ALGUNAS RELACIONES EN LA TORSION DE WHITEHEAD

POR S. DE NEYMET DE CHRIST

Introducción

La noción de tipo simple de homotopía la introduce J. H. Whitehead en varios artículos, empleando este término por primera vez en [7]. Dado un CW-complejo finito y conexo K, considera la clase C_K de todos los CW-complejos (finitos y conexos) que son del mismo tipo de homotopía que K. El tipo simple de homotopía es una relación de equivalencia en la clase C_K. Para saber cuando dos complejos X, Y de C_K son del mismo tipo simple de homotopía, asocia a cada equivalencia homotópica $f:X \rightarrow Y$ un elemento de un grupo abeliano $Wh(\pi_1(Y))$ que denota con $\tau(f)$. Esta es la torsión de Whitehead de una equivalencia homotópica f. Si existe $f:X \rightarrow Y$ tal que $\tau(f) = 0$, entonces X y Y son del mismo tipo simple de homotopía y se utiliza la notación $X \equiv Y(\Sigma)$.

El tipo simple de homotopía es un invariante combinatorio en el sentido que si X_1 es una subdivisión de X entonces $X \equiv X_1(\Sigma)$. En un artículo reciente, J. Milnor [4] hace uso de este invariante para dar un ejemplo de dos espacios homeomorfos y que sin embargo son combinatoriamente distintos.

En general, dada una equivalencia homotópica $f:X \rightarrow Y$, no es fácil calcular su torsión y esto se debe en gran parte a la complejidad del grupo $Wh(\pi_1(Y))$. Dado un grupo G, el grupo de Whitehead $Wh(G)$ es el grupo cociente $GL(ZG)/E_G$ donde $GL(ZG)$ es el grupo de matrices inversibles "infinitas" sobre ZG que denota el anillo entero del grupo G y E_G es el subgrupo de $GL(ZG)$ generado por su subgrupo conmutador y por las matrices diagonales con elementos en la diagonal de la forma $\pm x$ con x en G, esto es, son unidades triviales del anillo ZG.

Debido a esto, se estudian los grupos de Whitehead que es un functor covariante y se han obtenido resultados para grupos especiales que utilizaremos. Así por ejemplo establecemos la fórmula

$$Wh(G_1 \times G_2) = i_{1*}Wh(G_1) + i_{2*}Wh(G_2) + K$$

donde i_{1*} y i_{2*} son los homomorfismos inducidos por las inclusiones y si p_1, p_2 denotan las proyecciones naturales entonces

$$K = \operatorname{Ker} p_{1*} \cap \operatorname{Ker} p_{2*}$$

Esta fórmula se generaliza inmediatamente para un número finito de factores siendo en este caso $K = \bigcap \operatorname{Ker} p_{j*}$. Como se sabe [6] en el caso de producto libre, $K = 0$.

Nuestro propósito es definir un invariante menos fuerte en C_K. El procedimiento es semejante; a cada equivalencia homotópica $f:X \rightarrow Y$ y a cada subgrupo normal N de $G = \pi_1(X)$ le asociamos un elemento de $Wh(G/N)$ que denotamos $\tau_N(f)$ y es lo que llamaremos la torsión de f relativa al subgrupo N. Cuando N es el subgrupo trivial de G entonces $\tau_N(f)$ es la torsión (absoluta) de Whitehead $\tau(f)$. El desarrollo completo de esta definición está en §1.

En §4 estudiamos la relación que existe entre $\tau(f)$ y $\tau_N(f)$ obteniendo

$$\tau_N(f) = p_*\tau(f)$$

donde p_* es el homomorfismo inducido en los grupos de Whitehead por el homomorfismo natural $p: G \to G/N$.

Además de $\tau_N(f)$ se tiene asociada a la equivalencia f y al subgrupo N una equivalencia homotópica $f': X' \to Y'$ que cubre a f con $X' \to X$ y $Y' \to Y$ cubiertas normales de X y Y tales que $\pi_1(X') \simeq \pi_1(Y') \simeq N$. Ahora bien, si N es de índice finito, X' y Y' son CW-complejos finitos y conexos así es que se tiene definida la torsión de f' que en este caso es un elemento del grupo $Wh(N)$.

En §2 introducimos un neuvo homomorfismo que por la semejanza que tiene con la Teoría de Grupos llamamos transferencia (transfer homomorphism). Este homomorfismo está definido en los grupos de Whitehead de un grupo G en el de un subgrupo normal N de índice finito y es

$$\mathrm{tr}: Wh(G) \to Wh(N).$$

Si $i: N \to G$ es la inclusión, se tiene la siguiente relación

$$i_* \,\mathrm{tr}\, i_*(\alpha) = n i_*(\alpha)$$

para todo α en $Wh(N)$ y $n = [G:N]$. En algunos casos se cumple

$$\mathrm{tr}\, i_*(\alpha) = n\alpha$$

pero el contraejemplo dado en §3 demuestra que esto no es válido en general como sucede con la transferencia en la Teoría de Grupos y el de la Cohomología de Grupos. Además, este ejemplo muestra que ningún homomorfismo de $Wh(G)$ en $Wh(N)$ puede definirse tal que satisfaga esta propiedad.

La transferencia homomorfismo sugerido de la Geometría de las cubiertas nos sirve para dar la relación existente entre $\tau(f)$ y $\tau(f')$. Así en §4 demostramos

$$\tau(f') = \mathrm{tr}\,\tau(f).$$

Cuando $G = G_1 \times G_2$ es un grupo finito, tenemos dos homomorfismos transfer $\mathrm{tr}_1: Wh(G) \to Wh(G_1)$, $\mathrm{tr}_2: Wh(G) \to Wh(G_2)$ que con las inclusiones y proyecciones satisfacen

$$\mathrm{tr}_1\, i_{1*}(\alpha_1) = n_1\alpha_1, \quad \mathrm{tr}_2\, i_{2*}(\alpha_2) = n_2\alpha_2,$$

$$\mathrm{tr}_1\, i_{2*} = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{tr}_2\, i_{1*} = 0$$

para $\alpha_1 \in Wh(G_1)$, $\alpha_2 \in Wh(G_2)$, $n_1 = [G:G_1]$ y $n_2 = [G:G_2]$.

