GENERALIZACION DEL CONCEPTO DE ALGEBRICIDAD SOBRE CAMPOS VALUADOS COMPLETOS

POR IGNACIO CANALS*

Introducción

Sea k un campo valuado (con valuación no-arquimedeana) completo, y K una cerradura algebraica valuada de k.

Sea S_k el conjunto de polinomios irreducibles con coeficientes en k y primer coeficiente igual a la unidad.

Al conjunto S_k se le da la estructura de un espacio ultramétrico, utilizando la ultramétrica de Krasner [2]:

$$f, g \in S_k; \qquad d(f, g) = |f(\beta)|^{m^{-1}} = |g(\alpha)|^{n^{-1}} = |R(f, g)|^{n^{-1}m^{-1}},$$

donde α y β son raíces cualesquiera de f y g respectivamente, m es el grado de f y n es el grado de g. La valuación $|\cdots|$ es la valuación de k, que por ser k completo se extiende en forma única a K.

Sea $\hat{S}_k$ la completación del espacio S_k con la ultramétrica mencionada y $\hat{K}$ la completación de K con la valuación $|\cdots|$ de k.

Por ser k valuado completo, los automorfismos del grupo de Galois $G(K/k)$ son isometrías (principio de M. Ostrowski, Math. Z. **39** (1934–1935), 269–320; ver pp 298–302).

Habiendo comprobado que S_k no es completo (ver 5.4) con relación a la ultramétrica de Krasner, se quiere extender el concepto de raíz de un polinomio $f \in S_k$, a los elementos de la completación $\hat{S}_k$, raíces que serán elementos de la completación $\hat{K}$ de la cerradura algebraica K del campo base k. Para ello se exponen algunos conceptos básicos de la teoría de la ramificación para extensiones algebraicas finitas. Después se estudian las propiedades necesarias de las sucesiones de Cauchy $\{\alpha_i\}$, donde α_i es algebraico sobre k, para dar la definición de elemento algebraico generalizado, es decir, si $\alpha = \lim \alpha_i$ cuando i tiende a ∞, diremos cuándo α es algebraico generalizado sobre k.

Una vez establecida esta generalización, se considerará un campo base k completo y valuado no-arquimedeano de característica cero, cuyo campo de clases residuales sea de característica $p \neq 0$. (Es el caso, por ejemplo, de la completación de los racionales con relación al primo p.). Se demostrará, dando un contraejemplo, que la completación $\hat{K}$ de la cerradura algebraica K de k, contiene estrictamente a la cerradura algebraica generalizada de k, es decir, que existen $\alpha \in \hat{K}$ que no son raíces generalizadas de ningún elemento de $\hat{S}_k$.

Se dan también ejemplos de elementos algebraicos generalizados que no lo son en el sentido ordinario, y se estudian algunas propiedades de los mismos.

---

* Durante la elaboración de este trabajo, el autor fue becario del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

Se demuestra que la cerradura algebraica generalizada de k es un campo.

Finalmente se hace una generalización del concepto $k[x]/(f(x))$, donde $f(x) \in k[x]$ es irreducible, para algunos elementos de $\hat{S}_k$.

1. Notación y definiciones

Los conceptos que se exponen a continuación pueden consultarse en [3].

Sea α cualquier raíz de $f \in S_k$, entonces el valor $v(\alpha, \sigma) = \omega(\sigma\alpha - \alpha)$, para un isomorfismo σ en el hipergrupo de Galois $G(k(\alpha)/k)$ de $k(\alpha)/k$, se denomina *número característico* de $k(\alpha)/k$ en α. Donde $\omega(\cdots)$ es el orden valuativo de la valuación $|\cdots|$ de K, es decir, $\omega(\cdots) = -\ln|\cdots|$.

Consideremos todos los valores distintos que toma $v(\alpha, \sigma)$ cuando σ recorre el hipergrupo $G(k(\alpha)/k)$:

$$v(0, \alpha) < v(1, \alpha) < \cdots < v(c, \alpha) < \cdots < v(i-1, \alpha) < v(i, \alpha) = +\infty$$

y haciendo $v(c, \alpha) = -\ln r(c, \alpha)$, es decir, $r(c, \alpha) = |\sigma\alpha - \alpha|$ para cierto $\sigma \in G(k(\alpha)/k)$; obtenemos también la sucesión:

$$r(0, \alpha) > r(1, \alpha) > \cdots > r(c, \alpha) > \cdots > r(i-1, \alpha) > r(i, \alpha) = 0.$$

Por la isometría de los isomorfismos $\sigma \in G(k(\alpha)/k)$, los valores $r(c, \alpha)$ $(c = 0, \cdots, i)$ no dependen de la raíz α de f que se elija. En vista de lo cual adoptaremos la siguiente notación: $v(c, \alpha) = v(c, f)$, que se denomina el *c-ésimo número característico de $k(\alpha)/k$ en α*, y que son los mismos para cualquier raíz α de $f = \mathrm{Irr}(\alpha, k)$, por lo tanto podríamos decir, que es el *c-ésimo número característico de f sobre k.*

Análogamente escribiremos:

$$r(c, \alpha) = r(c, f),$$

que es la distancia de α a alguno de sus conjugados $\sigma\alpha$ con relación a k.

Denominaremos por:

$$n(c, f)/n(i, f)$$

el número de elementos $\sigma \in G(k(\alpha)/k)$ tales que $v(\alpha, \sigma) \geq v(c, f)$, es decir, el número de raíces distintas de f que distan de α menos o igual que $r(c, f)$. Luego $n(i, f)$ es el índice de inseparabilidad de f, que en el caso de ser k de característica cero, será igual a uno.

El conjunto de los isomorfismos $\sigma \in G(k(\alpha)/k)$ tales que $v(\alpha, \sigma) \geq v(c, f)$ se denomina el *c-ésimo hipergrupo característico* de $k(\alpha)/k$ en α, y se designa por $Z(c, f; k(\alpha)/k)$.

De la misma teoría de ramificación para el caso no-galoisiano sabemos que $n(c, f)$ divide a $n(c-1, f)$; lo cual resulta, por otra parte, inmediato del hecho que $\sigma \in G(k(\alpha)/k)$ es isometría. En efecto, sea σ tal que $|\sigma\alpha - \alpha| = r(c-1, f)$, entonces si hay $n(c, f)$ raíces de f que distan de $\alpha \leq$ que $r(c, f)$, hay el mismo número de raíces de f que distan de $\sigma\alpha \leq$ que $r(c, f)$, y como $r(c, f) < r(c-1, f)$, todas esas raíces distan de α exactamente $r(c-1, f)$.

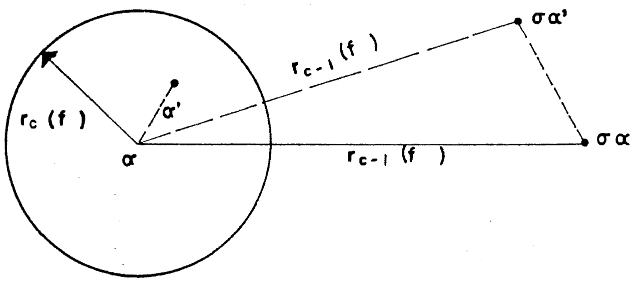

FIG. 1.

2. Expresión de la distancia en S_k

La expresión de la distancia $d(f, g)$ fue publicada por primera vez en (página 183 de [4]), utilizando para su demostración el polígono de Newton de un polinomio. Aquí daremos otra demostración más geométrica. Para ello veremos primero un lema.

Sea $\Delta(f, g)$ el mínimo de las distancias entre los ceros de f y los ceros de g. Debido a la isometría de los automorfismos $\sigma \in G(K/k)$ para calcular $\Delta(f, g)$ basta fijar cualquier raíz α de f y hallar el mínimo de las distancias de α a las raíces de g:

$$\Delta(f, g) = \mathrm{Min}_{g(\beta)=0} |\alpha - \beta|$$

Supongamos que $\Delta(f, g)$ es tal que

$$r(0,f) > r(1,f) > \cdots > r(c-1,f) > \Delta(f,g) \geq r(c,f) > \cdots > r(i,f) = 0$$
$$r(0,g) > r(1,g) > \cdots > r(c'-1,g) > \Delta(f,g) \geq r(c',g) > \cdots > r(i,g) = 0.$$

LEMA 2.1 *Sean $f, g \in S_k$, entonces se tiene que:*
$r(c-q,f) = r(c'-q,g)$; $n(c-q,f)/n(c,f) = n(c'-q,g)/n(c',g)$; $c = c'$ *para* $q = 1, 2, \cdots, c$.

