EL LEMA DE URYSOHN Y EL TEOREMA DE EXTENSION DE TIETZE EN ESPACIOS UNIFORMES

POR IGNACIO BELLO

El propósito del presente trabajo es la demostración de dos teoremas sobre la existencia y extensión de cierto tipo de funciones uniformemente continuas de un espacio uniforme E en $I = [-1, 1]$.

Las definiciones usadas para espacio uniforme, uniformidad, entorno de una uniformidad (definida en E por $\mathcal{U}$), base para una uniformidad, topología uniforme y continuidad uniforme pueden ser encontradas en Bourbaki [1; p. 169–175]. Cuando llamamos al espacio $(E, \mathcal{U})$ un espacio topológico se entenderá que la topología con que el espacio se encuentra equipado será la topología uniforme. Además, cuando un espacio topológico compacto (por ejemplo I) es mencionado, asumimos que este espacio puede ser considerado, a la vez, como un espacio uniforme con la uniformidad única dada por [1, p. 199; 200, Teorema 1].

Sean E un conjunto y U un subconjunto de $E \times E$. Usando la notación de Bourbaki [1], escribiremos

$$\Delta = \{(x, x) : x \in E\}$$

$$U^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in U\}$$

$$U(x) = \{y : (y, x) \in U\}$$

y si M es un subconjunto de E, donde A y B son subconjuntos de $E \times E$, será

$$U(M) = \bigcup \{U(x) : x \in M\}$$

y $$A \cdot B = \{(x, y) : \exists z \in E \text{ tal que } (x, z) \in A \text{ y } (z, y) \in B\}$$

Un subconjunto M de $E \times E$ sera llamado *simétrico* si $M = M^{-1}$.

LEMA 1. *Sea $(E, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Los entornos abiertos y simétricos de la uniformidad definida en E por $\mathcal{U}$ forman una base para $\mathcal{U}$.* [2, p. 179, Teorema 6].

LEMA 2. *Sean $(E, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y U un entorno de la uniformidad definida en E por $\mathcal{U}$. Existe una sucesión $\{U_n\}$, $n \geqslant 0$, de entornos simétricos de la uniformidad definida en E por $\mathcal{U}$ tal que:*

1) $U_0 = E \times E$

2) $U_1 \subseteq U$

3) $U_{n+1} \cdot U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subseteq U_n$ para toda $n \geqslant 0$

Además, $\{U_n\}$, $n \geqslant 0$, es una base para una uniformidad $\mathcal{V}$ en E y la función identidad $i : (E, \mathcal{U}) \to (E, \mathcal{V})$ es uniformemente continua.

Demostración: La existencia de la sucesión antes mencionada es una consecuencia directa de la definición de una uniformidad y el Lema 1. Para demostrar el resto del Lema sea $\mathcal{V} = \{V : E \times E \supseteq V \supseteq U_n \text{ para alguna } n\}$. Ahora nos es posible verificar, de acuerdo con las definiciones, que $\mathcal{V}$ es una uniformidad en E, $\{U_n\}$, $n \geqslant 0$, es una base de $\mathcal{V}$, y que $i : (E, \mathcal{U}) \to (E, \mathcal{V})$ es uniformemente continua.

En el teorema anterior es preciso notar que, en general, la topología uniforme inducida por $\mathcal{U}$ es mas fina que la inducida por $\mathcal{V}$.

LEMA 3. *Sean $(E, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y U un entorno de la uniformidad definida en E por $\mathcal{U}$. Existe un pseudo métrico d en E que satisface la condición $\{(x, y) : d(x, y) < \frac{1}{2}\} \subseteq U$. Además, la función identidad $i : (E, \mathcal{U}) \to (E, d)$ es uniformemente continua.*

Demostración: Usémos el Lema 2 para obtener la uniformidad $\mathcal{V}$ en E asociada con U y entonces podemos emplear [2, p. 185–186, Teoremas 12 y 13] para obtener el resultado deseado.

Cuando llamemos al espacio métrico (o pseudo métrico) (E, d) un espacio uniforme, será entendido que E está equipado con la uniformidad engendrada por la sucesión $\{V_n\}$, $n \geqslant 0$, $V_i = \{(x, y) : d(x, y) < 2^{-i}\}$

DEFINICIÓN 1. Sea $(E, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y sean C y C' subconjuntos de E. Diremos que C y C' están *uniformemente separados* o *$\mathcal{U}$-separados*, si existe un U, entorno simétrico de la uniformidad definida en E por $\mathcal{U}$, tal que $(C \times C') \cap U = \varnothing$.

DEFINICIÓN 2. Sea (E, d) un espacio pseudo métrico. *La distancia de un punto x a un conjunto no vacio F, denotada por $d(x, F)$*, es el número real único inf $\{d(x, y) : y \in F\}$. *La distancia de un conjunto no vacio F a otro conjunto no vacío F', denotada por $d(F, F')$*, es el número real único inf $\{d(x, y)$ donde $y \in F'$ y $x \in F\}$.