Como ejemplo, tratamos el caso de X, Y espacios lente de dimensión $2n - 1$. Sean $L = L(M; k_1, \cdots, k_n)$ y $L' = L(m; t_1, \cdots, t_n)$ dos espacios lente del mismo tipo de homotopía utilizando la notación acostumbrada, así que $\pi(L) \simeq \pi_1(L') = G$ es un grupo cíclico de orden m. Supongamos que $m = m_1m_2$ con $(m_1, m_2) = 1$ entonces $G = G_1 \times G_2$ con G_1 y G_2 grupos cíclicos de órdenes m_1 y m_2 respectivamente. Construímos las cubiertas $L_1 \to L$, $L_2 \to L$ y $L_1' \to L'$, $L_2' \to L'$

de manera que $\pi_1(L_1) \approx \pi_1(L_1') \cong G_1$ y $\pi_1(L_2) \approx \pi_1(L_2') \cong G_2$. Entonces si $f: L \to L'$ es una equivalencia homotópica se tienen las equivalencias $f_1: L_1 \to L_1'$, $f_2: L_2 \to L_2'$ que cubren a f. Aplicando lo anterior,

$$\tau(f) = i_{1*}p_{1*}\tau(f) + i_{2*}p_{2*}\tau(f) + \beta$$

con β en K. Pero resulta en este caso especial que $p_{1*}\tau(f) = \tau(f_1)$ y $p_{2*}\tau(f) = \tau(f_2)$, es decir $\mathrm{tr}_1 \tau(f) = p_{1*}\tau(f)$ y $\mathrm{tr}_2 \tau(f) = p_{2*}\tau(f)$. Finalmente se demuestra que si $\tau(f) \neq 0$ entonces $\beta \neq 0$ y se da un caso concreto donde $\tau(f_1) = 0$, $\tau(f_2) = 0$ y sin embargo $\tau(f) \neq 0$.

1. Definiciones

Sea R un anillo con unidad. El grupo lineal infinito $GL(R)$ sobre el anillo R, es la unión con respecto a n de los grupos $GL(n, R)$ de matrices $n \times n$ inversibles (con inverso izquierdo y derecho) sobre R en la sucesión de inclusiones

$$GL(1, R) \subset GL(2, R) \subset \cdots \subset GL(n, R) \subset GL(n + 1, R) \subset \cdots$$

donde $\alpha \in GL(n, R)$ se identifica con la matriz

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

de $GL(n + 1, R)$.

Sea $E(n, R)$ el subgrupo de $GL(n, R)$ generado por las matrices que difieren de la matriz identidad en un elemento fuera de la diagonal; a estas matrices las llamaremos elementales. Un generador de $E(n, R)$ es $I + re_{ij}$ con $i \neq j$ donde I es la matriz identidad, $r \in R$ y e_{ij} es la matriz con ceros en todos lados excepto en el lugar (i, j) donde aparece el elemento 1 de R. Denotemos con $E(R)$ el subgrupo de $GL(R)$ unión de $E(n, R)$.

El primer resultado es que $E(R)$ es el subgrupo conmutador de $GL(R)$, [3, Lema 1.1]. Así el grupo cociente

$$K_1(R) = GL(R)/E(R)$$

se escribe en forma aditiva y es el *grupo de Whitehead del anillo R*. El *grupo de Whitehead reducido de R*, es el grupo cociente de $K_1(R)$ módulo las matrices diagonales con elementos en la diagonal $+1$ o -1 y se le denota por $\bar{K}_1(R)$.

Ahora bien, el *grupo de Whitehead de un grupo G*: $Wh(G)$ se define como sigue. Consideremos ZG el anillo entero del grupo G y E_G el subgrupo de $GL(ZG)$ generado por las matrices elementales y por las diagonales cuyos elementos en la diagonal son de la forma $+x$ o $-x$ para toda $x \in G$. Entonces

$$Wh(G) = GL(ZG)/E_G,$$

esto es, $Wh(G)$ es el grupo cociente de $\bar{K}_1(ZG)$ módulo las matrices diagonales de la forma antes dicha.

Es fácil ver que el grupo de Whitehead de un grupo (anillo) es un functor covariante de la categoría de grupos (anillos) y homomorfismos en la de grupos abelianos y homomorfismos. En particular si en la sucesión $G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{f'} G''$ la composición $f'f$ es el homomorfismo trivial entonces $f_*'f_* = 0$, esto se debe a que toda matriz "entera" de $GL(n, ZG'')$ es cero en $Wh(G'')$.

Supongamos que R es tal que dos bases de cualquier módulo R-libre M tienen el mismo número de elementos, condición que siempre satisface el anillo entero de un grupo. Dos bases $m = \{m_i\}$ y $m' = \{m_i'\}$ de M son *equivalentes* si la clase de la matriz cambio de base $\| r_{ij} \|$ $(m_i' = \Sigma r_{ij} m_j)$ en $\bar{K}_1(R)$ es cero. Denotemos a este elemento de $\bar{K}_1(R)$ con $[m/m']$.

Sea

$$C: C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0$$

un R-complejo (finitamente generado) con base; es decir, C_q es un módulo R-libre con cierta base preferida $c_q = \{c_i^q\}$ $(i = 1, \cdots, \alpha_q)$ y C es un complejo de cadena sobre R. Si C es acíclico, tenemos sucesiones exactas

$$0 \to B_q \to C_q \xrightarrow{\partial} B_{q-1} \to 0 \qquad q \geqq 0$$

donde $B_q = \partial(C_{q+1})$ y $B_{-1} = 0$. Por inducción resulta que los módulos B_q son R-libres. Sean entonces $b_q = \{b_j^q\}$ $(j = 1, \cdots, \beta_q)$ bases cualesquiera de B_q $q = 0, \cdots, n-1$. Una base de C_q es $\{b_1^q, \cdots, b_{\beta_q}^q, \bar{b}_1^{q-1}, \cdots, \bar{b}_{\beta_{q-1}}^{q-1}\}$ para ciertos $\bar{b}_j^{q-1}$ de C_q que se proyectan en b_j^{q-1}. Dos bases de C_q de esta forma son equivalentes y si $b_q b_{q-1}$ es cualquiera de ellas, se obtiene un elemento $[c_q/b_q b_{q-1}]$ bien definido.

El elemento $\tau(C)$ de $\bar{K}_1(R)$ dado por

$$\tau(C) = -\sum_{q=0}^{n} (-1)^q [c_q/b_q b_{q-1}]$$

depende únicamente de las clases de equivalencia de las bases c_q [3, p. 365] y este elemento es la *torsión de Whitehead* del complejo C. Hemos seguido a Milnor [3] mas bien que a Whitehead [7] en llegar a la definición de torsión de un complejo.

Consideremos ahora un par (K, L) de CW-complejos finitos y conexos donde $|L|$ es un retracto por deformación de $|K|$. Utilizando la homología singular, definimos el q-grupo de cadena $C_q(K, L)$ sobre los enteros por

$$C_q(K, L) = H_q(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|)$$

donde K^q es el esqueleto de dimensión q de K.

Seleccionemos un punto base fijo de L y por lo tanto de K y sea G el grupo fundamental de K relativo a este punto base; como $|L|$ es retracto por deformación de $|K|$ su grupo fundamental es isomorfo a G. Sea N un subgrupo normal de G. Consideremos al par (K', L') de CW-complejos que es cubierta normal de (K, L), siempre respecto al punto base fijo, tal que $\pi_1(K') \approx \pi_1(L') \approx N$, así que $p: K' \to K$ y $p \mid L': L' \to L$ son cubiertas normales con grupos de translaciones isomorfos a G/N, además $|L'|$ es un retracto por deformación de $|K'|$ y los elementos de G/N actúan como transformaciones celulares.