Es decir, las distancias entre las raíces de f que son mayores que $\Delta(f, g)$ son iguales a las distancias entre las raíces de g que son mayores que $\Delta(f, g)$. Y el número de raíces de f que distan de α menos o igual que $r(c-q, f)$ dividido por el número de las que distan de α menos o igual que $\Delta(f, g)$ es igual al correspondiente de g.

Demostración. Consideremos el círculo $C(f, g)$ de centro α y radio $\Delta(f, g)$. Sea β raíz de g tal que $|\alpha - \beta| = \Delta(f, g)$, entonces $\beta \in C(f, g)$. En este círculo (con su circunferencia) se encuentran las $n(c, f)/n(i, f)$ raíces distantas de f que distan de α menos o igual que $\Delta(f, g)$, y también las $n(c, g)/n(i, g)$ raíces de g que distan de β menos o igual que $\Delta(f, g)$ [se recuerda que la valuación $|\cdots|$ es no-arquimedeana, y que por tanto define una ultramétrica].

Sea $\sigma \in G(K/k)$ tal que $\sigma\alpha = \alpha'$ y $|\sigma\alpha - \alpha| = r(c-1,f) > \Delta(f, g)$. Entonces, por la isometría de σ se tiene $|\alpha - \beta| = |\sigma\alpha - \sigma\beta| = |\alpha' - \beta'| = \Delta(f,g)$.

Lo cual implica, considerando los triángulos $\alpha\beta\alpha'$ y $\beta\alpha'\beta'$, que:

$$r(c-1,f) = |\alpha - \alpha'| = |\beta - \alpha'| = |\beta - \beta'|$$

luego la distancia $r(c-1,f)$ aparece entre las $r(q,g)$ y debe ser precisamente la $r(c'-1,g)$, pues haciendo el mismo razonamiento para β'' raíz de g tal que $|\beta - \beta''| = r(c'-1,g)$ llegaríamos a la conclusión de que existe α'' tal que $|\alpha - \alpha''| = r(c'-1,g)$. Una vez demostrado que $r(c-1,f) = r(c'-1,g)$, repetimos el razonamiento para el círculo $C(\alpha, r(c-1,f))$ de centro α y radio $r(c-1,f)$, y demostramos que $r(c-2,f) = r(c'-2,g)$, etc.

Sea $b(c-1,f)$ el número de círculos de centro una raíz de f y de radio $\Delta(f,g)$, que disten entre sí $r(c-1,f)$.

Por lo acabado de demostrar se tiene $b(c-1,f) = b(c'-1,g)$, lo cual implica:

$$b(c-1,f) - 1 = \frac{n(c-1,f) - n(c,f)}{n(c,f)} = \frac{n(c'-1,g) - n(c',g)}{n(c',g)},$$

de donde

$$\frac{n(c-1,f)}{n(c,f)} = \frac{n(c'-1,g)}{n(c',g)}.$$

Repitiendo el razonamiento para $b(c-2,f)$ número de círculos de centro una raíz de f y radio $r(c-1,f)$ que distan entre sí $r(c-2,f)$, obtenemos

$$\begin{aligned} b(c-2,f) - 1 &= \frac{n(c-2,f) - n(c-1,f)}{n(c-1,f)} \\ &= \frac{n(c'-2,g) - n(c'-1,g)}{n(c'-1,g)}, \end{aligned}$$

de donde $n(c-2,f)/n(c-1,f) = n(c'-2,g)/n(c'-1,g)$, que multiplicada por la anterior:

$$\frac{n(c-2,f)}{n(c,f)} = \frac{n(c'-2,g)}{n(c',g)},$$

con lo cual obtenemos la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} d(f,g) &= |f(\beta)|^{n(0,f)^{-1}} = |g(\alpha)|^{n(0,g)^{-1}} \\ &= (\Delta(f,g)^{n(c,f)} r(c-1,f)^{n(c-1,f)-n(c,f)} \\ &\quad \cdots r(0,f)^{n(0,f)-n(1,f)})^{n(0,f)^{-1}}. \end{aligned}$$

Puesto que la distancia de β, raíz que dista de $\alpha\Delta(f,g)$, dista de las $n(c,f)$ raíces dentro del círculo de centro α y radio $\Delta(f,g)$ exactamente $\Delta(f,g)$. Análogamente la distancia de β a las $n(c-1,f) - n(c,f)$ raíces de f que distan de $\alpha r(c-1,f)$ es exactamente $r(c-1,f)$ y así sucesivamente.

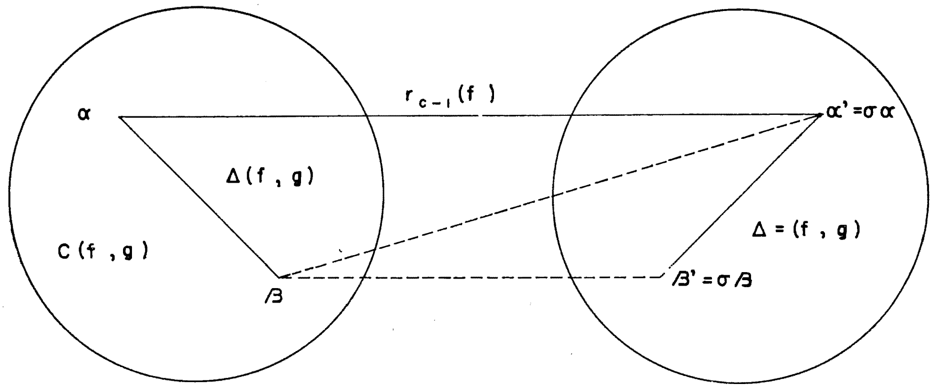

FIG. 2.

3. Estudio de las sucesiones $\{\alpha_i\} \subset K$ que son de Cauchy

LEMA 3.1 *Sea* $\{\alpha_i\} \subset K$ *una sucesión que es de Cauchy, y sea* $f_i = \operatorname{Irr}(\alpha_i, k) \in S_k$. *Entonces existe otra sucesión* $\{\alpha_i'\}$, *con el mismo límite* $\{\alpha_i\}$, y α_i' *raíz de* f_i, *tal que* $|\alpha_{i+1}' - \alpha_i'| = \Delta(f_i, f_{i+1})$.

Demostración. Sea $\lim \alpha_i = \alpha \in K$ cuando i tiende a ∞. Si α_i no es de las raíces de f_i más próximas a α, la sustituimos por una que sí lo sea. Evidentemente la nueva sucesión tiene el mismo límite que la dada. Podemos, pues, suponer que la sucesión $\{\alpha_i\}$ cumple con la propiedad de que α_i es de las raíces de f_i que están más próximas a α.

Supongamos que $|\alpha_{i+1} - \alpha_i| > \Delta(f_i, f_{i+1})$, entonces demostraremos que $|\alpha - \alpha_i| = |\alpha - \alpha_{i+1}|$ y que existe α_{i+1}', raíz de f_{i+1} de las más próximas a α, tal que $|\alpha_{i+1}' - \alpha_i| = \Delta(f_i, f_{i+1})$.

Por ser $|\alpha_{i+1} - \alpha_i| > \Delta(f_i, f_{i+1})$, existen α_i' y α_{i+1}' de f_i y f_{i+1} respectivamente, tales que:

$$|\alpha_{i+1} - \alpha_i'| = |\alpha_i - \alpha_{i+1}'| = \Delta(f_i, f_{i+1}) < |\alpha_{i+1} - \alpha_i|,$$

lo cual implica:

$$|\alpha_{i+1} - \alpha_i| = |\alpha_i - \alpha_i'| = |\alpha_{i+1} - \alpha_{i+1}'| > |\alpha_{i+1} - \alpha_{i+1}'|,$$

que a su vez implica:

$$|\alpha_{i+1}' - \alpha_i'| = |\alpha_{i+1} - \alpha_{i+1}'| > \Delta(f_i, f_{i+1}).$$

Y de esta última desigualdad deduciremos que $|\alpha - \alpha_i| = |\alpha - \alpha_{i+1}|$.

En efecto, supongamos que $|\alpha - \alpha_i| > |\alpha - \alpha_{i+1}|$, entonces:

$$|\alpha - \alpha_i| = |\alpha_i - \alpha_{i+1}| > \Delta(f_i, f_{i+1}),$$

y considerando el triángulo α, α_{i+1}, α_i' deducimos que

$$|\alpha - \alpha_i'| \leq \text{Máx}\ (|\alpha - \alpha_{i+1}|, |\alpha_{i+1} - \alpha_i'| < |\alpha - \alpha_i|$$

lo cual contradice el que α_i sea una de las raíces de f_i más próxima a α.

