \cdots, \Delta(\beta_n)]$ de A^n se obtiene (ver 6.5)

(7.9) $$\Delta(\theta) = \Gamma_{a'}\Lambda_{b'},$$

donde, $\Delta(\theta)$ se interpreta como la composición de las operaciones

$$H^m(X\times Y) \xrightarrow{\Lambda_{b'}} \oplus_{i=1}^n H^{m_i}(X\times Y) \xrightarrow{\Gamma_{a'}} H^{m+r+1}(X\times Y),$$

con $m_i = m + t_i$.

Consideraremos operaciones funcionales de la forma $\Gamma_{a'}(f\times g)\Lambda_{b'}(w\times z)$. Dada una transformación contínua $f\times g : X_1\times X_2 \to Y_1\times Y_2$, sean $w \in H^p(Y_1)$ y $z\in H^{m-p}(Y_2)$ tales que $\Gamma_{a'}\Lambda_{b'}(w\times z) = 0$, $(f\times g)^*\Lambda_{b'}(w\times z) = 0$. Expresamos esta última condición, para cada i, en la forma

$$\Delta(\beta_i)(w\times z) = \sum_K \xi_{iK}(w)\times\xi_{iK}'(z) + \sum_t \sigma_{it}(w)\times\sigma_{it}'(z),$$

con

$$\xi_{iK}(w),\, \sigma_{it}(w) \in H^*(Y_1) \quad \text{y} \quad \xi_{iK}'(z),\, \sigma_{it}'(z) \in H^*(Y_2),$$

donde, $f^*\xi_{iK}(w) = 0$, $g^*\sigma_{it}'(z) = 0$ para toda K, t. Aplicando la construcción anterior se obtiene

$$\Gamma_{a'(f\times g)}\Lambda_{b'}(w\times z) \in H^{m+r}(X_1\times X_2)/[(f\times g)^*H^{m+r}(Y_1\times Y_2) + Q(\Gamma_{a'}\Lambda_{b'}, X_1\times X_2)], \tag{7.10}$$

donde

$$Q(\Gamma_{a'}\Lambda_{b'}, X_1\times X_2) = \sum_{i=1}^n \{\Delta(\alpha_i)\cdot(\sum_K H^{p_{iK}-1}(X_1)\times g^*\xi_{iK}'(z)) + \Delta(\alpha_i)\cdot(\sum_t f^*\sigma_{it}(w)\times H^{q_{it}-1}(X_2))\},$$

p_{iK} y q_{it} son, respectivamente, las dimensiones de $\xi_{iK}(w)$ y $\sigma_{it}'(z)$.

Sean $w \in H^p(Y_1)$, $z \in H^{m-p}(Y_2)$ tales que $(f\times g)^*\Lambda_b(w\times z) = 0$ y $\Gamma_a\Lambda_b(w\times z) = 0$. Esto implica que $(f\times g)^*\Lambda_{b'}(w\times z) = 0$ y $\Gamma_{a'}\Lambda_{b'}(w\times z) = 0$. Fácilmente se demuestra que

$$\Gamma_{a(f\times g)}\Lambda_b(w\times z) = \Gamma_{a'(f\times g)}\Lambda_{b'}(w\times z), \tag{7.11}$$

donde la indeterminación común es la del primer miembro, y la segunda operación funcional se construye como en (7.10).

8. Fórmulas de producto para operaciones funcionales

Consideremos las relaciones introducidas en §5,

$$\rho_k = \mathrm{Sq}^1\,\mathrm{Sq}^k + \mathrm{Sq}^k\,\mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^{0,1}\,\mathrm{Sq}^{k-2},$$
$$c(\rho_k) = \mathrm{Sq}^1\,c(\mathrm{Sq}^k) + c(\mathrm{Sq}^k)\,\mathrm{Sq}^1 + c(\mathrm{Sq}^{k-2})\,\mathrm{Sq}^{0,1}$$

donde

$$\mathrm{Sq}^{0,1} = \mathrm{Sq}^1\,\mathrm{Sq}^2 + \mathrm{Sq}^2\,\mathrm{Sq}^1 \text{ y } k > 2.$$

Con el fin de escribir estas relaciones en la forma (6.5) definimos los siguientes elementos de A^3:

$$\begin{aligned} a &= [\mathrm{Sq}^1, \mathrm{Sq}^k, \mathrm{Sq}^{0,1}], \\ b &= [\mathrm{Sq}^k, \mathrm{Sq}^1, \mathrm{Sq}^{k-2}], \\ c &= [\mathrm{Sq}^1, c(\mathrm{Sq}^k), c(\mathrm{Sq}^{k-2})], \\ d &= [c(\mathrm{Sq}^k), \mathrm{Sq}^1, \mathrm{Sq}^{0,1}]. \end{aligned}$$

Con estos elementos construimos Γ_a, Γ_c, Λ_b, Λ_d. Por conveniencia, en lo que sigue introducimos la siguiente notación

$$\Gamma_a = \Gamma^k, \qquad \Gamma_c = \Gamma_{\#}^k, \qquad \Lambda_b = \Lambda^k, \qquad \Lambda_d = \Lambda_{\#}^k.$$

Las relaciones, en esta notación, se expresan como sigue:

$$\rho_k = \Gamma^k\Lambda^k, \qquad c(\rho_k) = \Gamma_{\#}^k\Lambda_{\#}^k.$$

En forma análoga, definiendo los siguientes elementos de $(A \otimes A)^3$:

$$\begin{aligned} a' &= [\Delta(\mathrm{Sq}^1), \Delta(\mathrm{Sq}^k), \Delta(\mathrm{Sq}^{0,1})], \\ b' &= [\Delta(\mathrm{Sq}^k), \Delta(\mathrm{Sq}^1), \Delta(\mathrm{Sq}^{k-2})], \\ c' &= [\Delta(\mathrm{Sq}^1), \ \Delta c(\mathrm{Sq}^k), \ \Delta c(\mathrm{Sq}^{k-2})], \\ d' &= [\Delta c(\mathrm{Sq}^k), \Delta(\mathrm{Sq}^1), \Delta(\mathrm{Sq}^{0,1})], \end{aligned}$$

donde Δ es la comultiplicación de A, construimos $\Gamma_{a'}$, $\Gamma_{c'}$, $\Lambda_{b'}$, $\Lambda_{d'}$. Resulta,

$$\Delta(\rho_k) = \Gamma_{a'}\Lambda_{b'}, \qquad \Delta c(\rho_k) = \Gamma_{c'}\Lambda_{d'}.$$

Determinaremos fórmulas de producto para $\Gamma_{f\times g}{}^k\Lambda^k(u\times v)$ y $\Gamma_{\# f\times g}{}^k\Lambda_{\#}^k(u\times v)$. Sea M el conjunto de enteros i tal que $2 \leq i \leq k-3$, esto es, $M = \{2, \cdots, k-3\}$. Dada una transformación continua $f\times g : X\times Y \to K_1\times K_2$, supongamos que $u \in H^p(K_1)$ y $v \in H^q(K_2)$ son dos elementos que satisfacen las siguientes condiciones:

$$(8.1) \quad \begin{cases} \text{I)} & f^*\mathrm{Sq}^k u = 0, \quad f^*\mathrm{Sq}^{k-2} u = 0, \quad f^*\mathrm{Sq}^1 u = 0, \\ & g^*\mathrm{Sq}^k v = 0, \quad g^*\mathrm{Sq}^{k-2} v = 0, \quad g^*\mathrm{Sq}^1 v = 0. \\ \text{II)} & \text{Para toda} \quad i \in M \quad \text{se tiene que} \\ & f^*\mathrm{Sq}^{k-i} u = f^*\mathrm{Sq}^{k-2-i} u = 0, \quad \text{o bien que} \quad g^*\mathrm{Sq}^i v = 0. \\ \text{III)} & \text{Para toda} \quad j \in M \quad \text{se tiene que} \\ & g^*\mathrm{Sq}^{k-j} v = g^*\mathrm{Sq}^{k-2-j} v = 0, \quad \text{o bien que} \quad f^*\mathrm{Sq}^j u = 0. \end{cases}$$

De I) se sigue que están definidas $\Gamma_f{}^k\Lambda^k(u)$, $\Gamma_g{}^k\Lambda^k(v)$ y combinando I) bien con II) o III) se obtiene que $\Gamma_{f\times g}{}^k\Lambda^k(u\times v)$ está definida. Además de I) y II) resulta que para toda $i \in M$, está definida $\Gamma_f{}^{k-i}\Lambda^{k-i}(u)$ ó $g^*Sq^i v = 0$. Análogamente, de I) y III) se deduce que para $j \in M$, está definida $\Gamma_g{}^{k-j}\Lambda^{k-j}(v)$ ó $f^*\mathrm{Sq}^j u = 0$.