El complejo $C(K', L')$ es un $Z(G/N)$-complejo acíclico finitamente generado y el número de elementos de una $Z(G/N)$-base es igual al número de celdas de $K - L$.

Si para cada celda e_i orientada de dimensión q de $K - L$, $i = 1, \cdots, \alpha_q$, seleccionamos una celda $e_i' \in K'$ de dimensión q que se proyecta sobre e_i, obtenemos una colección $\{e_i'\}$ que forma una $Z(G/N)$-base de $C_q(K', L')$, pues cualquier otra celda e' que se proyecta sobre e_i es de la forma $\pm we_i'$ con $w \in G/N$. Así, cualquier otra $Z(G/N)$-base de $C_q(K', L')$ de este estilo es de la forma $\{\pm w_i e_i'\}$; siendo la matriz cambio de base

$$\begin{Vmatrix} \pm w_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ 0 & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & \pm w_{\alpha_q} \end{Vmatrix}$$

que es un elemento de $E_{G/K}$. Por lo tanto, si definimos $\tau_N(K, L)$ como la imagen en $Wh(G/N)$ de $\tau(C(K', L')) \in \bar{K}_1(Z(G/N))$ utilizando cualquiera de las bases preferidas que hemos descrito, se obtiene un elemento independiente de la elección de dicha base. El procedimiento para demostrar que está bien definido $\tau_N(K, L)$ es el mismo que en [3, p. 378], esto es, es independiente del punto base que se tome.

Definición. La *torsión* del par (K, L) *relativa al subgrupo normal* N de G es elemento $\tau_N(K, L)$ de $Wh(G/N)$.

Sea $f: X \to Y$ una equivalencia homotópica donde X, Y son CW-complejos finitos y conexos. El cilindro de la transformación f es un CW-complejo M_f cuyo espacio es $|M_f| = |X| \times I \cup |Y|/(x, 1) \sim f(x)$, donde I es el intervalo cerrado $[0, 1]$ y las celdas de M_f son las celdas e de X, $\bar{e}$ de Y y las de la forma $e \times \mathring{I}$, $(\mathring{I} = (0, 1))$ al identificar X con $X \times 0$.

Como f es una equivalencia homotópica, $|X|$ es un retracto fuerte por deformación de $|M_f|$. Así el par (M_f, X) satisface las condiciones que pedimos para definir su torsión relativa. Sea $G = \pi_1(X)$ y N un subgrupo normal de G, la equivalencia f induce un isomorfismo $\pi_1(M_f) \approx G$, entonces si N' se transforma isomorficamente en N, tenemos el elemento $\tau_{N'}(M_f, X) \in Wh(\pi_1(M_f)/N')$

Definición. La imagen de $\tau_{N'}(M_f, X)$ en $Wh(G/N)$ es $\tau_N(f)$ la *torsión relativa al subgrupo* N de la equivalencia homotópica f.

Cuando N es el subgrupo trivial de G, la torsión relativa a N de f se denota $\tau(f)$ y es la torsión (absoluta) de Whitehead de f, lo mismo que $\tau(K, L)$ es la torsión del par (K, L). Así que en este caso, en lugar de referirnos a cubiertas normales, se consideran las cubiertas universales. Varios resultados pueden demostrarse para el caso de la torsión relativa como se demuestran en [3] para la torsión absoluta. Así, por ejemplo, son válidas las proposiciones siguientes.

Si $i:X \to Y$ es la inclusión entonces $i_*\tau_N(i) = \tau_{i(N)}(Y, X)$ con

$$i_*: Wh(\pi_i(X)/N) \approx Wh(\pi_1(Y)/i(N)).$$

Si f y g son homotópicas entonces $\tau_N(f) = \tau_N(g)$.

Definición. Sean K y L del mismo tipo de homotopía, si existe una equivalencia homotópica $f:K \to L$ tal que $\tau(f) = 0$, entonces se dice que K y L son del mismo tipo simple de homotopía y se denota $K \equiv L(\Sigma)$. En forma análoga, diremos que K y L son del mismo tipo simple de homotopía relativo a N si existe una equivalencia homotópica f tal que $\tau_N(f) = 0$.

En §4 demostraremos que si $K \equiv L(\Sigma)$ entonces $K \equiv L(\Sigma \text{ rel. } N)$ para todo subgrupo normal N.

2. La transferencia en los grupos de Whitehead

Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G con índice finito n. En estas condiciones definiremos un homomorfismo

$$\mathrm{tr}: Wh(G) \to Wh(N).$$

Recordemos que el anillo ZG es un ZN-módulo libre bilateral. Se obtiene una base al tomar un sistema de representantes $z_1, \cdots, z_n$ en G de las clases laterales G/N. En efecto, si $r \in ZG$, es de la forma $r = \Sigma m_i x_i$ con $m_i \in Z$, $x_i \in G$, pero $x_i = y_i \bar{x}_i$ donde $\bar{x}_i$ es uno de los elementos z_k determinado por la condición de que $\bar{x}_i$ representa a la clase Nx_i. Por lo que r se expresa en forma única como $r = \Sigma(m_i y_i)\bar{x}_i$, como $y_i \in N$, obtenemos finalmente que $r = \sum_1^n s_k z_k$ con $s_k \in ZN$. Además es claro que los elementos z_k son linealmente independientes sobre ZN.

Dado un *sistema ordenado* de representantes de G/N, $1 = z_1, \cdots, z_n$, definimos un homomorfismo aditivo

$$\delta: ZG \to ZN \tag{2.1}$$

como sigue. Dado $r \in ZG$, lo escribimos como $r = \sum_1^n s_k z_k$ entonces $\delta(r) = s_1$. Así utilizando δ podemos definir n^2 homomorfismos aditivos

$$\theta_{ij}: ZG \to ZN, \qquad (i, j = 1, \cdots, n) \tag{2.2}$$

por

$$\theta_{ij}(r) = \delta(z_i r z_j^{-1})$$

los θ_{ij} definen a su vez un homomorfismo aditivo

$$\theta: ZG \to M(n; ZN) \tag{2.3}$$

donde $M(n; ZN)$ es el anillo de matrices $n \times n$ con coeficientes en ZN. Extendemos θ a

$$\theta: M(m; ZG) \to M(mn; ZN) \tag{2.4}$$

al poner

$$\theta(\| r_{ij} \|) = \|\theta(r_{ij})\|.$$

PROPOSICIÓN 2.5. *$\theta : M(m; ZG) \to M(mn; ZN)$ es un homomorfismo multiplicativo.*