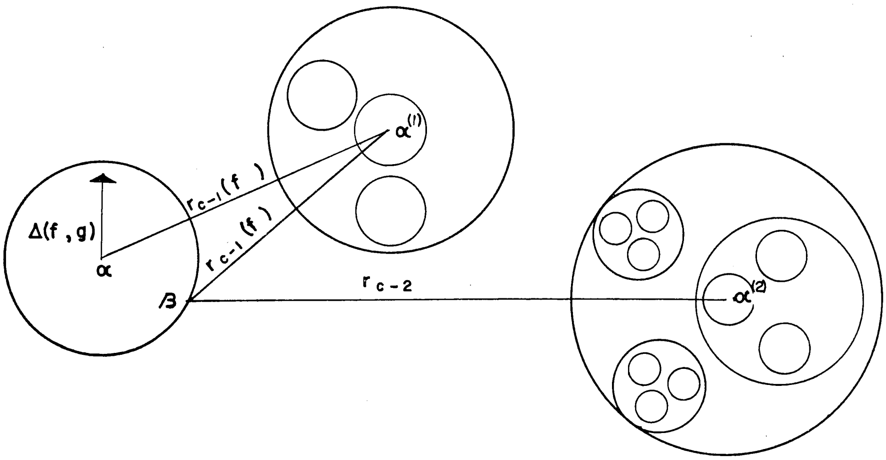

FIG. 3.

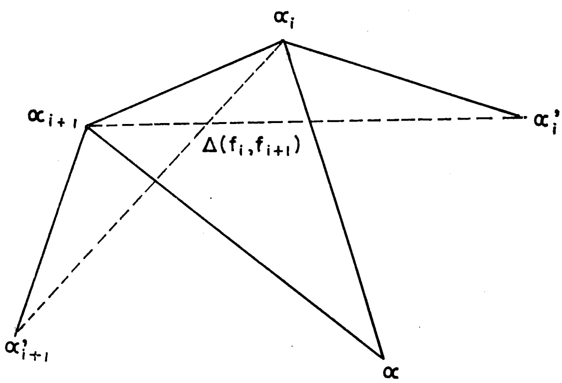

FIG. 4.

Si $|\alpha - \alpha_i| < |\alpha - \alpha_{i+1}|$, entonces:

$$|\alpha - \alpha_{i+1}| = |\alpha_i - \alpha_{i+1}| > \Delta(f_i, f_{i+1}),$$

y considerando el triángulo α, α_i, α_{i+1}' deducimos que:

$$|\alpha - \alpha_{i+1}'| \leq \text{Máx}\,(|\alpha - \alpha_i|, |\alpha_i - \alpha_{i+1}'|) < |\alpha - \alpha_{i+1}|,$$

lo que contradice el que α_{i+1} sea una de las raíces de f_{i+1} más próxima a α.

Por lo tanto $|\alpha - \alpha_i| = |\alpha - \alpha_{i+1}|$, lo cual implica que

$$\Delta(f_i, f_{i+1}) < |\alpha_i - \alpha_{i+1}| \leq |\alpha - \alpha_{i+1}|,$$

y como se tiene

$$\Delta(f_i, f_{i+1}) = |\alpha_i - \alpha_{i+1}'|,$$

deducimos que

$$|\alpha - \alpha_{i+1}'| = |\alpha - \alpha_i| = |\alpha - \alpha_{i+1}|$$

luego podemos sustituir α_{i+1} por α_{i+1}' sin que cambie el límite de la sucesión, y tenemos que

$$|\alpha_{i+1}' - \alpha_i| = \Delta(f_i, f_{i+1}).$$

TEOREMA 3.2 *Sean* $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\} \subset K$ *sucesiones de Cauchy que tienen el mismo límite* $\alpha \in \hat{K}$. *Entonces se tiene que* $\{g_i\} \subset S_k (g_i = \text{Irr}(\beta_i, k) \in S_k)$ *es sucesión de Cauchy si y sólo si* $\{f_i\}$ $(f_i = \text{Irr}(\alpha_i, k) \in S_k)$ *es de Cauchy, y en tal caso tienen el mismo límite en* $\hat{S}_k$.

Supongamos que $\{\alpha_i\}$ y $\{\beta_i\}$ son ya como se indica en el lema 3.1.

Dado α_i, existen β_j y α_{i+p} tales que $|\alpha - \alpha_i| > |\alpha - \beta_j| > |\alpha - \alpha_{i+p}|$, pues en caso contrario, existiría N entero, tal que para $i + p, j \geq N$ se tendría $\alpha = \alpha_{i+p}$ para todo $p \geq 0$ o bien $\beta_j = \alpha$ para todo j, con lo cual el lema sería cierto, pues Irr $(\alpha_{i+p}, k) = f_{i+p} = f = \text{Irr}(\alpha, k)$ en el primer caso e Irr $(\beta_j, k) = g_j = f = \text{Irr}(\alpha, k)$ en el segundo, y en ambos casos $\lim f_i = \lim g_j = f$ cuando $i \to \infty$, ya que:

$$d(g_j, f) = (|\beta_j - \alpha|^{n(c,f)} r(c-1, f)^{n(c-1,f)-n(c,f)} \cdots r(0, f)^{n(0,f)-n(1,f)})^{n_0(f)^{-1}}$$

tiende a cero cuando $\beta_i \to \alpha$.

Pero $|\alpha - \alpha_i| > |\alpha - \beta_j|$ implica $|\alpha_i - \beta_j| = \Delta(f_i, g_j)$. En efecto, supongamos que $|\alpha_i - \beta_j| > \Delta(f_i, g_j)$, entonces existen α_i', β_j' raíces de f_i, g_j respectivamente, tales que:

$$|\alpha_i - \beta_j'| = |\beta_j - \alpha_i'| = \Delta(f_i, g_j) < |\alpha_i - \beta_j| = |\alpha - \alpha_i|.$$

De donde:

$$|\alpha - \alpha_i'| \leq \text{Máx}(|\alpha - \beta_j|, |\beta_j - \alpha_i'|) < |\alpha - \alpha_i|$$

o cual contradice el que α_i sea raíz de f_i de las más próximas a α.

Igualmente se tiene que $|\alpha - \alpha_i| > |\alpha - \alpha_{i+p}|$ implica

$$|\alpha_i - \alpha_{i+p}| = \Delta(f_i, f_{i+p}).$$

Luego dado α_i, existen β_j y α_{i+p} tales que:

$$\Delta(f_i, g_j) = |\alpha_i - \beta_j| = |\alpha - \alpha_i| = |\alpha_i - \alpha_{i+p}| = \Delta(f_i, f_{i+p}).$$

Análogamente encontramos N' entero tal que $|\alpha - \beta_j| > |\alpha - \beta_{j+q}|$ para $q \geq N'$, y se tiene que:

$$\Delta(g_j, g_{j+q}) = |\beta_j - \beta_{j+q}| = |\alpha - \beta_j| < |\alpha - \alpha_i|.$$

Por tanto, dado i encontramos j, p, q, tales que

$$\Delta(g_j, g_{j+q}) < \Delta(g_j, f_i) = \Delta(f_i, f_{i+p}).$$

De la fórmula de la distancia al final de Sección 2, deducimos que si f_i permanece fijo, $d(f_i, f_j)$ es función estrictamente creciente de $\Delta(f_i, f_j)$.

Luego se tiene que:

$$d(g_j\,,\,g_{j+q}) < d(g_j\,,f_i) = d(f_i\,,f_{i+p}).$$

Si $\{f_i\} \subset S_k$ es de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe N entero tal que para $i \geq N$, se tiene $d(f_i\,,f_{i+p}) < \epsilon$. Pero existe también N' tal que para $q \geq N'$ se tiene:

$$d(g_j\,,\,g_{j+q}) < d(f_i\,,f_{i+p}) < \epsilon,$$

$$d(g_{j+q'}\,,\,g_{j+q}) \leq \text{Máx}\ (d(g_j\,,\,g_{j+q}),\, d(g_j\,,\,g_{j+q'})) < \epsilon,$$

luego $\{g_j\} \subset S_k$ es también de Cauchy.

Sea $\lim f_i = \varphi$ cuando $i \to \infty$, entonces existe N tal que para $i \geq N$ se tiene:

$$\epsilon > d(f_i\,,\varphi) = d(f_i\,,f_{i+p}) = d(g_j\,,f_i)$$

de donde

$$d(g_j\,,\varphi) \leq \text{Máx}\ (d(g_j\,,f_i),\, d(f_i\,,\varphi)) = d(f_i\,,\varphi) < \epsilon,$$

y se tiene $\lim g_j = \varphi$, cuando $j \to \infty$.