Sea $P \subset M$ todos los enteros que satisfacen la primera parte de la condición II). Esto es, si $i \in P$ se tiene $f^*\mathrm{Sq}^{k-i} u = f^*\mathrm{Sq}^{k-2-i} u = 0$. Análogamente, sea $S \subset M$

todos los enteros que satisfacen la primera parte de la condición III). Claramente, para toda $i \in P$ se tiene que $\Gamma_f^{k-i}\Lambda^{k-i}(u)$ está definida y para toda $j \in S$ también $\Gamma_g^{k-j}\Lambda^{k-j}(v)$ está definida.

Con $f\times g : X\times Y \to K_1\times K_2$ como antes, sea $w \in H^r(K_1\times K_2)$ tal que $\Gamma_{f\times g}{}^t\Lambda^t(w)$ está definida. Su indeterminación la denotamos como sigue:

$$\begin{aligned} Q^{t+r}(\Gamma_{f\times g}{}^t\Lambda^t) = (f\times g)^*H^{r+t}(K_1\times K_2) &+ \mathrm{Sq}^1 H^{r+t-1}(X\times Y) \\ &+ \mathrm{Sq}^t H^r(X\times Y) + \mathrm{Sq}^{0,1} H^{r+t-3}(X\times Y). \end{aligned}$$

Teorema 8.2. *Con las hipótesis* (8.1) *se tiene que*

$$\begin{aligned} \Gamma_{f\times g}{}^k\Lambda^k(u\times v) = {} & \Gamma_f{}^k\Lambda^k(u)\times g^*v + f^*u\times\Gamma_g{}^k\Lambda^k(v) \\ & + \textstyle\sum_{i\in P}\Gamma_f^{k-i}\Lambda^{k-i}(u)\times g^*\,\mathrm{Sq}^i v + \sum_{j\in S} f^*\,\mathrm{Sq}^j u\times\Gamma_g^{k-j}\Lambda^{k-j}(v) \end{aligned}$$

módulo la indeterminación siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{p+q+k} = {} & Q^{p+q+k}(\Gamma_{f\times g}{}^k\Lambda^k) + Q^{p+k}(\Gamma_f{}^k\Lambda^k)\times g^*v + f^*u\times Q^{q+k}(\Gamma_g{}^k\Lambda^k) \\ & + \textstyle\sum_{i\in P} Q^{p+k-i}(\Gamma_f^{k-i}\Lambda^{k-i})\times g^*\,\mathrm{Sq}^i v + \sum_{j\in S} f^*\,\mathrm{Sq}^i u\times Q^{q+k-j}(\Gamma_g^{k-j}\Lambda^{k-j}). \end{aligned}$$

Observación. Si para alguna $i \in P$ (para alguna $j \in S$) se tiene que $g^*\,\mathrm{Sq}^i v = 0$ (que $f^*\,\mathrm{Sq}^j u = 0$) el resultado anterior vale suprimiendo en la indeterminación total el término correspondiente. Esto se deduce fácilmente de la demostración del teorema.

Demostración. Combinando la condición I) bien con II) o con III) se obtiene que la operación $\Gamma_{a'(f\times g)}\Lambda_{b'}(u\times v)$, según la notación del §7, está definida. Además, por (7.11) resulta

$$\Gamma_{f\times g}{}^k\Lambda^k(u\times v) = \Gamma_{a'(f\times g)}\Lambda_{b'}(u\times v)$$

módulo $Q^{p+q+k}(\Gamma_{f\times g}{}^k\Lambda^k)$.

Para calcular el segundo miembro de la igualdad anterior, suponiendo que $f\times g$ es una inclusión, consideremos la sucesión exacta de sumas directas

$$\begin{aligned} [H^*(X\times Y)]^3 \xrightarrow{\ \delta\ } [H^*(K_1\times K_2\,,\, X\times Y)]^3 & \\ \xrightarrow{\ j^*\ } [H^*(K_1\times K_2)]^3 & \xrightarrow{(f\times g)^*} [H^*(X\times Y)]^3 \cdots \end{aligned}$$

inducida por la de cohomología del par $(K_1\times K_2\,,\, X\times Y)$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo (como en (7.8))

$$\begin{array}{ccccccc} H^*(X\times K_2) & \xrightarrow{\delta_1\times 1} & H^*(K_1\times K_2, X\times K_2) & \xrightarrow{(j_1\times 1)^*} & H^*(K_1\times K_2) & \xrightarrow{(f\times 1)^*} & H^*(X\times K_2) \\ \downarrow{\scriptstyle (1\times g)^*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1{}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle (1\times g)^*} \\ H^*(X\times Y) & \xrightarrow{\delta} & H^*(K_1\times K_2, X\times Y) & \xrightarrow{j^*} & H^*(K_1\times K_2) & \xrightarrow{(f\times g)^*} & H^*(X\times Y) \\ \uparrow{\scriptstyle (f\times 1)^*} & & \uparrow{\scriptstyle \pi_2{}^*} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle (f\times 1)^*} \\ H^*(K_1\times Y) & \xrightarrow{1\times\delta_2} & H^*(K_1\times K_2, K_1\times Y) & \xrightarrow{(1\times j_2)^*} & H^*(K_1\times K_2) & \xrightarrow{(1\times g)^*} & H^*(K_1\times Y), \end{array}$$

(8.3)

donde

$$j_1 : K_1 \to (K_1, X), \qquad j_2 : K_2 \to (K_2, Y), \qquad \pi_1 : (K_1 \times K_2, X \times Y)$$
$$\to (K_1, X) \times K_2, \qquad \pi_2 : (K_1 \times K_2, X \times Y) \to K_1 \times (K_2, Y)$$

son inclusiones y δ_1, δ_2, δ son los homomorfismos cofrontera.

Primero estableceremos algunos resultados auxiliares. Si $u \in H^*(K_1 \times K_2)$ es tal que $(f \times g)^* u = 0$, de la sucesión exacta del par $(K_1 \times K_2, X \times Y)$ se sigue que existe $w \in H^*(K_1 \times K_2, X \times Y)$ tal que $j^* w = u$. Este elemento w en general no es único, pero por conveniencia de notación lo designaremos con $w = \bar{u}$. Esto es, $\bar{u} \in H^*(K_1 \times K_2, X \times Y)$ es tal que $j^* \bar{u} = u$. Sean $u_i \in H^*(K_i)(i = 1, 2)$ tales que $f^* u_1 = 0$, $g^* u_2 = 0$. Se sigue de la conmutatividad del diagrama que, independiente de la elección de $\bar{u}_i$ $(i = 1, 2)$, se tiene la siguiente relación

$$\pi_1{}^*(\bar{u}_1 \times u_2) = \pi_2{}^*(u_1 \times \bar{u}_2) = \pi^*(\bar{u}_1 \times \bar{u}_2).$$

Si θ, ν son elementos del álgebra de Steenrod y ahora suponemos para las clases u_1, u_2 que $f^*\theta(u_1) = 0$, $g^*(u_2) = 0$, de lo anterior, claramente se sigue que

$$\pi_1{}^*(\nu\overline{\theta(u_1)} \times u_2) = \pi_1{}^*(\overline{\nu\theta(u_1)} \times u_2)$$
$$\pi_1{}^*(\overline{\nu\theta(u_1)} \times u_2) = \pi_1{}^*(\nu\overline{\theta(u_1)} \times u_2)$$

y un resultado análogo vale para la situación simétrica.

Por hipótesis $(f \times g)^* \Lambda_{b'}(u \times v) = 0$, luego $j^*\overline{\Lambda_{b'}(u \times v)} = \Lambda_{b'}(u \times v)$ y determinamos $z \in H^{p+q+k}(X \times Y)$ tal que $\delta z = \Gamma_{a'}\overline{\Lambda_{b'}(u \times v)}$. La clase de cohomología z es un representante de $\Gamma_{a'(f \times g)}\Lambda_{b'}(u \times v)$. Para establecer el teorema factorizaremos un representante tal, usando las hipótesis. Pero, con el objeto de simplificar la notación en la demostración volvemos a la convención $\sigma_i = \mathrm{Sq}^i$ establecida en §5.

Empezamos con

$$\Lambda_{b'}(u \times v) = [\Delta(\sigma_k)(u \times v), \Delta(\sigma_1)(u \times v), \Delta(\sigma_{k-2})(u \times v)].$$

Usando las fórmulas de Cartan, se obtiene

$$\Lambda_{b'}(u \times v) = \Lambda^k(u) \times v + u \times \Lambda^k(v) + W$$

donde

$$W = [\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{k-i}u \times \sigma_i v, 0, \sum_{i=1}^{k-3} \sigma_{k-2-i}u \times \sigma_i v].$$

Luego, podemos escribir

$$\overline{\Lambda_{b'}(u \times v)} = \pi_1{}^*(\overline{\Lambda^k(u)} \times v) + \pi_2{}^*(u \times \overline{\Lambda^k(v)}) + \bar{W}.$$

Sean $Q = M - P$, $T = M - S$, respectivamente, los complementos en M de P y S.