Como $\theta_{ij}(1) = 0$ si $i \neq j$, $\theta_{ii}(1) = 1$, $\theta(I)$ es la matriz I de $M(mn; ZN)$. Ahora veremos que $\theta(rr') = \theta(r)\theta(r')$. Sean $r = \Sigma s_k z_k$, $r' = \Sigma s_k' z_k$. Entonces

$$\theta_{ij}(rr') = \Sigma z_i s_k z_k s_t' z_t z_j^{-1} \tag{2.6}$$

la suma es sobre todos los índices k, t tales que $(z_i z_k z_t z_j^{-1}) \in N$. Por otra parte

$$\textstyle\sum_{u=1}^{n} \theta_{iu}(r)\theta_{uj}(r') = \sum_{u=1}^{n} [\Sigma(z_i s_k z_k z_u^{-1})(z_u s_t' z_t z_j^{-1})] \tag{2.7}$$

donde la suma interior es sobre los índices k, t tales que $(z_i z_k z_u^{-1}) \in N$ y $(z_u z_t z_j^{-1}) \in N$. Pero entonces las dos sumas en (2.6) y en (2.7) coinciden ya que si $(z_i z_k z_t z_j^{-1}) \in N$, se tiene $(z_i z_k) \in N(z_j z_t^{-1}) = Nz_u$ con $(z_u z_t z_j^{-1}) \in N$ y así $(z_i z_k z_u^{-1}) \in N$, además z_u es único. Recíprocamente, si $(z_i z_k z_u^{-1}) \in N$ y $(z_u z_t z_j^{-1}) \in N$, entonces $(z_i z_k z_t z_j^{-1}) \in N$.

Finalmente

$$\theta(\| s_{ij} \| \| s_{ij}' \|) = \| \theta(c_{ij}) \|$$

donde $c_{ij} = \sum_k s_{ij} s_{kj}'$, por lo que $\theta(c_{ij}) = \sum_k \theta(s_{ik})\theta(s_{kj}')$ aquí se trata de suma de matrices. De esto se sigue que

$$\theta(\| s_{ij} \| \| s_{ij}' \|) = \theta(\| s_{ij} \|)\theta(\| s_{ij}' \|).$$

Consecuencia inmediata de la proposición es que θ induce un homomorfismo

$$\theta : GL(m; ZG) \to GL(mn; ZN)$$

que extendemos al grupo lineal infinito

$$\theta : GL(ZG) \to GL(ZN) \tag{2.8}$$

PROPOSICIÓN 2.9. *La imagen bajo θ del subgrupo E_G de $GL(ZG)$ está contenida en E_N.*

Demostración. E_G está generado por matrices infinitas de la forma $I + re_{ij}$ con $i \neq j$, $r \in ZG$ y por matrices diagonales infinitas cuyos elementos en la diagonal están en $\pm G$. Ahora, $\theta(I + re_{ij}) = \theta(I) + \theta(r)(e_{ij})$, esta matriz coincide con la matriz unidad I de $GL(ZN)$ excepto en el bloque $n \times n$ fuera de la diagonal que corresponde a $\theta(re_{ij})$ y es fácil ver que esta matriz puede escribirse como el producto de cuando más n^2 matrices elementales $I + se_{pq}$ con $s \in ZN$. La imagen bajo θ de una matriz diagonal $\| \pm x_i \|$ con $x_i \in G$, es una matriz diagonal de bloques $n \times n$ donde cada bloque en la diagonal es $\pm\theta(x_i)$. Como $x_i \in G$, su imagen tiene un solo elemento distinto de 0 en cada renglón y en cada columna que además está en N, entonces transformaciones elementales del tipo permutación de dos columnas, por ejemplo, transforman esta matriz en una diagonal con elementos en la diagonal en $\pm N$. Pero este tipo de transformaciones equivalen a multiplicar por la derecha por matrices elementales; ahora bien, como el número de elementos distintos de 1 en la matriz diagonal infinita $\| \pm x_i \|$ es finito, la imagen bajo θ de esta matriz es equivalente módulo $E(ZN)$ a una matriz diagonal de E_N.

COROLARIO 2.10. *El homomorfismo* $\theta: GL(ZG) \to GL(ZN)$ *induce un homomorfismo*

$$\mathrm{tr}: Wh(G) \to Wh(N).$$

El homomorfismo tr, lo obtuvimos a partir del sistema ordenado de representantes $1 = z_1, \cdots, z_n$ de G/N en G. Ahora afirmamos

PROPOSICIÓN 2.11. *El homomorfismo* $\mathrm{tr}: Wh(G) \to Wh(N)$ *es independiente del sistema de representantes de* G/N.

Demostración. Primero haremos la demostración cuando el orden en que se consideran los representantes z_k es distinto. Sean $z_1', \cdots, z_n'$ tales que $z_i' = z_j$, $z_j' = z_i$ para dos índices i, j fijos y $z_k' = z_k$ para todo k distinto de i y de j. Es claro que si θ' es el homomorfismo (3.3) relativo a la ZN-base $z_1', \cdots, z_n'$, se tiene que $\theta(r)$ y $\theta'(r)$ difieren en dos columnas y dos renglones; éstos son exactamente las columnas i, j y los renglones i, j que se encuentran intercambiados. Luego por el mismo razonamiento que en la demostración anterior, se tiene que los dos homomorfismos inducen en los grupos de Whitehead el mismo homomorfismo tr.

Sean ahora $z_1', \cdots, z_n'$ otro sistema tal que $z_i' = y_i z_i$ para $y_i \in N$ y toda $i = 1, \cdots, n$. Luego los homomorfismos θ, $\theta': ZG \to M(n; ZN)$ se ven como sigue

$$\theta_{ij}(r) = \Sigma z_i s_k z_k z_j^{-1} \quad \text{con} \quad (z_i z_k z_j^{-1}) \in N$$
$$\theta_{ij}'(r) = \Sigma z_i' s_k' z_k' z_j'^{-1} \quad \text{con} \quad (z_i' z_k' z_j'^{-1}) \in N$$

así

$$\theta_{ij}'(r) = \Sigma y_i (z_i s_k' y_k z_k z_j^{-1}) y_j^{-1}$$

pero como $s_k' y_k = s_k$ ya que son los dos coeficientes de z_k del elemento r al hacer el cambio de base, se sigue que

$$\theta'(r) = y\theta(r)y^{-1}, \qquad y = \begin{Vmatrix} y_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & y_n \end{Vmatrix}$$

De aquí se sigue fácilmente que los homomorfismos inducidos en $Wh(G)$ coinciden. Con lo que queda demostrada la proposición.

3. Propiedades de la transferencia

En analogía con el homomorfismo "transferencia" de la Teoría de Grupos, al homomorfismo tr lo llamaremos transferencia. Así nuestra transferencia en los grupos de Whitehead, está definida de $Wh(G)$ en $Wh(N)$ cuando N es un subgrupo normal de G con índice finito.

Veremos ahora ciertas propiedades de la transferencia.