TEOREMA 3.3 *Sea* $\{\alpha_i\} \subset K$ *una sucesión de Cauchy, y sea* $f_i = \text{Irr}\ (\alpha_i\,,\,k)$. *Entonces* $\{f_i\} \subset S_k$ *es de Cauchy si y solo existe* $\{f_\eta\}$ *subsucesión de* $\{f_i\}$ *tal que*:

$$\lim |f_\eta(\alpha)|^{n(0,f_\eta)^{-1}} = 0 \quad \text{cuando} \quad \eta \to \infty$$

y siendo $\alpha = \lim \alpha_i$ cuando $i \to \infty$, y además se tiene $\lim f_i = \lim f_\eta$ cuando $i \to \infty$ y $\eta \to \infty$.

Demostración. Dado α_i cualquiera, existe p entero, tal que $|\alpha - \alpha_i| > |\alpha - \alpha_{i+p}| > 0$, pues en caso contrario existiría N entero, tal que para $p \geq N$ se tendría $\alpha = \alpha_{i+p}$, y el teorema sería obvio. Sea $\{\alpha_\eta\}$ la subsucesión de $\{\alpha_i\}$ tal que $|\alpha - \alpha_\eta| > |\alpha - \alpha_{\eta+1}|$ para todo η. Entonces, siendo $\{\alpha_\eta\}$ como en lema 3.1, se tiene que:

$$\Delta(f_\eta\,,f_{\eta+1}) = |\alpha_\eta - \alpha_{\eta+1}| = |\alpha - \alpha_\eta| > |\alpha - \alpha_{\eta+1}|,$$

lo cual implica que

$$\Delta(f_\eta\,,f_{\eta+1}) < r(c - 1, f_\eta) = |\alpha_\eta - \sigma\alpha_\eta| = |\alpha - \sigma\alpha_\eta|.$$

Por tanto se tiene:

$$d(f_\eta\,,f_{\eta+1}) = |f_\eta(\alpha)|^{n(0,f_\eta)^{-1}},$$

y si $\{f_i\} \subset S_k$ es de Cauchy, también lo es $\{f_\eta\}$ y se tiene

$$\lim |f_\eta(\alpha)|^{n(0,f_\eta)^{-1}} = 0 \quad \text{cuando} \quad \eta \to \infty.$$

Recíprocamente, sea $\{f_\eta\}$ una subsucesión de $\{f_i\}$ tal que

$$\lim |f_\eta(\alpha)|^{n(0,f_\eta)^{-1}} = 0 \quad \text{cuando} \quad \eta \to \infty,$$

y sea $\{\alpha_\eta\}$ la subsucesión de $\{\alpha_i\}$ que se corresponde con $\{f_\eta\}$. Suponiendo cierta la siguiente desigualdad:

$$(1) \qquad d(f_{\eta+1}, f_\eta) \leq \text{Máx}\left(| f_{\eta+1}(\alpha) |^{\frac{1}{n_0(f_{\eta+1})}}, | f_\eta(\alpha) |^{\frac{1}{n_0(f_\eta)}} \right),$$

se tiene que $d(f_{\eta+1}, f_\eta) \to 0$ cuando $\eta \to \infty$, es decir, $\{f_\eta\}$ es de Cauchy, y por el teorema 3.2, $\{f_i\}$ también es de Cauchy y tiene el mismo límite que $\{f_\eta\}$, puesto que $\alpha = \lim \alpha_i = \lim \alpha_\eta$, cuando i y η tienden hacia ∞.

Demostración de la desigualdad (1).

Sea $\{\alpha_i\} \subset K$ una sucesión de Cauchy que cumple con el lema 3.1. Para cada i pueden darse las siguientes situaciones:

1o. $| \alpha - \alpha_i | \neq | \alpha - \alpha_{i+1} |$

2o. $| \alpha - \alpha_i | = | \alpha - \alpha_{i+1} | = | \alpha_i - \alpha_{i+1} | \, \Delta(f_i, f_{i+1})$

3o. $| \alpha - \alpha_i | = | \alpha - \alpha_{i+1} | > | \alpha_i - \alpha_{i+1} | = \Delta(f_i, f_{i+1})$

Caso 1o. Supongamos $| \alpha - \alpha_i | < | \alpha - \alpha_{i+1} | = | \alpha_i - \alpha_{i+1} | = \Delta(f_i, f_{i+1})$. Sea $\sigma\alpha_{i+1}$ tal que $| \alpha_{i+1} - \sigma\alpha_{i+1} | = r_{c'-1}(f_{i+1}) > \Delta(f_i, f_{i+1}) = | \alpha - \alpha_{i+1} |$, lo cual implica $| \alpha - \sigma\alpha_{i+1} | = r_{c'-1}(f_{i+1})$. Igualmente se obtiene que $| \alpha_{i+1} - \sigma\alpha_{i+1} | = r_{c'-p}(f_{i+1}) = \alpha - \sigma\alpha_{i+1} | (p = 2, \cdots, c')$. Sea $\sigma\alpha_{i+1}$ tal que $| \alpha_{i+1} - \sigma\alpha_{i+1} | = \Delta(f_i, f_{i+1}) = | \alpha - \alpha_{i+1} |$, entonces $| \alpha - \sigma\alpha_{i+1} | \leq | \alpha - \alpha_{i+1} |$, pero no puede ser menor (ya que α_{i+1} es de las raíces de f_{i+1} más próximas a α), luego $| \alpha - \sigma\alpha_{i+1} | = | \alpha - \alpha_{i+1} | = \Delta(f_i, f_{i+1})$. Finalmente si $\sigma\alpha_{i+1}$ es tal que $| \alpha_{i+1} - \sigma\alpha_{i+1} | < | \alpha - \alpha_{i+1} | = \Delta(f_i, f_{i+1})$, entonces $| \alpha - \sigma\alpha_{i+1} | = | \alpha - \alpha_{i+1} |$. Por lo tanto:

$$d(f_i, f_{i+1}) = \Delta(f_i, f_{i+1})^{n(c, f_{i+1})} r(c-1, f_{i+1})^{n(c-1, f_{i+1}) - n(c, f_{i+1})}$$
$$\cdots r(0, f_{i+1})^{n(0, f_{i+1}) - n(1, f_{i+1})})^{n(0, f_{i+1})^{-1}} = | f_{i+1}(\alpha) |^{n(0, f_{i+1})^{-1}};$$

y por otra parte $d(f_i, f_{i+1}) > | f_i(\alpha) |^{n(0, f_i)^{-1}}$.

Si ocurre que $| \alpha - \alpha_{i+1} | < | \alpha - \alpha_i | = \Delta(f_i, f_{i+1}) = | \alpha_i - \alpha_{i+1} |$, entonces se tendrá en forma análoga

$$d(f_i, f_{i+1}) = | f_i(\alpha) |^{n(0, f_i)^{-1}}; \qquad \text{y} \quad d(f_i, f_{i+1}) > | f_{i+1}(\alpha) |^{n(0, f_{i+1})^{-1}}$$

Caso 2o. Razonando igual que el caso 1o. se tiene que

$$d(f_i, f_{i+1}) = | f_i(\alpha) |^{n(0, f_i)^{-1}} = | f_{i+1}(\alpha) |^{n(0, f_{i+1})^{-1}}$$

Caso 3o. $| \alpha - \alpha_i | = | \alpha - \alpha_{i+1} | > | \alpha_i - \alpha_{i+1} | = \Delta(f_i, f_{i+1})$. Para cualquier $\sigma\alpha_i$ tal que $| \alpha_i - \sigma\alpha_i | \leq \Delta(f_i, f_{i+1})$, se tiene $| \alpha - \sigma\alpha_i | = | \alpha - \alpha_i | > \Delta(f_i, f_{i+1})$. Supongamos que

$$r(0, f_i) > \cdots > r(c-h-1, f_i) > | \alpha - \alpha_i |$$
$$\geq r(c-h, f_i) > \cdots > \Delta(f_i, f_{i+1}),$$

entonces para $\sigma\alpha_i$ tal que $| \alpha_i - \sigma\alpha_i | = r(c-h-j, f_i)$, se tiene $| \alpha - \sigma\alpha_i | = r(c-h-j, f_i) \, (j = 1, \cdots, c-h)$. Y si $\sigma\alpha_i$ es tal que $| \alpha_i - \sigma\alpha_i | \leq r(c-h, f_i)$,

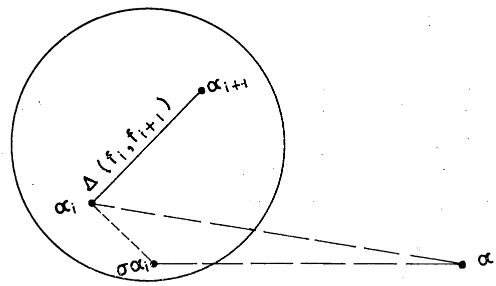

FIG. 5.