Utilizando las hipótesis (8.1) se factoriza $\bar{W}$ como sigue. La segunda componente es cero y la primera y tercera se pueden tomar como:

$$\pi_2^*(\sigma_{k-1}\, u\times\overline{\sigma_1 v}) + \pi_1^*(\overline{\sigma_1 u}\times\sigma_{k-1}\, v) + \pi_2^*(\sigma_2 u\times\overline{\sigma_{k-2}\, v})$$
$$+ \pi_1^*(\textstyle\sum_{i\in P} \overline{\sigma_{k-i}\, u}\times\sigma_i\, v) + \pi_2^*(\sum_{i\in Q}\sigma_{k-i}\, u\times\overline{\sigma_i\, v}) + \pi_2^*(\sigma_{k-3}\, u\times\overline{\sigma_1\, v})$$
$$+ \pi_1^*(\textstyle\sum_{i\in P} \overline{\sigma_{k-2-i}\, u}\times\sigma_i\, v) + \pi_2^*(\sum_{i\in Q}\sigma_{k-2-i}\, u\times\overline{\sigma_i\, v}).$$

Calculando $\Gamma_{a'}[\pi_1^*(\overline{\Lambda^k(u)}\times v) + \pi_2^*(u\times\overline{\Lambda^k(v)})]$ resulta,

$$\Gamma_{a'}[\pi_1^*(\overline{\Lambda^k(u)}\times v) + \pi_2^*(u\times\overline{\Lambda^k(v)})] = \pi_1^*[\Gamma^k\overline{\Lambda^k(u)}\times v) + \pi_2^*(u\times\Gamma^k\overline{\Lambda^k(v)}) + B$$

donde

$$\begin{aligned} B = {} & \pi_1^*\{\textstyle\sum_{i\in P}\sigma_{k-i}\,\overline{\sigma_1\, u}\times\sigma_i\, v + \sum_{i\in Q}\sigma_{k-i}\,\overline{\sigma_1\, u}\times\sigma_i\, v\} \\ & + \pi_2^*\{\textstyle\sum_{j\in S}\sigma_j\, u\times\sigma_{k-j}\,\overline{\sigma_1\, v} + \sum_{j\in T}\sigma_j\, u\times\sigma_{k-j}\,\overline{\sigma_1\, v}\} \\ & + \pi_1^*\{\overline{\sigma_k\, u}\times\sigma_1\, v + \overline{\sigma_1\, u}\times\sigma_k\, v + \sigma_{k-1}\,\overline{\sigma_1\, u}\times\sigma_1 v \\ & + \sigma_1\,\overline{\sigma_1\, u}\times\sigma_{k-1}\, v + \sigma_2\,\overline{\sigma_1\, u}\times\sigma_{k-2}\, v + \overline{\sigma_{k-2}\, u}\times\sigma_{0,1}\, v\} \\ & + \pi_2^*\{\sigma_1\, u\times\overline{\sigma_k\, v} + \sigma_k\, u\times\overline{\sigma_1\, v} + \sigma_1\, u\times\sigma_{k-1}\,\overline{\sigma_1\, v} \\ & + \sigma_{k-1}\, u\times\sigma_1\,\overline{\sigma_1\, v} + \sigma_{k-2}\, u\times\sigma_2\,\overline{\sigma_1\, v} + \sigma_{0,1}\, u\times\overline{\sigma_{k-2}\, v}\}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Por otra parte, se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{a'}(\bar W) = {} & \textstyle\sum_{i\in P}\pi_1^*(\sigma_1\,\overline{\sigma_{k-i}\, u}\times\sigma_i\, v) + \sum_{i\in P}\pi_1^*(\sigma_{0,1}\,\overline{\sigma_{k-2-i}\, u}\times\sigma_i\, v) \\ & + \textstyle\sum_{i\in Q}\pi_2^*(\sigma_1\,\sigma_{k-1}\, u\times\overline{\sigma_i\, v}) + \sum_{i\in Q}\pi_2^*(\sigma_{0,1}\,\sigma_{k-2-i}\, u\times\overline{\sigma_i\, v}) \\ & + \textstyle\sum_{i\in P}\pi_1^*(\overline{\sigma_{k-i}\, u}\times\sigma_1\,\sigma_i\, v) + \sum_{i\in Q}\pi_2^*(\sigma_{k-i}\, u\times\sigma_1\,\overline{\sigma_i\, v}) \\ & + \textstyle\sum_{i\in P}\pi_1^*(\overline{\sigma_{k-2-i}\, u}\times\sigma_{0,1}\,\sigma_i\, v) + \sum_{i\in Q}\pi_2^*(\sigma_{k-2-i}\, u\times\sigma_{0,1}\,\overline{\sigma_i\, v}) \\ & + \pi_2^*\{\sigma_1\,\sigma_{k-1}\, u\times\overline{\sigma_1\, v} + \sigma_{k-1}\, u\times\sigma_1\,\overline{\sigma_1\, v} + \sigma_1\,\sigma_2\, u\times\overline{\sigma_{k-2}\, v} \\ & + \sigma_2\, u\times\sigma_1\,\overline{\sigma_{k-2}\, v} + \sigma_{0,1}\,\sigma_{k-3}\, u\times\overline{\sigma_1\, v} + \sigma_{k-3}\, u\times\sigma_{0,1}\,\overline{\sigma_1\, v}\} \\ & + \pi_1^*\{\sigma_1\,\sigma_1\, u\times\sigma_{k-1}\, v + \sigma_1\, u\times\sigma_1\,\sigma_{k-1}\, v\}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Finalmente,

$$\Gamma_{a'}\,\overline{\Lambda_{b'}(u\times v)} = \pi_1^*[\Gamma^k\overline{\Lambda^k(u)}\times v] + \pi_2^*[u\times\Gamma^k\overline{\Lambda^k(v)}] + B + \Gamma_{a'}(\bar W) \tag{8.6}$$

donde B, $\Gamma_{a'}(\bar W)$ están factorizados en forma conveniente.

Ahora demostraremos que

$$\begin{aligned} & B + \Gamma_{a'}(\bar W) \\ & = \pi_1^*(\textstyle\sum_{i\in P}\Gamma^{k-i}\overline{\Lambda^{k-1}(u)}\times\sigma_i\, v) + \pi_2^*(\sum_{i\in Q}\Gamma^{k-i}\Lambda^{k-i}(u)\times\overline{\sigma_i\, v}) \\ & + \pi_2^*(\textstyle\sum_{j\in S}\sigma_j\, u\times\Gamma^{k-j}\overline{\Lambda^{k-j}(v)}) + \pi_1^*(\sum_{j\in T}\overline{\sigma_j\, u}\times\Gamma^{k-j}\Lambda^{k-j}(v)) \\ & + \pi_2^*(\Gamma^{k-1}\Lambda^{k-1}(u)\times\overline{\sigma_1\, v}) + \pi_1^*(\overline{\sigma_1\, u}\times\Gamma^{k-1}\Lambda^{k-1}(v)). \end{aligned} \tag{8.7}$$

En efecto, agrupando los dos primeros sumandos de (8.5) y el primero de (8.4) resulta $\sum_{i\in P}\pi_1^*(\Gamma^{k-i}\overline{\Lambda^{k-i}}(u)\times\sigma_i v)$. Análogamente, agrupando el tercer y cuarto sumando de (8.5), y usando

$$\sum_{i\in Q}\pi_1^*(\sigma_{k-i}\overline{\sigma_1 u}\times\sigma_i v) = \sum_{i\in Q}\pi_2^*(\sigma_{k-i}\sigma_1 u\times\overline{\sigma_i v}),$$

de (8.4) se obtiene

$$\sum_{i\in Q}\pi_2^*(\Gamma^{k-i}\Lambda^{k-i}(u)\times\overline{\sigma_i v}).$$

Por otra parte, se comprueba fácilmente que

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in Q}\pi_2^*(\sigma_{k-i}\,u\times\sigma_1\,\overline{\sigma_i\,v}) + \sum_{i\in P}\pi_1^*(\overline{\sigma_{k-i}\,u}\times\sigma_1\,\sigma_i\,v)\\ &= \sum_{j\in S}\pi_2^*(\sigma_j\,u\times\sigma_1\,\overline{\sigma_{k-j}\,v}) + \sum_{j\in T}\pi_1^*(\overline{\sigma_j\,u}\times\sigma_1\,\sigma_{k-j}\,v)\\ &+ \pi_1^*(\overline{\sigma_{k-2}\,u}\times\sigma_1\,\sigma_2\,v) + \pi_2^*(\sigma_2\,u\times\sigma_1\,\overline{\sigma_{k-2}\,v}).\end{aligned}\tag{8.8}$$