Si la sucesión exacta

$$1 \to N \to G \to G/N \to 1$$

es separable, es decir cuando G es el producto semidirecto de N por G/N, entonces hay sistema de representantes de G/N que forman grupo. En este caso las matrices $\theta(z_k)$ con $z_1, \cdots, z_n$ este sistema, constan de ceros y de un elemento 1 en cada renglón y en cada columna.

Si además G/N es conmutativo, $\theta(z_k)$ es precisamente la matriz transpuesta de la representación regular de G/N valuada en el elemento w_k de G/N cuyo representante es z_k.

Veamos una propiedad que hace ver que la definición de la transferencia que hemos dado parece adecuada.

LEMA 3.1. *Sea N un subgrupo normal de G con índice n, si i es la inclusión de N en G, entonces en la sucesión*

$$Wh(N) \xrightarrow{i_*} Wh(G) \xrightarrow{\text{tr}} Wh(N) \xrightarrow{i_*} Wh(G)$$

se tiene $i_* \text{ tr } i_*(\alpha) = ni_*(\alpha)$ para todo α en $Wh(N)$.

Demostración. Sea $\alpha = \{\| h_{ij} \|\}_{E_N}$, entonces $i_* \text{ tr } i_*(\alpha) = \{\| \theta h_{ij} \|\}_{E_G}$. Ahora como $h_{ij} \in ZN$,

$$\theta(h_{ij}) = \begin{Vmatrix} h_{ij(1)} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & h_{ij(n)} \end{Vmatrix} \quad \text{con} \quad h_{ij(k)} = z_k\, h_{ij}\, z_k^{-1}$$

para $z_1, \cdots, z_n$ un sistema de representantes de G/N. Entonces,

$$\| \theta(h_{ij}) \| = \begin{Vmatrix} h_{11(1)} & & & & h_{1m(1)} & & & \\ & \cdot & & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \cdots & & \cdot & \\ & & & \cdot & & & & \cdot \\ & & & h_{11(n)} & & & & h_{1m(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{m1(1)} & & & & h_{mn(1)} & & & \\ & \cdot & & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \cdots & & \cdot & \\ & & & \cdot & & & & \cdot \\ & & & h_{n1(m)} & & & & h_{mn(n)} \end{Vmatrix}$$

es equivalente módulo E_N con la matriz diagonal de n bloques donde cada bloque en la diagonal es una matriz $m \times m \; \| h_{ij(k)} \|$, para $k = 1, \cdots, n$ y

$$\| h_{ij(k)} \| = \begin{Vmatrix} h_{11(k)} & \cdot & \cdot & \cdot & h_{1m(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m1(k)} & \cdot & \cdot & \cdot & h_{mn(k)} \end{Vmatrix}$$

pero, en $GL(ZG)$, podemos escribir $\| h_{ij(k)} \| = Z_k \| h_{ij} \| Z_k^{-1}$, donde Z_k es la matriz diagonal con todos sus términos en la diagonal iguales a z_k. Luego

$$i_* \operatorname{tr} i_*(\alpha) = \{Z_1 \| h_{ij} \| Z_1^{-1}\}_{EG} + \cdots + \{Z_n \| h_{ij} \| Z_n^{-1}\}_{EG},$$

de donde

$$i_* \operatorname{tr} i_*(\alpha) = n i_*(\alpha).$$

Lema 3.2. *Si existe un sistema de representantes de G/N en G, $W = \{z_1, \cdots, z_n\}$, tal que el subgrupo N esté contenido en el centralizador de W entonces se tiene* $\operatorname{tr} i_*(\alpha) = n\alpha$.

Demostración. Siguiendo el cálculo anterior, usando la misma notación, se llegó a

$$\operatorname{tr} i_*(\alpha) = \{\| h_{ij(1)} \|\}_{EN} + \cdots + \{\| h_{ij(n)} \|\}_{EN},$$

pero como por hipótesis N está en el centralizador de W, es decir todo el elemento de N conmuta con z_k para toda k, se tiene que $h_{ij(k)} = z_k h_{ij} z_k^{-1} = h_{ij}$ y de aquí el resultado es inmediato.

Observación. En general no se tiene $\operatorname{tr} i_*(\alpha) = n\alpha$ como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sea G_5 el grupo cíclico de orden 5 generado por y; sea G_4 el grupo cíclico de orden 4 generado por w. Consideremos el producto semidirecto G de G_5 por G_4 definido por $y^w = y^2$. Entonces G tiene dos generadores y, w, con relaciones $y^5 = w^4 = 1$, $w^{-1}yw = y^2$. Así G_5 es subgrupo normal de G de índice 4. Por otro lado se sabe que $Wh(G_5)$ es un grupo cíclico infinito generado por una matriz $1 \times 1 \; \| u \|$, donde u es una unidad no trivial de ZG_5 [3, p. 374]. Tomemos $u = -1 + y + y^4$. Entonces si $\operatorname{tr}: Wh(G) \to Wh(G_5)$ lo construimos utilizando $1 = w^0, \cdots, w^3$ como sistema de representantes, se obtiene

$$\operatorname{tr} i_*\{u\}_{EG_5} = \{u_{(0)} u_{(1)} u_{(2)} u_{(3)}\}_{EG_5}$$

donde $u_{(i)} = w^i u w^{-i}$. Como $w^{-1}yw = y^2$, se verifica fácilmente que $w^i y^j w^{-i} = y^{j(2^i)}$. Con esta relación obtenemos $u_{(0)} = u_{(2)} = u$, $u_{(1)} = u_{(3)} = u^{-1} = -1 + y^2 + y^3$. Y finalmente $\operatorname{tr} i_*\{u\}_{EG_5} = 0$ que es distinto de $4\{u\}_{EG_5}$.

4. Relación entre la Torsión Relativa y la Torsión Absoluta

Consideremos nuevamente a (K, L) un par de CW-complejos finitos y conexos con $|L|$ retracto por deformación de $|K|$. Sea N un subgrupo normal de $G = \pi_1(K)$ de índice n. Sea (K', L') un par de CW-complejos cubierta normal de (K, L) con grupo de translaciones de la cubierta isomorfo a G/N, esto es $P'{:}K' \to K$ es una cubierta normal con $\pi_1(K') \approx N$ y $P' \mid L'$ es cubierta de L. Si $(\hat{K}', \hat{L}')$ es un par de complejos cubierta universal de (K', L') se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & (\hat{K}', \hat{L}') \arrow[dl, "\hat{P}', N"'] \arrow[dd, "P, G"] \\
(K', L') \arrow[dr, "P', G/N"'] & \\
 & (K, L)
\end{tikzcd}$$

de cubiertas de pares donde el grupo de translaciones de la cubierta está anotado a continuación de las proyecciones respectivas.

Vamos a comparar $\tau(K, L)$ con $\tau(K', L')$ y con $\tau_N(K, L)$. Para esto, empezamos por elegir bases convenientes en las clases preferidas de los complejos de cadena asociados a estos pares de complejos cubiertas.