entonces $|\alpha - \sigma\alpha_i| \leq |\alpha - \alpha_i|$, Por lo tanto:

$$|f_i(\alpha)|^{n(0,f_i)-1} > (\Delta(f_i, f_{i+1})^{n(c,f_i)} r(c-1, f_i)^{n(c-1,f_i)-n(c,f_i)} \cdots r(0, f_i)^{n(0,f_i)-n(1,f_i)})^{n(0,f_i)-1}.$$

Igualmente se demuestra que:

$$|f_{i+1}(\alpha)|^{\frac{1}{n_0(f_{i+1})}} > d(f_i, f_{i+1}).$$

Y reuniendo los tres casos obtenemos

$$d(f_i, f_{i+1}) \leq \text{Máx}\left\{ |f_i(\alpha)|^{\frac{1}{n_0(f_i)}}, |f_{i+1}(\alpha)|^{\frac{1}{n_0(f_{i+1})}} \right\}$$

TEOREMA 3.4 *Sea $\{f_i\} \subset S_k$ una sucesión que es de Cauchy, entonces cada sucesión $\{\alpha_i\} \subset K$, formada con α_i raíz de f_i para cada i y tales que $|\alpha_{i+1} - \alpha_i| = \Delta(f_{i+1}, f_i)$, es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. De la fórmula de la distancia entre f_i y f_{i+1} deducimos que:

$$d(f_i, f_{i+1}) \geq (\Delta(f_i, f_{i+1})^{n(0,f_i)})^{n(0,f_i)^{-1}} = \Delta(f_i, f_{i+1}),$$

con lo cual el teorema queda demostrado.

TEOREMA 3.5 *Sea $\{\alpha_i\} \subset K$ una sucesión que es de Cauchy y tal que su límite α está también en K. Entonces $\{f_i\} \subset S_k$, donde $f_i = \text{Irr}(\alpha_i, k)$ es sucesión de Cauchy y su límite está en S_k, y es igual a $f = \text{Irr}(\alpha, k)$. Recíprocamente si $\{f_i\} \subset S_k$ es una sucesión que es de Cauchy y su límite f está en S_k, entonces cada sucesión $\{\alpha_i\}$ en K formada como se indica en el teorema 3.4 es de Cauchy, y su límite α es raíz de f, y por tanto está en K.*

Demostración Podemos suponer que $\{\alpha_i\}$ es tal que α_i es raíz de f_i de las más próximas a α.

1o. Sea $\lim \alpha_i = \alpha \in K$ cuando $i \to \infty$ y sea $f = \text{Irr}(\alpha, k) \in S_k$. Por ser α_i raíz de f_i de las más próximas a α (raíz de f), se tiene que $|\alpha_i - \alpha| = \Delta(f_i, f)$, y por tanto

$$d(f_i, f) = (|\alpha_i - \alpha|^{n(c,f)} r(c-1, f)^{n(c-1,f)-n(c,f)} \cdots r(0, f)^{n(0,f)-n(1,f)})^{n(0,f)^{-1}}$$

Como $n(0, f)$, que es el grado de f, es fijo, tenemos que $d(f_i, f) \to 0$ cuando $i \to \infty$, ya que $\alpha_i \to \alpha$ cuando $i \to \infty$. Es decir, $\{f_i\} \subset S_k$ es de Cauchy y su límite es $f = \text{Irr}(\alpha, k)$.

2o. Sea $\{f_i\} \subset S_k$ y $\lim f_i = f \in S_k$ cuando $i \to \infty$. Formamos $\{\alpha_i\} \subset K$, con α_i raíz de f_i para cada i tales que $|\alpha_i - \alpha_{i+1}| = \Delta(f_i, f_{i+1})$, y por el teorema 3.4 sabemos que es de Cauchy, y queremos demostrar que su límite α es raíz de f. En efecto:

$$d(f_i, f) = |f(\alpha_i)|^{\frac{1}{n(f)}},$$

lo cual implica

$$|f(\alpha_i)|^{\frac{1}{n(f)}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad i \to \infty,$$

pero

$$\lim f(\alpha_i) = f(\alpha) \quad \text{cuando} \quad i \to \infty,$$

por tanto se tiene $|f(\alpha)| = 0$, es decir, α es raíz de f.

4. Definición de elemento algebraico generalizado y conclusiones

Dado $\alpha \in \hat{K}$ (completación de la cerradura algebraica de k, campo completo y valuado), decimos que es algebraico en sentido generalizado si y sólo si existe una sucesión $\{\alpha_i\} \subset K$ tal que $\lim \alpha_i = \alpha$ cuando $i \to \infty$, y la sucesión correspondiente $\{f_i\} \subset S_k (f_i = \text{Irr}(\alpha_i, k))$ es sucesión de Cauchy. En cuyo caso decimos que α es raíz de $\varphi = \lim f_i \in \hat{S}_k$ cuando $i \to \infty$.

En virtud del teorema 3.2 la definición dada es independiente de la sucesión $\{\alpha_i\}$ que se elija.

El teorema 3.5 demuestra que la definición dada generaliza el concepto de raíz de un polinomio con coeficientes en k.

Podemos ahora definir la cerradura algebraica generalizada como la completaión de K con la métrica:

$$d(\alpha, \beta) = \text{Máx}\,(|\alpha - \beta|, d(f, g))$$

donde $f = \text{Irr}(\alpha, k)$, $g = \text{Irr}(\beta, k)$, $|\cdots|$ la valuación de k y $d(f, g)$ la ultramétrica en S_k, y que más adelante se demuestra que es un campo.

El teorema 3.4 y el 3.5 demuestran que si S_k no es completo con la ultramétrica definida, entonces la definición dada de número algebraico generalizado no es vacía, y además que la cerradura algebraica generalizada de k está contenida en $\hat{K}$.

El teorema 33 nos hace ver que no basta que $|f_i(\alpha)| \to 0$ cuando $i \to \infty$ para que $\alpha \in \hat{K}$ sea raíz de $\varphi = \lim f_i \in \hat{S}_k$ cuando $i \to \infty$, sino que es necesario que $|f_i(\alpha)|^{n_0(f_i)^{-1}} \to 0$ cuando $i \to \infty$.

Nota. Si tomamos como ultramétrica para S_k el valor $\Delta(f_i, f_j)$, $f_i, f_j \in S_k$, entonces en virtud del lema 3.1, tenemos que $\{\alpha_i\} \subset K$ es de Cauchy si y sólo si $\{f_i\} \subset S_k$ es de Cauchy (con la ultramétrica definida por $\Delta(f_i, f_j)$). Por tanto la cerradura algebraica generalizada de k [utilizando la ultramétrica definida por $\Delta(f_i, f_j)$ en S_k] coincide con la completación de K (cerradura algebraica de k).

Hay que hacer notar que así como $d(f_i, f_j) = |R(f_i, f_j)|^{1/n(f_i)n(f_j)}$, nos da una distancia que depende intrínsecamente de los elementos de S_k, no ocurre lo mismo para $\Delta(f_i, f_j)$, que viene expresada por elementos de K.

5. Aplicación de los resultados obtenidos

Sea un campo k completo valuado (con valuación discreta no-arquimedeana) de característica cero y cuyo campo de clases residuales es de característica $p \neq 0$.

Consideremos las extensiones máximas de k contenidas en K (cerradura algebraica de k) que son respectivamente no-ramificada $\bar{K}$ y moderadamente ramificada $\bar{\bar{K}}$ [9].

Una extensión finita E/k es no-ramificada si su índice de ramificación $e(E/k) = 1$ y su campo de clases residuales R/r es separable.

Una extensión finita E/k es moderadamente ramificada si su índice de ramificación $e(E/k)$ es primo con p (característica del campo r de clases residuales de k) y su campo de clases residuales R/r es separable.

Tenemos pues que:

$$k \subset \bar{K} \subset \bar{\bar{K}} \subset K.$$

5.1 Primeramente demostraremos que $\bar{K}$ es completo con la valuación de k.

DEFINICIÓN. *E/k se dice que es una extensión primitiva si no existe ningún campo, contenido en E y que contiene a k, distinto de E y de k.*

LEMA 5.2 *Sea k valuado y completo, y E una extensión primitiva (por lo tanto forzosamente finita) no-ramificada de k; entonces para todo α, unidad de E, tal que $E = k(\alpha)$ se tiene que $|\sigma\alpha - \alpha| = 1$, para toda $\sigma \in G_{E/k}$ distinta de la identidad.*

Demostración. Según los resultados sobre extensiones primitivas de campos valuados completos de M. Marc Krasner [5], sabemos que en el caso del enunciado R/r es también primitiva (donde R y r son los campos residuales de E y k).