TEOREMA 1. *Sean C y C' conjuntos $\mathcal{U}$-separados y no vacíos en un espacio uniforme $(E, \mathcal{U})$. Existe una función $f : (E, \mathcal{U}) \to I$ uniformemente continua y tal que $f(C) = -1$ y $f(C') = 1$.*

Demostración: Sea U un entorno simétrico de la uniformidad definida en E por $\mathcal{U}$ tal que $U \cap (C \times C') = \varnothing$. De acuerdo con el lema 3, existe un pseudo métrico d en E tal que la función identidad $i : (E, \mathcal{U}) \to (E, d)$ es uniformemente continua y

$$(1)\ \{(x, y) : d(x, y) < \tfrac{1}{2}\} \subseteq U.$$

Sea $g : (E, d) \to I$ dada por $$g(x) = \frac{d(x, C) - d(x, C')}{d(x, C) + d(x, C')}$$

g esta bien definida ya que la ecuación (1) implica que si $(p, q) \in C \times C'$ se verifica que $d(p, q) \geqslant \frac{1}{2}$ y por lo tanto $d(C, C') \geqslant \frac{1}{2}$. Las desigualdades anteriores demuestran que $d(x, C) + d(x, C') \geqslant \frac{1}{2}$ para las x en E. Puede verificarse facilmente que $g:(E, d) \to I$ es uniformemente continua y que $g(C) = 1$ y $g(C') = -1$. Si ahora definimos $f = g \circ i$ puede verse que f es la función uniformemente continua deseada.

Nota: Sea $(E, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y F un subconjunto de E. Se verifica que $\mathcal{U}_F = \{U \cap (F \times F): U \in \mathcal{U}\}$ induce una uniformidad relativa en F. Además, la topología uniforme inducida por $\mathcal{U}_F$ en F es la topología relativa en F inducida por la topología uniforme en E.

LEMA 4. *Sea $(E, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y F un subconjunto de E. Si C y C' son subconjuntos $\mathcal{U}_F$-separados en F se verifica que C y C' estan $\mathcal{U}$-separados en E.*

La demostración de este lema puede ser facilmente obtenida mediante el uso de la Definición 1 y la Nota anterior.

TEOREMA 2. *Sea $(E, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y F un subconjunto de E. Si f es una función uniformemente continua del espacio uniforme $(F, \mathcal{U}_F)$ en I, existe una función g uniformemente continua de $(E, \mathcal{U})$ en I tal que g es una extensión de f.*

Demostración: Sea $f_1 = f$. Definamos $r_n = (\frac{1}{2})(\frac{2}{3})^n$ para todos los enteros $n > 0$. Se verifica que $|f_1| \leqslant 3r_1$. Usando inducción, supongamos que tenemos una función f_n, uniformemente continua de $(F, \mathcal{U}_F)$ en I tal que $|f_n| \leqslant 3r_n$. Sean $A_n = \{x \in F: f_n(x) \leqslant -r_n\}$ y $B_n = \{x \in F: f_n(x) \geqslant r_n\}$. Como f_n es uniformemente continua A_n y B_n estan $\mathcal{U}_F$ separados en $(F, \mathcal{U}_F)$ y, de acuerdo con el lema 4, $\mathcal{U}$-separados en $(E, \mathcal{U})$. Si A_n y B_n no son vacíos el teorema 1 nos indica que existe una función h_n uniformemente continua de $(E, \mathcal{U})$ en I tal que $h_n(A_n) = -1$ y $h_n(B_n) = 1$. En este caso sea $g_n = r_n h_n$. De esta manera obtenemos $g_n(A_n) = -r_n$, $g_n(B_n) = r_n$ y $|g_n| \leqslant r_n$.

$$\text{Si } A_n = \varnothing \quad \text{y} \quad B_n \neq \varnothing, \qquad \text{sea } g_n = r_n$$

$$\text{Si } A_n \neq \varnothing \quad \text{y} \quad B_n = \varnothing, \qquad \text{sea } g_n = -r_n$$

$$\text{Si } A_n = B_n = \varnothing, \qquad \text{sea } g_n = 0.$$

En todos los casos anteriores la función g_n es uniformemente continua de $(E, \mathcal{U})$ en $[-r_n, r_n]$. Defínase $f_{n+1}(x) = f_n(x) - g_n(x)$ para todas las x en F. Puede verificarse que f_{n+1} es uniformemente continua y $|f_{n+1}| \leqslant 2r_n = 3r_{n+1}$.

Sea $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ para cada x en E. La serie converge uniformemente y cada $g_n(x)$ es uniformemente continua, lo cual implica que g es uniformemente continua. Para las x en F tenemos que $(g_1(x) + \cdots + g_n(x)) = ((f_1(x) - f_2(x)) + \cdots + (f_n(x) - f_{n+1}(x)) = f_1(x) - f_{n+1}(x)$. Como la sucesión $\{f_n(x): n$ un entero positivo$\}$ converge a cero para todas las x en F tenemos que $g(x) = f_1(x) = f(x)$, luego entonces g extiende a f, lo cual termina la demostración.

COROLARIO: *Sea $(E, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y F un subconjunto de E. Si f es una función uniformemente continua del espacio uniforme $(F, \mathcal{U}_F)$ en I^n, existe una función g uniformemente continua de $(E, \mathcal{U})$ en I^n tal que g es una extensión de f.*

Demostración: Sea f_i la i-ésima función coordenada de f (donde $f(x) = (f_1(x),$

$\cdots, f_n(x))$. Para cada i, f_i es uniformemente continua de $(F, \mathcal{U}_F)$ en I[2, p. 183, Teorema 10]. Luego entonces, usando el teorema 2, cada f_i posee una extensión uniformemente continua, g_i, que extiende f_i a $(E, \mathcal{U})$. Por lo tanto puede verificarse que $g(x) = (g_1(x), \cdots, g_n(x))$ es la extensión uniformemente continua deseada.

Universidad del Sur de la Florida

Referencias

[1] N. Bourbaki, General Topology, 1ra Parte, Addisson Wesley Publishing Company (Traducción al Inglés).
[2] J. Kelley, General Topology, Van Nostrand, 1955.