Igualmente se establece que

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in Q}\pi_2^*(\sigma_{k-2-i}\,u\times\sigma_{0,1}\,\overline{\sigma_i\,v}) + \sum_{i\in P}\pi_1^*(\overline{\sigma_{k-2-i}\,u}\times\sigma_{0,1}\,\sigma_i\,v)\\ &= \sum_{j\in S}\pi_2^*(\sigma_j\,u\times\sigma_{0,1}\,\overline{\sigma_{k-2-j}\,v}) + \sum_{j\in T}\pi_1^*(\overline{\sigma_j\,u}\times\sigma_{0,1}\,\sigma_{k-2-j}\,v)\\ &+ \pi_1^*(\overline{\sigma_1\,u}\times\sigma_{0,1}\,\sigma_{k-3}\,v) + \pi_2^*(\sigma_{k-3}\,u\times\sigma_{0,1}\,\overline{\sigma_1\,v}).\end{aligned}\tag{8.9}$$

Ahora, agrupando las sumas según $j\in S$, $j\in T$ de (8.8), (8.9) y de (8.4), teniendo en cuenta que

$$\sum_{j\in T}\pi_2^*(\sigma_j u\times\sigma_{k-j}\overline{\sigma_1 v}) = \sum_{j\in T}\pi_1^*(\overline{\sigma_j u}\times\sigma_{k-j}\sigma_1 v),$$

resulta el tercer y el cuarto sumando de (8.7). Además, de los restantes sumandos de (8.4) y (8.5) se obtienen los otros dos sumandos de (8.7).

Por último, usando las relaciones $\Gamma^i\Lambda^i = 0$ y combinando (8.6) con (8.7) se obtiene que

$$\begin{aligned}\Gamma_{a'}\overline{\Lambda_{b'}(u\times v)} &= \pi_1^*[\Gamma^k\overline{\Lambda^k(u)}\times v] + \pi_2^*[u\times\Gamma^k\overline{\Lambda^k(v)}]\\ &+ \pi_1^*[\textstyle\sum_{i\in P}\Gamma^{k-i}\overline{\Lambda^{k-i}(u)}\times\sigma_i\,v] + \pi_2^*[\textstyle\sum_{j\in S}\sigma_j\,u\times\Gamma^{k-j}\overline{\Lambda^{k-j}(v)}].\end{aligned}\tag{8.10}$$

Ahora, sean $z_1\in H^{p+k}(X)$, $z_1'\in H^{q+k}(Y)$, $z_i\in H^{p+k-i}(X)$ para $i\in P$, $z_j'\in H^{q+k-j}(Y)$ para $j\in S$, clases de cohomología tales que

$$\delta_1\,z_1 = \Gamma^k\overline{\Lambda^k(u)},\qquad \delta_2\,z_1' = \Gamma^k\overline{\Lambda^k(v)},$$

$$\delta_1\,z_i = \Gamma^{k-i}\overline{\Lambda^{k-i}(u)},\qquad \delta_2\,z_j' = \Gamma^{k-j}\overline{\Lambda^{k-j}(v)}.$$

Estos elementos son, respectivamente, representantes de las operaciones

$$\Gamma_f^k\Lambda^k(u),\quad \Gamma_g^k\Lambda^k(v),\quad \Gamma_f^{k-i}\Lambda^{k-i}(u)\quad\text{y}\quad \Gamma_g^{k-j}\Lambda^{k-j}(v).$$

Ahora, construimos $z\in H^{p+q+k}(X\times Y)$ en la forma siguiente

$$z = z_1\times g^*v + f^*v\times z_1' + \sum_{i\in P} z_i\times g^*\pi_i v + \sum_{j\in S} f^*\sigma_j u\times z_j'.$$

Usando la conmutatividad del diagrama (8.3) se sigue que

$$\delta z = \pi_1{}^*(\delta_1 z_1 \times v) + \pi_2{}^*(u \times \delta_2 z_1{}') + \textstyle\sum_{i \in P} \pi_1{}^*(\delta_1 z_i \times \sigma_i v)$$
$$+ \textstyle\sum_{j \in S} \pi_2{}^*(\sigma_j u \times \delta_2 z_j{}') = \Gamma_{a'}\overline{\Lambda_{b'}(u \times v)}$$

por consiguiente, z así construido es un representante de $\Gamma_{a'}(f \times g)\Lambda_{b'}(u \times v)$. Esto termina la demostración del teorema.

En forma análoga, para el conjunto $M = \{2, \cdots, k-3\}$ y la transformación $f \times g : X \times Y \to K_1 \times K_2$ como antes, supongamos que las clases de cohomología $u \in H^p(K_1)$ y $v \in H^q(K_2)$ son tales que

(8.11)
- I) $f^*c(\mathrm{Sq}^k)(u) = 0, \quad f^*c(\mathrm{Sq}^{k-2})(u) = 0, \quad f^* \mathrm{Sq}^1 u = 0,$
  $f^* \mathrm{Sq}^1 \mathrm{Sq}^2 u = 0,$
  $g^*c(\mathrm{Sq}^k)(v) = 0, \quad g^*c(\mathrm{Sq}^{k-2})(v) = 0, \quad g^* \mathrm{Sq}^1 v = 0,$
  $g^* \mathrm{Sq}^1 \mathrm{Sq}^2 v = 0.$
- II) Para toda $i \in M$ se tiene que
  $f^*c(\mathrm{Sq}^{k-i})(u) = 0,$ o bien que $g^*c(\mathrm{Sq}^1)(v) = 0.$
- III) Para toda $j \in M$ se tiene que
  $g^*c(\mathrm{Sq}^{k-j})(v) = 0,$ o bien que $f^*c(\mathrm{Sq}^j)(u) = 0.$

De estas condiciones se deduce que están definidas las operaciones $\Gamma_{\# f}{}^k \Lambda_{\#}{}^k(u)$, $\Gamma_{\# g}{}^k \Lambda_{\#}{}^k(v)$ y $\Gamma_{\#(f \times g)}{}^k \Lambda_{\#}{}^k(u \times v)$. Además para toda $i \in M$, o está definida $\Gamma_{\# f}{}^{k-i} \Lambda_{\#}{}^{k-i}(u)$ o se tiene $g^*c(\mathrm{Sq}^i)(v) = 0$. Análogamente, para $j \in M$, o está definida $\Gamma_{\# g}{}^{k-j} \Lambda_{\#}{}^{k-j}(v)$ ó $f^*c(\mathrm{Sq}^j)(u) = 0$.

Sean $L, N \subset M$ todos los enteros que satisfacen, respectivamente, la primera parte de la condición II) y III).

Además, con $f \times g : X \times Y \to K_1 \times K_2$ como antes, sea $w \in H^r(K_1 \times K_2)$ tal que la operación $\Gamma_{\#(f \times g)}{}^t \Lambda_{\#}{}^t(w)$ está definida. Su indeterminación la designamos como sigue

$$Q^{t+r}(\Gamma_{\#(f \times g)}{}^t \Lambda_{\#}{}^t) = (f \times g)^* H^{r+t}(K_1 \times K_2) + \mathrm{Sq}^1 H^{r+t-1}(X \times Y)$$
$$+ c(\mathrm{Sq}^t) H^r(X \times Y) + c(\mathrm{Sq}^{t-2}) H^{r+2}(X \times Y).$$

TEOREMA 8.12. *Bajo las hipótesis* (8.11) *resulta que*

$$\Gamma_{\#(f \times g)}{}^k \Lambda_{\#}{}^k(u \times v) = \Gamma_{\# f}{}^k \Lambda_{\#}{}^k(u) \times g^* v + f^* u \times \Gamma_{\# g}{}^k \Lambda_{\#}{}^k(v)$$
$$+ \textstyle\sum_{i \in L} \Gamma_{\# f}{}^{k-i} \Lambda_{\#}{}^{k-i}(u) \times g^* \mathrm{Sq}^i v + \sum_{j \in N} f^* \mathrm{Sq}^j u \times \Gamma_{\# g}{}^{k-j} \Lambda_{\#}{}^{k-j}(v)$$

módulo

$$Q^{p+q+k}(\Gamma_{\#(f \times g)}{}^k \Lambda_{\#}{}^k) + Q^{p+k}(\Gamma_{\# f}{}^k \Lambda_{\#}{}^k) \times g^* v + f^* u \times Q^{q+k}(\Gamma_{\# g}{}^k \Lambda_{\#}{}^k)$$
$$+ \textstyle\sum_{i \in L} Q^{p+k-i}(\Gamma_{\# f}{}^{k-i} \Lambda_{\#}{}^{k-i}) \times g^* \mathrm{Sq}^i v$$
$$+ \textstyle\sum_{j \in N} f^* \mathrm{Sq}^j u \times Q^{q+k-j}(\Gamma_{\# g}{}^{k-j} \Lambda_{\#}{}^{k-j}).$$

En este teorema y todos los que siguen vale la observación hecha al final del enunciado del Teorema 8.2.