Sea $f(x) = \text{Irr}(\alpha, v)$ ($v \subset k$ es el anillo de los enteros de k), entonces $\bar{f}(x) =$ polinomio obtenido de $f(x)$ pasando al campo de clases residuales, es el polinomio irreducible de $\bar{\alpha} \in R$ con coeficientes en r, pues si no fuese irreducible tendríamos $r \subset r(\bar{\alpha}) \subset R$, lo cual contradice la primitividad de R/r. Luego se tiene $R = r(\bar{\alpha})$, y como R/r es separable, $\bar{\alpha}$ es raíz simple de $\bar{f}(x)$, y por tanto para toda $\bar{\sigma} \in G_{R/r}$ distinta de la identidad se tiene:

$$\bar{\sigma}\bar{\alpha} - \bar{\alpha} \neq 0, \quad \text{lo cual implica} \quad |\sigma\alpha - \alpha| = 1,$$

siendo $\sigma \in G_{E/k}$ el isomorfismo que induce $\bar{\sigma} \in G_{R/r}$. Pero por ser k valuado completo y E/k no-ramificado se tiene $G_{E/k} \simeq G_{R/r}$ (confrontar [8], página 29) y el lema queda demostrado.

TEOREMA 5.3 *Siendo k el campo definido más arriba, se tiene que su extensión máxima no-ramificada $\bar{K}$ es completa con la valuación de k.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\alpha_i\} \subset \bar{K}$ una sucesión de Cauchy. Y sea $\alpha = \lim \alpha_i$, cuando $i \to \infty$, $\alpha \neq 0$, entonces para $i \geq N$ se debe tener $|\alpha| = |\alpha_i|$, pues en caso contrario $|\alpha - \alpha_i| = \text{Máx } (|\alpha|, |\alpha_i|) > 0$ para todo i suficientemente grande, y $\{\alpha_i\}$ no sería sucesión de Cauchy.

Sea ord $\alpha_i = M$ (donde "ord" es el orden valuativo correspondiente al ideal primo $\mathfrak{p}$ de k que define la valuación de k : ord $(\cdots) = -\ln |\cdots|$) para $i \geq N$. Elegimos $\pi \in k$ de orden 1 en $\mathfrak{p}$, que existe por ser la valuación discreta, y obtenemos:

$$\text{ord } (\alpha_i \pi^{-M}) = 0$$

Consideremos la sucesión $\{\beta_i\} \subset \bar{K}$, donde $\beta_i = \alpha_i \pi^{-M}$, que es de Cauchy y tiene por límite $\beta = \alpha\pi^{-M}$.

Inmediatamente se comprueba que α es algebraico sobre k si y sólo si lo es β, puesto que:

$$d(g_i, g_{i+1}) = \pi^{-M} d(f_i, f_{i+1}), \quad \text{siendo} \quad g_i = \text{Irr } (\beta_i, k), \qquad f_i = \text{Irr } (\alpha_i, k).$$

Y además $\alpha \in \bar{K}$ si y sólo si $\beta \in \bar{K}$. Por tanto, para demostrar el teorema podemos suponer que ord $\alpha_i = 0$ para $i \geq N$, es decir, α_i es una unidad de $E_i = k(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i)$. E_i/k es no-ramificada para cada i. Intercalemos entre E_i y E_{i-1} los campos intermedios tales que cada uno es una extensión primitiva del anterior y obtenemos:

$$k = P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_q \subset \cdots \subset \bar{K}$$

Ahora aproximamos $\alpha = \lim \alpha_i$ cuando $i \to \infty$ (ord $\alpha = 0$) por los elementos $\beta_q \in I(P_q) =$ enteros de P_q tales que:

$$|\alpha - \beta_q| = \text{Inf}_{\beta \in I(P_q)} (|\alpha - \beta|),$$

tales elementos existen por ser todas las extensiones no-ramificadas y la valuación discreta. Además para $q \geq N_1$, entero, se tiene ord $\beta_q =$ ord $\alpha = 0$. Y por el lema 5.2 para $\sigma \in G(P_q/P_{q-1})$, tenemos que $|\sigma\beta_q - \beta_q| = 1$; y para $q \geq N_2$, se tiene $0 < |\beta_q - \beta_{q-1}| < 1$. Por tanto para $q \geq \text{Máx } (N_1, N_2)$, se tiene que:

$$|\beta_q - \beta_{q-1}| < |\sigma\beta_q - \beta_q|$$

para $\sigma \in G(P_q/P_{q-1})$, y aplicando el lema de Krasner [2]:

$$P_q = P_{q-1}(\beta_q) \subset P_{q-1}(\beta_{q-1}) = P_{q-1},$$

lo cual implica $P_{q-1} = P_q$, que contradice el que P_q/P_{q-1} es primitiva. Por tanto para i suficientemente grande $E_i = E_{i-1} = \cdots = E$, lo cual implica

$\{\alpha_i\} \subset E/k$, extensión finita de k, que es completa, luego $\alpha = \lim \alpha_i \in E$, cuando $i \to \infty$.

5.4 Consideramos ahora sucesiones de Cauchy $\{\alpha_i\} \subset \bar{\bar{K}} =$ extensión máxima de k moderadamente ramificada. Se construirán sucesiones que nos darán elementos $\alpha \in \hat{K} - K$, que son algebraicos generalizados y no son algebraicos en sentido ordinario, es decir, que S_k no es completo. Y también $\alpha \in \hat{K} - K$, que no son algebraicos en sentido generalizado, es decir, que $\hat{K}$ contiene estrictamente a la cerradura algebraica generalizada de k.

Sea $X^{h^i} - \pi = 0$, donde $\pi \in k$ es de orden 1 en $\mathfrak{p}$ y $h > 1$ es primo con p.

Siendo $\pi_i = \pi^{1/h^i}$ y tal que $\pi_i^h = \pi_{i-1}$, definimos $k_i = k(\pi_i)$, y se tiene $k_{i-1} = k(\pi_{i-1}) \subset k_i = k(\pi_i)$, $(k_i:k_{i-1}) = h$, $\mathrm{ord}_{k_i}\, \pi_i = \mathrm{ord}_{k_i}\, \pi/h^i > 0$, y por ser la valuación discreta se tiene $\mathrm{ord}_{k_i}\, \pi \geq h^i$, pero $\mathrm{ord}_{k_i}\, \pi = e(k_i/k) =$ índice de ramificación de k_i/k.

$$h^i \leq e(k_i/k) \leq (k_i:k) \leq h^i, \quad \text{luego} \quad e(k_i/k) = h^i.$$

Es decir, k_i/k es moderada y totalmente ramificada. Según la teoría de ramificación para extensiones no galoisianas (consultar [7], teor. 9 y 15 del Cap. II) tenemos:

$$G(k_i/k) = Z(k_i/k) = T(k_i/k) \supset V(k_i/k) = \{1\}.$$

Siendo π_i un elemento de orden 1 en $\mathfrak{p}_i$ (ideal primo de k_i), se tiene para todo $\sigma \in T(k_i/k) - V(k_i/k)$ (lema 4, sección 1 de [6] página 82 y Cap. II, teorema 3 de [7] página 40)

$$\mathrm{ord}_{k_i} \frac{\sigma\pi_i - \pi_i}{\pi_i} = 0, \qquad \mathrm{ord}_{k_i}(\sigma\pi_i - \pi_i) = 1.$$

Formamos la sucesión $\{\alpha_i\} \subset \bar{\bar{K}}$ como sigue:

$$\alpha_i = \pi^{a_1}\pi_1 + \pi^{a_2}\pi_2 + \cdots + \pi^{a_i}\pi_i \in k_i,$$

que forma una sucesión de Cauchy si y sólo si:

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, (\alpha_{i+1} - \alpha_i) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, (\pi^{a_{i+1}}\pi_{i+1}) = a_{i+1} + \frac{1}{h^{i+1}}$$

tiende a ∞ cuando i tiende a ∞, es decir, es necesario y suficiente que $a_i \to +\infty$ cuando $i \to \infty$.

Calcularemos a continuación los números característicos de k_i/k en α_i.

Sea $\sigma \in G(k_{i+1}/k_i)$ y obtenemos:

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, (\sigma\alpha_{i+1} - \alpha_{i+1}) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, (\pi^{a_{i+1}}(\sigma\pi_{i+1} - \pi_{i+1})) = a_{i+1} + \frac{1}{h^{i+1}}.$$

Sea $\sigma \in G(k_{i+1}/k_{i-1}) - G(k_{i+1}/k_i)$ y obtenemos: $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, (\sigma\alpha_{i+1} - \alpha_{i+1}) \geq$ Mín $(\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, (\pi^{a_i}(\sigma\pi_i - \pi_i)), \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, (\pi^{a_{i+1}}(\sigma\pi_{i+1} - \pi_{i+1})))$ = Mín $(a_i + 1/h^i, a_{i+1} + 1/h^{i+1}) = a_i + 1/h^i$, si $a_{i+1} - a_i > 1/h^i - 1/h^{i+1} = h - 1/h^{i+1}$. (Como $h - 1/h^{i+1} < 1$ bastará suponer $a_{i+1} - a_i \geq 1$).