Como $(\hat{K}', \hat{L}') \to (K, L)$ es cubierta universal, actúa G como grupo de translaciones y, como antes, opera libremente en $C(\hat{K}', \hat{L}')$; por otro lado también opera en $C(\hat{K}', \hat{L}')$ el grupo N libremente por ser $\hat{P}'{:}\,(\hat{K}', \hat{L}') \to (K', L')$ cubierta. Así que para diferenciar al grupo $C(K', L')$ escribiremos $C(\hat{K}, \hat{L})$ cuando lo consideramos como módulo ZG-libre con base $\{\hat{e}_i^q\}$ $(i = 1, \cdots, \alpha_q;\, q = 0, \cdots, \text{dim. } K)$ y $C(\hat{K}', \hat{L}')$ es el módulo ZN-libre con base $\{\hat{e}_{ki}'^q\}$ fija que seleccionaremos así: sea $1 = z_1, \cdots, z_n$ un sistema de representantes de G/N en G entonces definimos $\hat{e}_{ki}'^q \in K'$ por $\hat{e}_{ki}'^q = z_k \hat{e}_i$. Ahora, asociada a la cubierta $\hat{P}'{:}(\hat{K}', \hat{L}') \to (K', L')$ ésta es una ZN-base de $C(\hat{K}', \hat{L}')$ pues las celdas de $K' - L'$ de dimensión q son de la forma $w_k e_i'$ con $w_k \in G/N$, $e_i' = \hat{P}'(\hat{e}_{1i}')$ que es una celda de K' que se proyecta bajo P' sobre $e_i \in K - L$. Luego $\hat{P}'(\hat{e}_{ki}') = w_k e_i$ pues $\hat{e}_{ki}' = z_k \hat{e}_i$ y que $\hat{P}'$ manda $\hat{e}_i$ en e_i' y z_k en su clase w_k. De esta manera fijamos también la $Z(G/N)$-base $\{e_i'^q\}$ de $C(K', L')$ asociada a la cubierta $P'{:}(K', L') \to (K, L)$.

Referidas a estas bases tenemos las torsiones $\tau(K, L)$, $\tau_N(K, L)$ y $\tau(K', L')$ que están relacionadas según los dos lemas siguientes.

Lema 4.1. *La torsión relativa al subgrupo N del par (K, L) es la imagen de la torsión absoluta del mismo par bajo el homomorfismo inducido por $p{:}G \to G/N$ el homomorfismo natural.*

Esto es,

$$\tau_N(K, L) = p_* \tau(K, L). \tag{4.2}$$

Demostración. Utilizaremos el siguiente resultado de Milnor sobre el cambio de anillos [3, p. 384].

Sea C un R-complejo con base $\{c_i^q\}$ y sea $h{:}R \to R'$ un homomorfismo de anillos. Se define un R'-complejo C' por

$$C' = R' \otimes_R C \tag{4.3}$$

utilizando h. Así C' tiene a $\{1 \otimes c_i^q\}$ como R'-base y su operador frontera $\partial': C_q' \to C_{q-1}'$ está dado por la fórmula

$$(4.4) \qquad \partial'(1 \otimes c_i^q) = \Sigma h(r_{ij})(1 \otimes c_j^{q-1})$$

donde

$$(4.5) \qquad \partial(c_i^q) = \Sigma r_{ij} c_j^{q-1}.$$

Cuando C es acíclico entonces también lo es C' y

$$(4.6) \qquad \tau(C') = h_* \tau(C)$$

donde $h_*: \bar{K}_1(R) \to \bar{K}_1(R')$ está inducido por h.

Para la demostración del lema, basta hacer ver que los complejos $Z(G/N) \otimes_{ZG} C(\hat{K}, \hat{L})$ y $C(\hat{K}', \hat{L}')$ son isomorfos como $Z(G/N)$-complejos con base.

En efecto, la correspondencia $1 \otimes e_i \to e_i'$ es biunívoca entre los elementos de las bases, extendiéndola por linealidad, obtenemos el isomorfismo $Z(G/N)$-equivariante

$$\varphi: Z(G/N) \otimes_{ZG} C(K, L) \to C(K', L').$$

Ahora, como $\hat{P}': (\hat{K}', \hat{L}') \to (K', L')$ es celular (simplicial en el caso de complejos simpliciales) se tiene que si

$$\partial(\hat{e}_i^q) = \Sigma r_{ij} \hat{e}_j^{q-1}, \quad \text{con} \quad r_{ij} \in ZG$$

entonces

$$\partial(e_i' q) = \Sigma p(r_{ij}) e_j'^{q-1}, \quad \text{con} \quad p(r_{ij}) \in Z(G/N)$$

luego como

$$(1 \otimes \hat{e}_i^q) = \Sigma p_{\#}(r_{ij})(1 \otimes \hat{e}_j^{q-1})$$

por (4.4) se sigue que φ es un isomorfismo de $Z(G/N)$-complejos con base. Y por [3, T. 3.1, p. 365] se tiene la igualdad (4.2).

COROLARIO 4.7. *La torsión relativa es un invariante combinatorio. Es decir, si* (K_1, L_1) *es una subdivisión del par* (K, L) *entonces* $\tau_N(K_1, L_1) = \tau_N(K, L)$.

Esto es consecuencia del lema anterior y de que la torsión de Whitehead es un invariante combinatorio en el sentido que hemos precisado.

LEMA 4.8. *La torsión del par* (K', L') *cubierta normal de* (K, L) *con grupo de translaciones* G/N, *es la imagen bajo* $\mathrm{tr}: Wh(G) \to Wh(N)$ *de la torsión* $\tau(K, L)$.

Demostración. Como la transferencia es independiente del sistema de representantes que se tomen, aplicamos la definición de la transferencia para $1 = z_1, \cdots, z_n$ el sistema que elegimos tal que $\hat{e}_{ki}' = z_k \hat{e}_i$.

La convención que hicimos fué escribir $C_q(\hat{K}, \hat{L})$ en lugar de $C_q(\hat{K}', \hat{L}')$ cuando considerábamos este ZN-módulo como ZG-módulo relativo a la base que hemos dado. Pero por otro lado, como todo ZN-módulo puede considerarse como ZG-módulo operando los elementos de G que no están en N en forma trivial, se pueden construir ZG-homomorfismos de $C_q(\hat{K}', \hat{L}')$ en $C_q(K, L)$. Nos conviene utilizar las igualdades $\hat{e}_{ki}' = z_k\hat{e}_i$ que precisamente nos dan el cambio de base del grupo como ZN-módulo a ZG-módulo.