Con el fin de eliminar los "ejes" y poder hacer aplicaciones a operaciones secundarias, estableceremos los resultados de (8.2) para *productos reducidos.* Recordaremos a continuación la definición del producto reducido de dos clases de cohomología. Suponiendo que los espacios X, Y tienen puntos bases, consideremos el producto reducido de estos espacios (ver [14], [12], [8]), que denotamos con $X \# Y$. Esto es, $X \# Y$ es el espacio cociente

$$X \times Y / [X \times y_0 \cup x_0 \times Y],$$

donde x_0, y_0 son, respectivamente, los puntos bases de X, Y.

Ahora, sean $f : X \to K_1$ y $g : Y \to K_2$ dos transformaciones continuas que llevan puntos bases sobre los correspondientes de K_1 y K_2 respectivamente. Entonces, $f \times g$ induce la transformación continua $f \# g : X \# Y \to K_1 \# K_2$ de manera que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{f \times g} & K_1 \times K_2 \\ \big\downarrow{\scriptstyle \omega} & & \big\downarrow{\scriptstyle \omega_1} \\ X \# Y & \xrightarrow{f \# g} & K_1 \# K_2 \end{array} \tag{8.13}$$

donde ω y ω_1 son las transformaciones de identificación.

Se sabe que el homomorfismo

$$\omega^* : H^t(X \# Y) \to [H^t(X \times Y)]^+,$$

donde

$$[H^t(X \times Y)]^+ \approx \textstyle\sum_{i=1}^{t-1} H^i(X) \otimes H^{t-i}(Y),$$

es un isomorfismo.

Con cada par de clases de cohomología $z \in H^r(X)$ y $z' \in H^s(Y)$ se asocia el *producto reducido* (ver [8], [14]), que se denota por $z \# z'$, como sigue:

$$z \# z' = (\omega^*)^{-1}(z \times z') \in H^{r+s}(X \# Y),$$

donde,

$$z \times z' \in [H^{r+s}(X \times Y)]^+.$$

Se comprueba fácilmente que vale la fórmula de Cartan para el producto reducido de dos clases de cohomología.

Ahora calcularemos fórmulas de producto para $\Gamma_{(f \# g)}{}^k\Lambda^k(u \# v)$ y $\Gamma_{\#(f \# g)}{}^k\Lambda_{\#}{}^k(u \# v)$. Con $f \# g : X \# Y \to K_1 \# K_2$ como antes, supongamos que las clases de cohomología $u \in H^p(K_1)$ y $v \in H^q(K_2)$ satisfacen las condiciones (8.1). Se sigue que están definidas $\Gamma_f{}^k\Lambda^k(u)$, $\Gamma_g{}^k\Lambda^k(v)$ y $\Gamma_{f \# g}{}^k\Lambda^k(u \# v)$. Además, para toda $i \in M$, o está definida $\Gamma_g{}^{k-j}\Lambda^{k-i}(u)$ o bien $g^* \operatorname{Sq}^i v = 0$, y para $j \in M$, o está definida $\Gamma_g{}^{k-j}\Lambda^{k-j}(v)$ o bien $f^* \operatorname{Sq}^j (u) = 0$.

Tomando los conjuntos P, S y la indeterminación Q^t como en el Teorema 8.2 se tiene

COROLARIO 8.14. *Con las hipótesis* (8.1) *resulta*

$$\Gamma_{f\#g}{}^k\Lambda^k(u \# v) = \Gamma_f{}^k\Lambda^k(u) \# g^*v + f^*u \# \Gamma_g{}^k\Lambda^k(v)$$
$$+ \textstyle\sum_{i\in P}\Gamma_f{}^{k-i}\Lambda^{k-i}(u) \# g^*\,\mathrm{Sq}^i v + \sum_{j\in S} f^*\,\mathrm{Sq}^j u \# \Gamma_g{}^{k-j}\Lambda^{k-j}(v)$$

módulo la indeterminación total

$$Q_1{}^{p+q+k} = Q^{p+q+k}(\Gamma_{f\#g}{}^k\Lambda^k) + Q^{p+k}(\Gamma_f{}^k\Lambda^k) \# g^*v + f^*u \# Q^{q+k}(\Gamma_g{}^k\Lambda^k)$$
$$+ \textstyle\sum_{i\in P} Q^{p+k-i}(\Gamma_f{}^{k-i}\Lambda^{k-i}) \# g^*\,\mathrm{Sq}^i v + \sum_{j\in S} f^*\,\mathrm{Sq}^j u \# Q^{q+k-j}(\Gamma_g{}^{k-j}\Lambda^{k-j}).$$

Observación. Fácilmente se deduce que $\Gamma_{f\#g}{}^k\Lambda^k(u \# v)$ está definida si y sólo si $\Gamma_{f\times g}{}^k\Lambda^k(u\times v)$ está definida.

Demostración. Utilizando la conmutatividad del diagrama (8.13) y la naturalidad de la operación funcional se tiene que

$$\omega^*\Gamma_{f\#g}{}^k\Lambda^k(u \# v) = \Gamma_{f\times g}{}^k\Lambda^k(u\times v) \tag{8.15}$$

módulo $Q^{p+q+k}(\Gamma_{f\times g}{}^k\Lambda^k)$, donde

$$\bar{\omega}^* : H^{p+q+k}(X \# Y)/\tilde{Q}_1{}^{p+q+k} \to H^{p+q+k}(X\times Y)/\tilde{Q}^{p+q+k}$$

es el homomorfismo inducido por el monomorfismo

$$\omega^* : H^{p+q+k}(X \# Y) \to H^{p+q+k}(X\times Y)$$

donde, $\tilde{Q}_1{}^{p+q+k}$ y $\tilde{Q}^{p+q+k}$, son las indeterminaciones totales respectivamente, en 8.14 y 8.2.

Combinando (8.15) con el Teorema 8.2 resulta

$$\bar{\omega}^*\{\Gamma_{f\#g}{}^k\Lambda^k(u \# v) + \Gamma_f{}^k\Lambda^k(u) \# v + u \# \Gamma_g{}^k\Lambda^k(v)$$
$$+ \textstyle\sum_{i\in P}\Gamma_f{}^{k-i}\Lambda^{k-i}(u) \# g^*\,\mathrm{Sq}^i v + \sum_{j\in S} f^*\,\mathrm{Sq}^j u \# \Gamma_g{}^{k-j}\Lambda^{k-j}(v)\} = 0$$

módulo $\tilde{Q}^{p+q+k}$.

Ahora bien, si z es cualquier representante de la suma entre llaves, de $\omega^*\{z\} = \{\omega^*(z)\} = 0$ se sigue que $\omega^*z \in \tilde{Q}^{p+q+k}$. Por otra parte, se tiene

$$\tilde{Q}^{p+q+k} = f^*H^{p+q+k}(K_1)\times 1 + 1\times g^*H^{p+q+k}(K_2) + \omega^*\tilde{Q}_1{}^{p+q+k}$$

donde,

$$(\text{imagen } \omega^*) \cap (f^*H^{p+q+k}(K_1)\times 1 + 1\times g^*H^{p+q+k}(K_2)) = 0.$$

Por lo tanto, $\omega^*z \in \tilde{Q}^{p+q+k}$ implica que $\omega^*z \in \omega^*\tilde{Q}_1{}^{p+q+k}$, y por ser ω^* un monomorfismo se sigue que $z \in \tilde{Q}_1{}^{p+q+k}$. Esto termina la demostración de 8.14.

En forma análoga, con $f \# g : X \# Y \to K_1 \# K_2$ como antes, para $u \in H^p(K_1)$ y $v \in H^q(K_2)$ supongamos que se verifican las condiciones (8.11). Se sigue que están definidas $\Gamma_{\#f}{}^k\Lambda_\#{}^k(u)$, $\Gamma_{\#g}{}^k\Lambda_\#{}^k(v)$ y $\Gamma_{\#(f\#g)}{}^k\Lambda_\#{}^k(u \# v)$. Además, para toda

$i \in M$, o está definida $\Gamma_{\# f}{}^{k-i}\Lambda_{\#}{}^{k-i}(u)$ o se tiene $g^* c(\mathrm{Sq}^i)(v) = 0$, y para $j \in M$ o está definida $\Gamma_{\# g}{}^{k-j}\Lambda_{\#}{}^{k-j}(v)$ o $f^* c(\mathrm{Sq}^j)(u) = 0$.