Para

$$\sigma \in G(k_{i+1}/k_{i-2}) - G(k_{i+1}/k_{i-1}),$$

obtendremos

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\ (\sigma\alpha_{i+1} - \alpha_{i+1}) = \mathrm{Mín}\left(a_{i-1} + \frac{1}{h^{i-1}}, a_i + \frac{1}{h^i}, a_{i+1} + \frac{1}{h^{i+1}}\right)$$
$$= a_{i+1} + \frac{1}{h^{i-1}},$$

si $a_i - a_{i-1} \geq 1$.

En general, si $a_i - a_{i-1} \geq 1 (i = 2, 3, \cdots)$, se tiene para $\sigma \in G(k_{i+1}/k_{q-1}) - G(k_{i+1}/k_q)$ el q-ésimo número característico de k_{i+1}/k en α_{i+1} :

$$v_q(\alpha_{i+1}) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{q}}\ (\sigma\alpha_{i+1} - \alpha_{i+1}) = A_q + \frac{1}{h^q}.$$

Por tanto podemos escribir:

$$v_1(\alpha_i) < \cdots < v_i(\alpha_i) < -\ln\Delta(f_i, f_{i+1}) < +\infty$$

$$v_1(\alpha_{i+1}) < \cdots < v_i(\alpha_{i+1}) < v_{i+1}(\alpha_{i+1}) = -\ln\Delta(f_i, f_{i+1}) < +\infty.$$

Y tenemos $h^{q+1} - h^q$ isomorfismos $\sigma \in G(k_i/k)$ tales que $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\sigma\alpha_i - \alpha_i) = v_{i-q}(\alpha_i)$, y $h^{q+2} - h^{q+1}$ isomorfismos $\sigma \in G(k_{i+1}/k)$ tales que

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\sigma\alpha_{i+1} - \alpha_{i+1}) = v_{i-q}(\alpha_{i+1}).$$

Sea $f_i = \mathrm{Irr}\ (\alpha_i, k)$. Calcularemos ahora la distancia $d(f_i, f_{i+1})$.

$$-\ 1nd(f_i, f_{i+1}) = \frac{1}{h^i}\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\ (f_i(\alpha_{i+1})) = \frac{1}{h^i}[-\ \ln\Delta(f_i, f_{i+1}) + (h-1)v_i(\alpha_i)$$
$$+ (h^2 - h)v_{i-1}(\alpha_i) + \cdots + (h^i - h^{i-1})v_1(\alpha_i)] = \frac{1}{h^i}\left(a_{i+1}\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{h^{i+1}}\right) + \frac{h-1}{h^i}\left[a_i + ha_{i-1} + h^2a_{i-2} + \cdots + h^{i-1}a_1\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{h^i} + \frac{h}{h^{i-1}} + \cdots + \frac{h^{i+1}}{h}\right] = \frac{a_{i+1}}{h^i} + \frac{1}{h^{2i+1}} + \frac{h-1}{h^i}\left[h^i\left(\frac{1}{h}a_1\right.\right.$$
$$\left.\left.+ \frac{1}{h^2}a_2 + \cdots + \frac{1}{h^i}a_i\right) + \frac{1}{h^i}(1 + h^2 + h^4 + \cdots + h^{2i-1})\right]$$
$$= \frac{a_{i+1}}{h^i} + \frac{1}{h^{2i+1}} + \frac{h-1}{h^i}\left[h^iS_i + \frac{1}{h^i}\frac{h^{2i-1}}{h-1}\right] = \frac{a_{i+1}}{h^i}$$
$$+ \frac{1}{h^{2i+1}} + \frac{h^{2i-1}}{h^{2i}} + (h-1)S_i.$$

Por tanto $\{f_i\} \subset S_k$ es de Cauchy si y sólo si $a_{i+1}/h^i + (h-1)S_i \to +\infty$ cuando $i \to \infty$.

Ejemplo 1. Demuestra la existencia de elementos algebraicos generalizados (que no lo son en el sentido usual) y por lo tanto, que S_k no es completo.

Hacemos $a_i = h^i$, y se tiene:

$$\frac{a_{i+1}}{h^i} + (h-1)S_i = h + (h-1)i \to \infty, \quad \text{cuando} \quad i \to \infty.$$

Además $\lim \alpha_i = \alpha \notin K$ cuando $i \to \infty$, pues si $\alpha \in K$, se tendría que $|\alpha - \alpha_i| = \Delta(f_i, f_{i+1}) < \Delta(f_i) =$ mínimo de las distancias entre las raíces de f_i. y por el lema de Krasner $\alpha_i \in k(\alpha)$ para cada i. Lo cual contradice el que $\bigcup_{i=1}^{\infty} k_i = E$ es una extensión de grado infinito sobre k.

Ejemplo 2. Demuestra que la completación $\hat{K}$ de K, cerradura algebraica de k, contiene estrictamente a la cerradura algebraica generalizada de k.

Hacemos $a_i = i$, y se tiene:

$$\begin{aligned} a_{i+1}h^{-i} + (h-1)S_i &= (i+1)h^{-i} + (h-1)[h + 2h^{-2} + \cdots + ih^{-i}] \\ &= (i+1)h^{-i} + (h-1)[ih^{-i-1} - (i+1)j^{-i} + 1](h^{-1}-1)^{-2}h^{-1} \end{aligned}$$

que tiende a $h(h-1)^{-1}$ cuando i tiende a ∞.

Luego $\{\alpha_i\} \subset K$ es de Cauchy y $\{f_i\} \subset S_k$ no es de Cauchy.

Ejemplo 3. Vamos a considerar ahora extensiones k_i/k que sean totalmente ramificadas y tales que $e(k_i/k) = (k_i:k) = p^s$, en cuyo caso se tiene $G(k_i/k) = Z(k_i/k) = T(k_i/k) = V(k_i/k) \supset \{1\}$, pues el número de elementos de $V(k_i/k)$ es la máxima potencia de p contenida en $e(k_i/k)$. Y según los resultados de [8], se deduce fácilmente que hay un sólo número característico de k_i/k en α_i. En efecto: por ser $Z(k_i/k) = T(k_i/k) = V(k_i/k)$ se tiene $Z_q(\alpha_i; k_i/k) = T_q(\alpha_i; k_i/k) = V_q(\alpha_i; k_i/k)$. Ahora bien, $Z_q(\alpha_i; k_i/k)$ se aplica sobre $E_q(\alpha_i; k_i/k)$, que es un hipergrupo S_i-extremoduliforme, y $V_{q+1}(\alpha_i; k_i/k)$ se aplica sobre la unidad de E_q, pero como $V_{q+1} = Z_{q+1}$, resulta que Z_{q+1} se aplica sobre E_{q+1} que es la unidad de E_q. Por tanto

$$Z_0(\alpha_i; k_i/k) = Z(k_i/k), \; Z_i(\alpha_i; k_i/k) = \{1_{k_i}\}$$

Siendo único el número característico de k_i/k en α_i, sea $r(f_i) = |\sigma\alpha_i - \alpha_i|$ para $\sigma \in G(k_i/k)$, y pueden ocurrir dos cosas:

1o. $\Delta(f_i, f_{i+1}) < r(f_i)$ para algún i, lo cual implica $r(f_i) = r(f_{i+h})$ $(h = 1, 2, \cdots)$ y por tanto $n_0(f_i) = n_0(f_{i+h})$ $(h = 1, 2, \cdots)$, y entonces $\{\alpha_i\}$ tiene por límite un número algebraico ordinario.

2o. $\Delta(f_i, f_{i+1}) \geq r(f_i)$ para todo i, lo cual implica que:

$$d(f_i, f_{i+1}) = \Delta(f_i, f_{i+1})$$

entonces $\{f_i\}$ es de Cauchy si y sólo si lo es $\{\alpha_i\}$.