Estas igualdades inducen un isomorfismo

$$\Psi : C(\hat{K}', \hat{L}') \to C(\hat{K}, \hat{L})$$

como Z-complejos. En particular, Ψ es ZN-equivariante pues

$$\Psi(\textstyle\sum_{k,i} y_{ki}\hat{e}_{ki}') = \sum_i (\sum_k y_{ki}z_k)\hat{e}_i = \sum_{k,i} y_{ki}\Psi(\hat{e}_{ki}').$$

Sea $\Psi' : C(\hat{K}, \hat{L}) \to C(\hat{K}', \hat{L}')$ el homomorfismo inverso de Ψ esto es, $\Psi'(\hat{e}_i) = \hat{e}_{1i}'$, $\Psi'(z_k\hat{e}_i) = \hat{e}_{ki}'$ y en general

$$\Psi'(\textstyle\sum_i r_i\hat{e}_i) = \sum_{k,i} s_{ki}\hat{e}_{ki}', \quad \text{donde} \quad r_i = \sum_k s_{ki}z_k$$

porque $\{z_k\}$ es ZN-base de ZG como hemos visto.

Si $\{b_j\}$ $(j = 1, \cdots, \beta_q)$ es una ZG-base para $\partial C_{q+1}(\hat{K}, \hat{L})$ entonces $\Psi'(z_kb_j) = b_{kj}$ forma una ZN-base para $\partial C_{q+1}(\hat{K}', \hat{L}')$.

Ahora, escribiendo las matrices cambio de base se concluye que

$$\theta\| \hat{e}_i^q/b_j^q b_{j'}^{q-1} \| = \| \hat{e}_{ki}'^q/b_{kj}^q b_{kj'}^{q-1} \|, \tag{4.9}$$

donde θ está dado por (2.3) con el sistema de representantes que estamos considerando. Obtenemos de (4.9)

$$\operatorname{tr} \tau(K, L) = -\Sigma(-1)^q\{\theta\| \hat{e}^q/b^q b^{q-1} \|\}_{E_N} = \tau(K', L') \tag{4.10}$$

Corolario 4.11. *Si K y L son del mismo tipo simple de homotopía, entonces $\tau(K', L') = 0$ y $\tau_N(K, L) = 0$.*

El recíproco de este corolario no es cierto como veremos en el ejemplo de los espacios lente.

También podemos escribir las relaciones entre $\tau(f)$, $\tau_N(f)$ y $\tau(f')$ para $f : X \to Y$ equivalencia homotópica de dos CW-complejos finitos y conexos, N subgrupo normal de $G = \pi_1(Y)$ y $f' : X' \to Y'$ equivalencia homotópica que cubre a f respecto a las cubiertas $X' \to X$, $Y' \to Y$ con grupos de translaciones isomorfos a G/N. Traduciendo las torsiones de equivalencias homotópicas a torsiones de pares obtenemos finalmente que

$$\tau_N(f) = p_*\tau(f) \quad \text{y} \quad \tau(f') = \operatorname{tr} \tau(f) \tag{4.12}$$

con $p_* : Wh(G) \to Wh(G/N)$ inducido por el homomorfismo natural y

$$\operatorname{tr} : Wh(G) \to Wh(N).$$

5. Aplicaciones

Cuando G es un producto directo, digamos $G = G_1 \times G_2$ con $n_1 = [G:G_1]$, $n_2 = [G:G_2]$, tenemos dos homomorfismos transferencia

$$\operatorname{tr}_1 : Wh(G_1 \times G_2) \to Wh(G_1), \qquad \operatorname{tr}_2 : Wh(g_1 \times G_2) \to Wh(G_2)$$

y en este caso obtenemos relaciones sencillas. Consideremos el diagrama

$$G_1 \underset{p_1}{\overset{i_1}{\rightleftarrows}} G_1 \times G_2 \underset{i_2}{\overset{p_2}{\rightleftarrows}} G_2$$

de inclusiones y proyecciones naturales, los homomorfismos inducidos satisfacen

$$(5.1) \qquad p_{1*}i_{1*} = 1, \qquad p_{2*}i_{2*} = 1, \qquad p_{1*}i_{2*} = 0, \qquad p_{2*}i_{1*} = 0$$

$$(5.2) \qquad \mathrm{tr}_1\, i_{1*}(\alpha_1) = n_1\alpha_1, \qquad \mathrm{tr}_2 i_{2*}(\alpha_2) = n_2\alpha_2$$

con 1 el homomorfismo identidad y 0 el trivial; (5.1) dice que $i_{1*}Wh(G_1) + i_{2*}Wh(G_2)$ es un sumando directo de $Wh(G_1 \times G_2)$ y (5:2) se obtiene del lema 3.2. Además

$$(5.3) \qquad \mathrm{tr}_1\, i_{2*} = 0, \qquad \mathrm{tr}_2\, i_{1*} = 0$$

pues $\mathrm{tr}_1\, i_{2*}(\alpha_2)$ es la clase en $Wh(G_1)$ de una matriz "entera".

Lema 5.4. *Sea K el subgrupo de $Wh(G_1 \times G_2)$ definido por*

$$K = \mathrm{Ker}\, p_{1*} \cap \mathrm{Ker}\, p_{2*}$$

entonces

$$Wh(G_1 \times G_2) = i_{1*}Wh(G_1) + i_{2*}Wh(G_2) + K.$$

En efecto, sea $\rho: Wh(G_1 \times G_2) \to K$ dado por

$$\rho(\alpha) = \alpha - i_{1*}p_{1*}(\alpha) - i_{2*}p_{2*}(\alpha),$$

$\rho(\alpha) \in K$ pues por (5.1) y la definición de K, $p_{1*}\rho(\alpha) = p_{2*}\rho(\alpha) = 0$; si $\beta \in K$, $\rho(\beta) = \beta$ y finalmente de (5.1) se sigue $\rho i_{1*} = 0$, $\rho i_{2*} = 0$ con lo que queda demostrado el lema.

Un caso particular donde se pueden aplicar los resultados anteriores es el de los espacios lente. Sean, siguiendo la notación acostumbrada [1], [5]

$$(5.5) \qquad L = L(m;\, k_1, \cdots, k_n) \quad \text{y} \quad L' = L(m;\, t_1, \cdots, t_n)$$

dos espacios lente de dimensión $2n - 1$ donde m es un entero positivo mayor que 2 y $(k_j, m) = (t_j, m) = 1$ para $j = 1, \cdots, n$. Supongamos que L y L' son del mismo tipo de homotopía y sea $f: L' \to L$ una equivalencia homotópica. Se sabe entonces por Olum [5] que existe un entero positivo h primo relativo con m tal que

$$(5.6) \qquad h^n k_1 \cdots k_n = \pm t_1 \cdots t_n(m);$$

luego si t_j' es tal que $t_j' t_j = 1(m)$, existe a un entero tal que

$$(5.7) \qquad h^m k_1 \cdots k_n t_1' \cdots t_m' - am = \pm 1.$$

En [8] Whitehead calculó la torsión de f obteniendo

$$(5.8) \qquad \tau(f) = \{\| \lambda_n - a\sigma \|\}_{EG}$$

donde $G = \pi_1(L')$ y los elementos λ_n, σ de ZG están dados por

$$(5.9) \qquad \lambda_n = \sigma_{hk_1t_1'}(y^{t_1}) \cdots \sigma_{hk_nt_n'}(y^{t_n}), \qquad \sigma = \sigma_m(y)$$