Considerando los conjuntos L, N y con la indeterminación Q^t como en el Teorema 8.12 se obtiene

COROLARIO 8.16. *Bajo las hipótesis* (8.11) *se tiene que*

$$\Gamma_{\#(f\# g)}{}^{k}\Lambda_{\#}{}^{k}(u \# v) = \Gamma_{\# f}{}^{k}\Lambda_{\#}{}^{k}(u) \# g^* v + f^* u \# \Gamma_{\# g}{}^{k}\Lambda_{\#}{}^{k}(v)$$
$$+ \textstyle\sum_{i\in L}\Gamma_{\# f}{}^{k-i}\Lambda_{\#}{}^{k-i}(u) \# g^* \mathrm{Sq}^i v + \sum_{j\in N} f^* \mathrm{Sq}^j u \# \Gamma_{\# g}{}^{k-j}\Lambda_{\#}{}^{k-j}(v)$$

módulo la indeterminación siguiente

$$Q^{p+q+k}(\Gamma_{\#(f\# g)}{}^{k}\Lambda_{\#}{}^{k}) + Q^{p+k}(\Gamma_{\# f}{}^{k}\Lambda_{\#}{}^{k}) \# g^* v + f^* u \# Q^{q+k}(\Gamma_{\# g}{}^{k}\Lambda_{\#}{}^{k})$$
$$+ \textstyle\sum_{i\in L} Q^{p+k-i}(\Gamma_{\# f}{}^{k-i}\Lambda_{\#}{}^{k-i}) \# g^* \mathrm{Sq}^i v + \sum_{j\in N} f^* \mathrm{Sq}^j u \# Q^{q+k-j}(\Gamma_{\# g}{}^{k-j}\Lambda_{\#}{}^{k-j}).$$

9. Fórmulas de producto para operaciones secundarias

Sean Φ_t y $\Phi_t^{\#}$ $(t > 2)$ dos familias de operaciones cohomológicas secundarias estables, según Adams ([1]), asociadas, respectivamente, con las relaciones

$$\Gamma^t \cdot \Lambda^t = \mathrm{Sq}^1\,\mathrm{Sq}^t + \mathrm{Sq}^t\,\mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^{0,1}\,\mathrm{Sq}^{t-2},$$
$$\Gamma_{\#}{}^{t} \cdot \Lambda_{\#}{}^{t} = \mathrm{Sq}^1\, c(\mathrm{Sq}^t) + c(\mathrm{Sq}^t)\,\mathrm{Sq}^1 + c(\mathrm{Sq}^{t-2})\,\mathrm{Sq}^{0,1}.$$

Esto es Φ_t está definida en la intersección de los núcleos de Sq^t, Sq^1 y Sq^{t-2}, donde $\mathrm{Sq}^i : H^q(X) \to H^{q+i}(X)$, $(i = t, 1, t-2)$. La operación Φ_t toma valores en

$$H^{q+t}(X)/Q^{q+t}(\Phi_t\,; X),$$

donde

$$Q^{q+t}(\Phi_t\,; X) = \mathrm{Sq}^1 H^{q+t-1}(X) + \mathrm{Sq}^t H^q(X) + \mathrm{Sq}^{0,1} H^{q+t-3}(X)$$

es el mínimo subgrupo de $H^{q+t}(X)$ que contiene a los subgrupos $\mathrm{Sq}^1 H^{q+t-1}(X)$, $\mathrm{Sq}^t H^q(X)$ y $\mathrm{Sq}^{0,1} H^{q+t-3}(X)$.

Análogamente, $\Phi_t^{\#}$ está definida en la intersección de los núcleos de $c(\mathrm{Sq}^t)$, Sq^1 y $\mathrm{Sq}^{0,1}$ y toma valores en

$$H^{q+t}(X)/Q^{q+t}(\Phi_t^{\#}; X)$$

donde

$$Q^{q+t}(\Phi_t^{\#}; X) = \mathrm{Sq}^1 H^{q+t-1}(X) + c(\mathrm{Sq}^t) H^q(X) + c(\mathrm{Sq}^{t-2}) H^{q+2}(X).$$

La segunda fórmula de Peterson-Stein (ver [3; p. 101], [11]) relaciona las operaciones secundarias con operaciones funcionales como sigue. Dada una transformación continua $f : X \to Y$ y $u \in H^q(Y)$ tal que $f^* \Lambda^t(u) = 0$, entonces están definidas las operaciones $\Phi_t(f^* u)$, $\Gamma_f{}^t\Lambda^t(u)$, y se tiene que

$$(9.1) \qquad \Phi_t(f^* u) = \Gamma_f{}^t\Lambda^t(u) \bmod f^* H^{q+t}(Y) + Q^{q+t}(\Phi_t\,; X).$$

En forma análoga, si $f^* \Lambda_{\#}{}^t(u) = 0$, se obtiene,

$$(9.2) \qquad \Phi_t^{\#}(f^* u) = \Gamma_{\# f}{}^t\Lambda_{\#}{}^t(u) \bmod f^* H^{q+t}(Y) + Q^{q+t}(\Phi_t^{\#}; X).$$

A continuación calcularemos fórmulas de producto para $\Phi_k(u\times v)$ y $\Phi_k^{\#}(u\times v)$. Como en §8, sea $M = \{2, \cdots, k-3\}$. Supongamos que las clases de cohomología $u \in H^p(X)$ y $v \in H^q(Y)$ satisfacen las siguientes condiciones

$$(9.3)\quad \begin{cases} \text{I)} & \mathrm{Sq}^k u = \mathrm{Sq}^k v = 0, \quad \mathrm{Sq}^{k-2} u = \mathrm{Sq}^{k-2} v = 0, \\ & \mathrm{Sq}^1 u = \mathrm{Sq}^1 v = 0. \\ \text{II)} & \text{Para toda } i \in M \text{ se tiene que } \mathrm{Sq}^{k-i} u = \mathrm{Sq}^{k-2-i} u = 0, \\ & \text{o bien que } \mathrm{Sq}^i v = 0. \\ \text{III)} & \text{Para toda } j \in M \text{ se tiene que } \mathrm{Sq}^{k-j} v = \mathrm{Sq}^{k-2-j} v = 0, \\ & \text{o bien que } \mathrm{Sq}^j u = 0. \end{cases}$$

De I) se deduce que están definidas $\Phi_k(u)$, $\Phi_k(v)$ y combinando I), bien con II) o III), resulta que $\Phi_k(u\times v)$ está definida. Además, de I) y II) se obtiene que para toda $i \in M$, o está definida $\Phi_{k-i}(u)$ ó $\mathrm{Sq}^i v = 0$. Análogamente, de I) y III) se sigue que para $j \in M$, o está definida $\Phi_{k-j}(v)$ ó $\mathrm{Sq}^j u = 0$.

Sea $P \subset M$ todos los enteros que verifican la primera parte de la condición II). Es decir, si $i \in P$ se tiene $\mathrm{Sq}^{k-i} u = \mathrm{Sq}^{k-2-i} u = 0$. En forma análoga, sea $S \subset M$ todos los enteros que verifican la primera parte de la condición III). Obviamente, para toda $i \in P$ se obtiene que $\Phi_{k-i}(u)$ está definida y para toda $j \in S$ también $\Phi_{k-j}(v)$ está definida.

TEOREMA 9.4. *Con las hipótesis* (9.3) *se obtiene*

$$\Phi_k(u\times v) = \Phi_k(u)\times v + u\times\Phi_k(v) + \textstyle\sum_{i\in P}\Phi_{k-i}(u)\times\mathrm{Sq}^i v + \sum_{j\in S}\mathrm{Sq}^j u\times\Phi_{k-j}(v)$$

módulo la indeterminación siguiente

$$Q^{p+q+k}(\Phi_k\,; X\times Y) + Q^{p+k}(\Phi_k\,; X)\times v + u\times Q^{q+k}(\Phi_k\,; Y) + \textstyle\sum_{i\in P} Q^{p+k-i}(\Phi_{k-i}\,; X)\times\mathrm{Sq}^i v + \sum_{j\in S}\mathrm{Sq}^j u\times Q^{q+k-j}(\Phi_{k-j}\,; Y) + \sum_{r+s=k} A_r(u)\times A_s(v),$$

donde A_t es el subespacio vectorial del álgebra de Steenrod de elementos homogéneos de grado t.

Observación. Se sigue fácilmente de la demostración del Teorema que si para alguna $i \in P$ (para alguna $j \in S$) se tiene que $\mathrm{Sq}^i v = 0$ (que $\mathrm{Sq}^j u = 0$), el resultado anterior vale suprimiendo en la indeterminación total el término correspondiente.

Demostración. Sea π un grupo cíclico de orden 2. Con $K_1 = K(\pi, p)$, $K_2 = K(\pi, q)$, complejos de Eilenberg-MacLane (ver [5]), esto es, K_1 es un espacio topológico tal que para sus grupos de homotopía se tiene $\pi_t(K_1) = 0$ si $t \neq p$ y $\pi_p(K_1) = \pi$ y en forma análoga para K_2, tomando transformaciones continuas $f : X \to K_1$ y $g : Y \to K_2$ (que preservan los puntos bases) con $f^*\gamma_p = u$,

$g^*\gamma_q = v$, donde γ_p y γ_q son, respectivamente, las clases fundamentales de K_1 y K_2.

Ahora consideremos los productos reducidos $X \# Y$, $K_1 \# K_2$, la transformación continua $f \# g : X \# Y \to K_1 \# K_2$ inducida por $f \times g : X \times Y \to K_1 \times K_2$ y el diagrama (8.13).

Como vale la fórmula de Cartan para el producto reducido de dos clases de cohomología, usando las hipótesis (9.3) resulta $(f \# g)^* \Lambda^k(\gamma_p \# \gamma_q) = 0$. Luego, por la segunda fórmula de Peterson-Stein se obtiene

$$\Phi_k(u \# v) = \Gamma_{f\#g}^{\ k}\Lambda^k(\gamma_p \# \gamma_q) \bmod Q^{p+q+k}(\Gamma^k_{f\#g}{}^k\Lambda^k) \tag{9.5}$$

donde, $(f \# g)^*(\gamma_p \# \gamma_q) = f^*\gamma_p \# g^*\gamma_q = u \# v$.

Por otra parte, usando el corolario 8.18 se tiene que

$$\begin{aligned}\Gamma_{f\#g}^{\ k}\Lambda^k(\gamma_p \# \gamma_q) = \Gamma_f^{\ k}\Lambda^k(\gamma_p) \# v + u \# \Gamma_g^{\ k}\Lambda^k(\gamma_q) & \\ + \textstyle\sum_{i\in P} \Gamma_f^{\ k-i}\Lambda^{k-i}(\gamma_p) \# \mathrm{Sq}^i v & \\ + \textstyle\sum_{j\in S} \mathrm{Sq}^j u \# \Gamma_g^{\ k-j}\Lambda^{k-j}(\gamma_q) &\end{aligned}$$

módulo Q_i^{p+q+k}.

Nuevamente, utilizando varias veces la segunda fórmula de Peterson-Stein resulta

$$\begin{aligned}\Gamma_{f\#g}^{\ k}\Lambda^k(\gamma_p \# \gamma_q) &= \Phi_k(u) \# v + u \# \Phi_k(u) \\ &\quad + \textstyle\sum_{i\in P} \Phi_{k-i}(u) \# \mathrm{Sq}^i v + \sum_{j\in S} \mathrm{Sq}^j u \# \Phi_{k-j}(v)\end{aligned} \tag{9.6}$$

mod $\tilde{Q}_1^{p+q+k}$.

Por último, combinando (9.5) y (9.6) se obtiene

$$\begin{aligned}\Phi_k(u \# v) = \Phi_k(u) \# v + u \# \Phi_k(v) + \textstyle\sum_{i\in P} \Phi_{k-i}(u) \# \mathrm{Sq}^i v & \\ + \textstyle\sum_{j\in S} \mathrm{Sq}^j u \# \Phi_{k-j}(v) &\end{aligned} \tag{9.7}$$

mod $\tilde{Q}_1^{p+q+k}$.

Ahora, aplicando el homomorfismo $\bar{\omega}^*$ a la igualdad (9.7), usando la naturalidad de la operación secundaria y la conmutatividad del diagrama (8.17) resulta

$$\begin{aligned}\Phi_k(u \times v) = \Phi_k(u) \times v &+ u \times \Phi_k(v) + \textstyle\sum_{i\in P} \Phi_{k-i}(u) \times \mathrm{Sq}^i v \\ &+ \textstyle\sum_{j\in S} \mathrm{Sq}^j u \times \Phi_{k-j}(v) \bmod [(f\times g)^* H^{p+q+k}(K_1 \times K_2)]^+ \\ &+ Q^{p+q+k}(\Phi_k ; X\times Y) + Q^{p+k}(\Phi_k ; X) \times v + u \times Q^{p+k}(\Phi_k ; Y) \\ &+ \textstyle\sum_{i\in P} Q^{p+k-i}(\Phi_{k-i} ; X) \times \mathrm{Sq}^i v + \sum_{j\in S} \mathrm{Sq}^j u \times Q^{q+k-j}(\Phi_{k-j} ; Y)\end{aligned}$$

de acuerdo con lo establecido en la demostración del corolario 8.18.

Finalmente,

$$[(f\times g)^* H^{p+q+k}(K_1 \times K_2)]^+ \approx \textstyle\sum_{r+s=k} f^* H^{p+r}(K_1) \times g^* H^{q+s}(K_2)$$

y por el resultado establecido por Serre en [13] para el anillo de cohomología de un complejo de Eilenberg-MacLane se tiene que

$$H^{p+r}(K_1) = A_r(\gamma_p), \qquad H^{q+s}(K_2) = A_s(\gamma_q).$$

Entonces, $[(f\times g)^* H^{p+q+k}(K_1\times K_2)]^+ \approx \sum_{r+s=k} A_r(u)\times A_s(v)$.
Esto concluye la demostración de 9.4.

En forma análoga, si $u \in H^p(X)$ y $v \in H^q(Y)$ son tales que

$$(9.8)\begin{cases} \text{I)} & c(\mathrm{Sq}^k)(u) = c(\mathrm{Sq}^k)(v) = 0, \quad c(\mathrm{Sq}^{k-2})(u) = c(\mathrm{Sq}^{k-2})(v) = 0, \\ & \mathrm{Sq}^1\, u = \mathrm{Sq}^1\, v = 0, \quad \mathrm{Sq}^1\,\mathrm{Sq}^2\,(u) = \mathrm{Sq}^1\,\mathrm{Sq}^2(v) = 0. \\ \text{II)} & \text{Para toda } i \in M \text{ se tiene que } c(\mathrm{Sq}^{k-i})(u) = 0, \\ & \text{o bien que } c(\mathrm{Sq}^i)(v) = 0. \\ \text{III)} & \text{Para toda } j \in M \text{ se tiene que } c(\mathrm{Sq}^{k-j})(v) = 0, \text{ o bien que} \\ & c(\mathrm{Sq}^j)(u) = 0. \end{cases}$$

De estas condiciones se sigue que están definidas $\Phi_k^{\#}(u)$, $\Phi_k^{\#}(v)$ y $\Phi_k^{\#}(u\times v)$. Además, para toda $i \in M$, o está definida $\Phi_{k-i}^{\#}(u)$ ó $c(\mathrm{Sq}^i)(v) = 0$ y, o bien está definida $\Phi_{k-j}^{\#}(v)$ ó $c(\mathrm{Sq}^j)(u) = 0$ para $j \in M$.

Sean $L, N \subset M$ enteros que verifican, respectivamente, la primera parte de la condición II) y III).

Teorema 9.9. *Bajo las condiciones* (9.8) *se tiene que*

$$\begin{aligned} &\Phi_k^{\#}(u\times v) \\ &= \Phi_k^{\#}(u)\times v + u\times\Phi_k^{\#}(v) + \textstyle\sum_{i\in L}\Phi_{k-i}^{\#}(u)\times\mathrm{Sq}^i v \\ &\quad + \textstyle\sum_{j\in N}\mathrm{Sq}^j\, u\times\Phi_{k-j}^{\#}(v) \mod Q^{p+q+k}(\Phi_k^{\#};\, X\times Y) + Q^{p+k}(\Phi_k^{\#};\, X)\times v \\ &\quad + u\times Q^{q+k}(\Phi_k^{\#};\, Y) + \textstyle\sum_{i\in L} Q^{p+k-i}(\Phi_{k-i}^{\#};\, X)\times\mathrm{Sq}^i\, v \\ &\quad + \textstyle\sum_{j\in N}\mathrm{Sq}^j\, u\times Q^{q+k-j}(\Phi_{k-j}^{\#};\, Y) + \textstyle\sum_{r+s=k} A_r(u)\times A_s(v), \end{aligned}$$

con A_t como en el Teorema 9.4.

Observación. Usando la transformación diagonal y la naturalidad de las operaciones se establecen resultados análogos a 9.4 y 9.9 para el producto $\smile$.

10. Fórmulas especiales de producto

Particularizando las hipótesis (9.3) estableceremos algunas fórmulas especiales de producto que resultan para las operaciones Φ_k .