para y generador de G y la notación $\sigma_r(y)$ significa

$$\sigma_r(y) = 1 + y + \cdots + y^{r-1}.$$

Si $m = n_1n_2$ con $(n_1, n_2) = 1$ entonces $G = G_1 \times G_2$ para G_1, G_2 grupos cíclicos de ordenes n_2 y n_1 respectivamente, así que $[G:G_1] = n_1$, $[G:G_2] = n_2$. Sean y_1, y_2 generadores de G_1, G_2 tales que $y = y_1y_2$. Los espacios lente

$$L_1 = L(n_2; k_1, \cdots, k_n), \qquad L_2 = L(n_1; k_1, \cdots, k_n)$$
$$L_1' = L(n_2; t_1, \cdots, t_n), \qquad L_2' = L(n_1; t_1, \cdots, t_n)$$

son complejos cubiertas normales de L y L'; la equivalencia f induce

$$f_1: L_1' \to L_1, \qquad f_2: L_2' \to L_2$$

dos equivalencias homotópicas que cubren a f.

Aplicamos los resultados anteriores par $\tau(f_1) \in Wh(G_1)$ y $\tau(f_2) \in Wh(G_2)$. Por un lado el lema 5.4 nos dice

$$\tau(f) = i_{1*}p_{1*}\tau(f) + i_{2*}p_{2*}\tau(f) + \beta$$

para $\beta \in K$. Pero $p_{1*}\tau(f) = \tau_{G_2}(f)$, $p_{2*}\tau(f) = \tau_{G_1}(f)$, luego $\tau(f)$ se expresa en forma única por

$$\tau(f) = i_{1*}\tau_{G_2}(f) + i_{2*}\tau_{G_1}(f) + \beta.$$

Demostraremos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 5.10. *En las condiciones anteriores se tiene*

$$\tau_{G_2}(f) = \tau(f_1) \quad \text{y} \quad \tau_{G_1}(f) = \tau(f_2)$$

además $\beta = 0$ si y solo si f es una equivalencia simple de homotopía.

Es decir que en este caso

$$p_{1*}\tau(f) = \mathrm{tr}_1\, \tau(f), \qquad p_{2*}\tau(f) = \mathrm{tr}_2\, \tau(f).$$

Demostración. Sea $\tau(f)$ dado por (5.8) entonces

$$(5.11) \quad \tau(f_u) = \{\| \sigma_{hk_1t_1'}(y_u^{t_1}) \cdots \sigma_{nk_nt_n'}(y_u^{t_n}) - a_u\sigma_{nu'}(y_u) \|\}E_{G_u}$$

para $u = 1,2$ y $u' \neq u$. Pero podemos calcular a_u de (5.7) resultando $a_u = an_u$. Por otro lado,

$$(5.12) \quad p_{u*}\tau(f) = \{\| \sigma_{hk_1t_1'}(p_u(y^{t_1})) \cdots \sigma_{hk_nt_n'}(p_u(y^{t_n})) - a\sigma_m(p_u(y)) \|\}_{E_{G_u}}$$

pero $p_uy = y_u$, y como $\sigma_m(y) = \sigma_{n_2}(y_1)\sigma_{n_1}(y_2)$ así que $\sigma_m(p_u(y)) = n_u\sigma_{n_{u'}}(y_u)$; luego $p_{u*}\tau(f) = \tau(f_u)$.

Supongamos ahora que $\beta = 0$, esto es

$$\tau(f) = i_{1*}\tau(f_1) + i_{2*}\tau(f_2)$$

aplicando el homomorfismo tr_1 a esta igualdad se tiene de (5.2) y (5.3)

$$\tau(f_1) = \mathrm{tr}_1\, \tau(f) = \mathrm{tr}_1\, i_1\tau(f_1) + \mathrm{tr}_1\, i_2\tau(f_2) = n_1\tau(f_1)$$

de donde $(n_1 - 1)\tau(f_1) = 0$, lo que significa que $\tau(f_1)$ es un elemento de torsión en $Wh(G_1)$ lo que implica $\tau(f_1) = 0$ pues G_1 es un grupo cíclico de orden finito n_1 [2, teorema 3].

En forma análoga resulta $\tau(f_2) = 0$ por lo tanto $\tau(f) = 0$.

Para terminar, daremos un ejemplo particular donde $\tau(f) \neq 0$ y sin embargo $\tau(f_1) = 0$ y $\tau(f_2) = 0$.

Consideremos los espacios lente de dimensión 3, $L(20; 1{,}9)$ y $L(20; 1{,}19)$. Para $h = 3, 7, 13$ y 17 se cumple $h^2k_1k_2 \equiv \pm t_1t_2\ (20)$ donde $k_1 = t_1 = 1$, $k_2 = 9$, $t_2 = 19$ y $h^2 \equiv 9(20)$ además son los únicos valores de h menores que 20 que satisfacen la condición (5.6). Utilizaremos el siguiente resultado de Whitehead basado en la forma particular de $\tau(f)$ y en un resultado de W. Franz [1].

LEMA 5.13. *Los espacios lente $L(m; k_1, \cdots, k_n)$ y $L(m; t_1, \cdots, t_n)$ son del mismo tipo simple de homotopía si y solo si existen h un entero primo relativo con m y una permutación p de $(1, 2, \cdots, n)$ tales que*

$$hk_i \equiv \pm t_{p(i)}(m). \tag{5.14}$$

Así en nuestro caso los dos espacios lente no son del mismo tipo de homotopía, sin embargo $L(5; 1{,}9) \equiv L(5; 1{,}19)(\Sigma)$ pues $9 \equiv 19\ (5)$ y $L(4; 1{,}9) \equiv L(4; 1{,}19)(\Sigma)$ ya que en general $Wh(G_4) = 0$, G_4 grupo cíclico de orden 4, lo que significa que toda equivalencia homotópica tiene torsión 0 [2, T. 14, p. 243].

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

REFERENCIAS

[1] W. FRANZ, *Über die Torsion einer Überdeckung*, J. reine angew. Math., **173** (1935), 245–54.
[2] G. HIGMAN, *The units of group-rings*, Proc. London Math. Soc., **46** (1940), 231–48.
[3] J. MILNOR, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc., **72** (1966), 358–426.
[4] ———, *Two complexes which are homeomorphic but combinationally distinct*, Ann. of Math., **74** (1961), 575–90.
[5] P. OLUM, *Mappings of manifolds and notion of degree*, Ann. of Math., **58** (1953), 458–80.
[6] J. STALLINGS, *Whitehead torsion of free products*, Ann. of Math., **82** (1965), 354–63.
[7] J. H. C. WHITEHEAD, *Simple homotopy types*, Amer. J. Math., **72** (1950), 1–57.
[8] ———, Simple homotopy types, (mimeographed notes) Oxford 1959.