Supongamos primero que $k = 2t$ es par y que $u \in H^p(X)$, $v \in H^q(Y)$ satisfacen las condiciones siguientes: $\mathrm{Sq}^1\, u = \mathrm{Sq}^1\, v = 0$, $\mathrm{Sq}^{2t-2i}\, u = \mathrm{Sq}^{2t-2-2i} u = 0$ y $\mathrm{Sq}^{2t-2i} v = \mathrm{Sq}^{2t-2-2i} v = 0$ para toda $2i$ tal que $0 \leq 2i \leq t - 2$. Se comprueba fácilmente que con estas hipótesis las clases de cohomología u, v satisfacen las condiciones (9.3) y se obtiene la siguiente fórmula de producto

$$\begin{aligned}(10.1)\qquad \Phi_{2t}(u\times v) &= \Phi_{2t}(u)\times v + u\times\Phi_{2t}(v)\\ &\quad + \textstyle\sum_{i=2}^{t-2}\{\Phi_{2t-i}(u)\times \mathrm{Sq}^i\, v + \mathrm{Sq}^i\, u\times\Phi_{2t-2i}(v)\}.\end{aligned}$$

La indeterminación en este caso es la siguiente

$$\begin{aligned}&Q^{p+q+2t}(\Phi_{2t}\,;X\times Y) + Q^{p+2t}(\Phi_{2t}\,;X)\times v + u\times Q^{q+2t}(\Phi_{2t}\,;Y)\\ &\quad + \textstyle\sum_{i=2}^{t-2}\{Q^{p+2t-i}(\Phi_{2t-i}\,;X)\times\mathrm{Sq}^i\, v + \mathrm{Sq}^i\, u\times Q^{q+2t-i}(\Phi_{2t-i}\,;Y)\}\\ &\quad\quad + \textstyle\sum_{r+s=2t} A_r(u)\times A_s(v).\end{aligned}$$

Si a las hipótesis enunciadas arriba agregamos la condición que $\mathrm{Sq}^{2i+1}\, u = \mathrm{Sq}^{2i+1} v = 0$ para toda $2i$ tal que $2 \leq 2i \leq t-3$ la fórmula (10.1) se simplifica en la siguiente

$$\begin{aligned}(10.2)\qquad \Phi_{2t}(u\times v) &= \Phi_{2t}(u)\times v + u\times\Phi_{2t}(v)\\ &\quad + \textstyle\sum_{2i=4}^{t-2}\{\Phi_{2t-2i}(u)\times \mathrm{Sq}^{2i} v + \mathrm{Sq}^{2i}\, u\times\Phi_{2t-2i}(v)\}.\end{aligned}$$

En este caso la indeterminación es menor que la de (10.1) de acuerdo con la observación hecha al final del Teorema 9.4.

Ahora supongamos que $k = 2t + 1$ es impar y que las clases de cohomología $u \in H^p(X)$ y $v \in H^q(Y)$ verifican las siguientes condiciones:

$$\mathrm{Sq}^{2t+1-2i} u = \mathrm{Sq}^{2t-1-2i} u = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Sq}^{2t+1-2i} v = \mathrm{Sq}^{2t-1-2i} v = 0$$

para toda $2i$ tal que $0 \leq 2i \leq 2t$. Se deduce fácilmente que con estas hipótesis, u y v satisfacen las condiciones (9.3) y resulta la siguiente fórmula de producto

$$\begin{aligned}(10.3)\qquad \Phi_{2t+1}(u\times v) &= \Phi_{2t+1}(u)\times v + u\times\Phi_{2t+1}(v)\\ &\quad + \textstyle\sum_{i=1}^{t-1}\{\Phi_{2t+1-2i}(u)\times \mathrm{Sq}^{2i} v + \mathrm{Sq}^{2i} u\times\Phi_{2t+1-2i}(v)\}\end{aligned}$$

con la indeterminación siguiente

$$\begin{aligned}&Q^{p+q+2t+1}(\Phi_{2t+1}\,;X\times Y) + Q^{p+2t+1}(\Phi_{2t+1}\,;X)\times v + u\times Q^{q+2t+1}(\Phi_{2t+1}\,;Y)\\ &\quad + \textstyle\sum_{i=1}^{t-1}\{Q^{p+2t+1-2i}(\Phi_{2t+1-2i}\,;X)\times\mathrm{Sq}^{2i} v + \mathrm{Sq}^{2i} u\times Q^{q+2t+1-2i}(\Phi_{2t+1-2i}\,;Y)\}\\ &\quad\quad + \textstyle\sum_{r+s=2t+1} A_r(u)\times A_s(v).\end{aligned}$$

Análogamente, para $k = 2t + 1$ y suponiendo que $u \in H^p(X)$, y $v \in H^q(Y)$ satisfacen las siguientes condiciones: $\mathrm{Sq}^1 u = \mathrm{Sq}^1 v = 0$, $\mathrm{Sq}^{2t+1-i}\, u = \mathrm{Sq}^{2t-1-i}\, u = 0$ y $\mathrm{Sq}^{2t+1-i} v = \mathrm{Sq}^{2t-1-i}\, v = 0$ para toda i tal que $0 \leq i \leq t$ se tiene la siguiente fórmula de producto

$$\begin{aligned}(10.4)\qquad \Phi_{2t+1}(u\times v) &= \Phi_{2t+1}(u)\times v + u\times\Phi_{2t+1}(v)\\ &\quad + \textstyle\sum_{i=2}^{t-1}\{\Phi_{2t+1-i}(u)\times \mathrm{Sq}^i\, v + \mathrm{Sq}^i u\times\Phi_{2t+1-i}(v)\}\end{aligned}$$

con la indeterminación siguiente:

$$Q^{p+q+2t+1}(\Phi_{2t+1}\,;\,X\times Y)\;+\;Q^{p+2t+1}(\Phi_{2t+1}\,;\,X)\times v\;+\;u\times Q^{q+2t+1}(\Phi_{2t+1}\,;\,Y)$$
$$+\;\sum_{i=2}^{t-1}\{Q^{p+2t+1-i}(\Phi_{2t+1-i}\,;\,X)\times \mathrm{Sq}^i v\;+\;\mathrm{Sq}^i u\times Q^{q+2t+1-i}(\Phi_{2t+1-i}\,;\,Y)\}$$
$$+\;\sum_{r+s=k} A_r(u)\times A_s(v).$$

Sea $I_1 \subset A$ el ideal bilateral generado por Sq^1. Agregando la condición $A_r(u) = 0$ para toda r tal que $1 \leq r \leq 2t$ y $\theta(v) = 0$ para toda $\theta \in I_1$ de grado $\leq 2t$ a las hipótesis de la correspondiente fórmula de (10.2) para el producto $\smile$ se obtiene la siguiente fórmula

$$\Phi_{2t}(u \smile v) = u \smile \Phi_{2t}(v) + \sum_{r=0}^{t-2}\Phi_{2t-2r}(u) \smile \mathrm{Sq}^{2^r}v$$

establecida por Adem y Gitler en ([4; p. 64]).

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL IPN, MÉXICO, D. F.

REFERENCIAS

[1] J. F. ADAMS, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math., **72** (1960), 20–104.

[2] J. ADEM, *Sobre la fórmula del producto para operaciones cohomológicas de segundo orden*, Bol. Soc. Mat. Mex., **4** (1959), 42–65.

[3] J. ADEM, *Sobre operaciones cohomológicas secundarias*, Bol. Soc. Mat. Mex. **7** (1962), 95–110.

[4] J. ADEM and S. GITLER, *Secondary characteristic classes and the immersion problem*, Bol. Soc. Mat. Mex. **8** (1963), 53–78.

[5] H. CARTAN, *Algebres d'Eilenberg-MacLane et homotopie*, Seminaire H. Cartan, Paris, 1954–55.

[6] C. CHEVALLEY, Fundamental concepts of algebra, Academic Press Inc., New York, 1956.

[7] S. EILENBERG and N. STEENROD, *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1952).

[8] I. M. JAMES, *On the suspension triad*, Ann. of Math., **63** (1956), 191–247.

[9] J. MILNOR, *The Steenrod algebra and its dual*, Ann. of Math., **67** (1958), 150–171.

[10] J. W. MILNOR and J. C. MOORE, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math., **81** (1965), 211–264.

[11] F. P. PETERSON and N. STEIN, *Secondary cohomology operations: two formulas*, Amer. J. Math., **81** (1959), 281–305.

[12] D. PUPPE, *Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen, I*, Math. Zeit., **69** (1958), 299–344.

[13] J. P. SERRE, *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane*, Comment, Math. Helv., **27** (1953), 198–231.

[14] E. SPANIER, *Function spaces and duality*, Ann. of Math., **70** (1959), 338–378.

[15] N. E. STEENROD, *Cohomology invariants of mappings*, Ann. of Math., **50** (1949), 954–988.

[16] N. E. STEENROD (escrito por D. B. A. Epstein), Cohomology operations, Ann. of Math. Studies, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1962).