Ejemplos de este estilo se obtienen con extensiones $k_i = k(\pi_i)$ donde π_i es raíz de $X^{p^i} - \pi = 0$, siendo π de orden uno en $\mathfrak{p}$ (ideal primo de k) y p la característica de r. Se forma $\alpha_i = \pi^{a_1}\pi_1 + \cdots + \pi^{a_i}\pi_i$ (donde $\pi_{i-1}{}^p = \pi_i$), que sea de Cauchy, y entonces $\{f_i\}$ también es de Cauchy. Para que $\{\alpha_i\}$ tenga por límite un número algebraico generalizado, es necesario que:

$$\operatorname{ord}_k(\alpha_{i+1} - \alpha_i) = a_{i+1} + \frac{1}{p^{i+1}} \leq \operatorname{ord}_k(\sigma\alpha_i - \alpha_i) = v_0(\alpha_i).$$

Para calcular $v_0(\alpha_i)$ elegimos $\sigma \in G(k_i/k_{i-1})$ y tenemos

$$v_0(\alpha_i) = \operatorname{ord}_k(\sigma\alpha_i - \alpha_i) = a_i + \operatorname{ord}_k(\sigma\pi_i - \pi_i) = a_i + \frac{1}{p^i}\operatorname{ord}_{k_i}$$

$$\cdot\,(\sigma\pi_i - \pi_i) = a_i + \frac{1}{p^i}(1 + v_0(k_i/k_{i-1})).$$

Y obtenemos la condición:

$$1 + v_0(k_i/k_{i-1}) \geq p^i(a_{i+1} - a_i) + \frac{1}{p},$$

para que $\lim \alpha_i = \alpha$ cuando $i \to \infty$, sea algebraico generalizado sin serlo en sentido usual. [$v_0(k_i/k_{i-1})$ es el único número de ramificación propio de k_i/k_{i-1}]. Si los $\{\alpha_i\}$ se escogen en forma tal que se tiene $p^i(a_{i+1} - a_i) + 1/p > 1 + v_0(k_i/k_{i-1})$, entonces $\alpha = \lim \alpha_i$ cuando $i \to \infty$, es algebraico en el sentido usual.

6. Funciones simétricas generalizadas de raíces de S_k

Sea $\{\alpha_i\} \subset K$ una sucesión de Cauchy. Para cada α_i y n fijo tenemos:

$$A(n, \alpha_i) = \frac{\alpha(1, i)^n + \cdots + \alpha(n(f_i), i)^n}{n(f_i)},$$

si $\{A(n, \alpha_i)\}$ es sucesión de Cauchy, entonces definimos como funciones simétricas de $\alpha = \lim \alpha_i$ cuando i tiende a ∞, el límite de la sucesión $\{A(n, \alpha_i)\}$ cuando i tiende a ∞.

En el ejemplo 1, podemos comprobar que tales funciones existen. En efecto:

$$a_1 + h^{-1} < a_2 + h^{-2} < \cdots < a_i + h^{-i} < \operatorname{ord}_k(\alpha_{i+1} - \alpha_i) = \alpha_{i+1} + h^{-i-1},$$

implica que cada conjugado de α_i tiene h conjugados de α_{i+1} que distan de él $\exp(-a_{i+1} - h^{-i-1})$. Por tanto:

$$A(n, \alpha_{i+1}) - A(n, \alpha_i)$$
$$= [(\alpha(1, i)^n - \alpha(1, i+1)^n) + \cdots + (\alpha(n(f_i)), i)^n \alpha(n(f_{i+1}), i+1)^n)]h^{-i-1},$$

en donde cada diferencia $\alpha(q, i) - \alpha(q, i+1)$ es tal que $\operatorname{ord}_k(\alpha(q, i) - \alpha(q, i+1)) = a_{i+1} + h^{-i-1}$. Y teniendo en cuenta que

$$\alpha(q, i)^n - \alpha(q, i+1)^n$$
$$= (\alpha(q, i) - \alpha(q, i+1))$$
$$\cdot\,(\alpha(q, i)^{n-1} + \alpha(q, i)^{n-2}\alpha(q, i+1) + \cdots + \alpha(q, i+1)^{n-1}),$$

y que para i suficientemente grande

$$\mathrm{ord}_k\, \alpha_i = \mathrm{ord}_k\, \alpha_{i+1} = \mathrm{ord}_k\, \alpha = N.$$

Obtenemos:

$$\mathrm{ord}_k\, (A\,(n,\, \alpha_{i+1}) - A\,(n,\, \alpha_i)) \geq a_{i+1} + h^{-i-1} + (n - 1)N,$$

cantidad que tiende a infinito cuando i tiende a infinito, por tanto $A\,(n,\, \alpha_i)$ es sucesión de Cauchy.

7. La cerradura algebraica generalizada de k es un campo.

Para demostrar esta afirmación debemos probar que la completación de K cerradura algebraica ordinaria de k) con la distancia:

$$d(\alpha, \beta) = \text{Máx}\, (|\alpha - \beta|, d(f, g)),$$

[donde: $f = \mathrm{Irr}\, (\alpha, k)$, $g = \mathrm{Irr}\, (\beta, k)$, $|\cdots|$ la valuación de k y $d(f, g)$ la ultramétrica de Krasner en S_k], es un campo. Lo cual será cierto si la distancia $d(\alpha, \beta)$ es una métrica, y si K con esa métrica es un campo topológico separable y conmutativo ([1], Cap. III, §5, prop. 2 y 4).

Lema 7.1 $d(\alpha, \beta) = \text{Máx}\, (|\alpha, \beta|, d(f, g))$ es ultramétrica en K.

i) $d(\alpha, \beta) = 0$ si y sólo si $\alpha = \beta$ resulta obvio, pues $|\cdots|$ es ultramétrica.

ii) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$, igual que i.

iii) $d(\alpha, \beta) \leq \text{Máx}\, (d(\alpha, \gamma), d(\beta, \gamma))$.

En efecto:

$$d(\alpha, \beta) = \text{Máx}\, (|\alpha - \beta|, d(f, g)), \quad \text{sea} \quad \gamma \in K \quad \text{y} \quad h = \mathrm{Irr}\, (\gamma, k).$$

Entonces

$$|\alpha - \beta| \leq \text{Máx}\, (|\alpha - \gamma|, |\beta - \gamma|)$$
$$d(f, g) \leq \text{Máx}\, (d(f, h), d(g, h))$$

lo cual implica

$$d(\alpha, \beta) \leq \text{Máx}\, (|\alpha - \gamma|, |\beta - \gamma|, d(f, h), d(g, h)) = \text{Máx}\, (d(\alpha, \gamma), d(\beta, \gamma)).$$

Definición. $C(\alpha, \rho) = \{\omega \in K \mid d(\alpha, \omega) < \rho\}$.

Lema 7.2 K con la ultramétrica del lema anterior es un campo topológico.

i) $\alpha, \beta \in K$, entonces la aplicación:

$$(\alpha, \beta) \to \alpha + \beta \quad \text{de} \quad K \times K \to K \quad \text{es continua.}$$

ii) $\alpha, \beta \in K$, implica:

$$(\alpha, \beta) \to \alpha \cdot \beta \quad \text{de} \quad K \times K \to K \quad \text{es continua.}$$

iii) $\alpha \in K$, entonces:

$$\alpha \to -\alpha, \quad \text{de} \quad K \to K \quad \text{es continua.}$$

iv) $\alpha \in K(\alpha \neq 0)$, entonces:

$$\alpha \to \frac{1}{\alpha} \quad \text{de} \quad K \to K \quad \text{es continua.}$$

Demostraremos ii) y las restantes se hacen en forma análoga.

Demostración de ii). Dado $\epsilon > 0$ cualquiera, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\omega_1 \in C(\alpha, \delta), \omega_2 \in C(\beta, \delta), \quad \text{implica} \quad \omega_1\omega_2 \in C(\alpha\beta, \epsilon).$$

Supongamos α y β distintos de cero.

En primer lugar imponemos a δ la condición $\delta <$ Mín $(|\alpha|, |\beta|)$, lo cual implica $|\omega_1| = |\alpha|, |\omega_2| = |\beta|$ si $\omega_1 \in C(\alpha, \delta)$, $\omega_2 \in C(\beta, \delta)$. Y se tiene que:

$$\begin{aligned} |\alpha\beta - \omega_1\omega_2| &= |(\alpha - \omega_1)(\beta - \omega_2) + \omega_2(\alpha - \omega_1) + \omega_1(\beta - \omega_2) \\ &\leq \text{Máx}\,(|\alpha - \omega_1|\,|\beta - \omega_2|, |\beta|\,|\alpha - \omega_1|, |\alpha|\,|\beta - \omega_2|). \end{aligned}$$

Sea $h(x) = \text{Irr}\,(\alpha\beta, k)$, y sean:

$$r(0, h) > r(1, h) > \cdots > r(m - 1, h) > 0,$$

las distancias entre los conjugados con respecto a k de $\alpha\beta$.

Si tomamos:

$$\delta < \text{mín}\,(r(m - 1, h)^{\frac{1}{2}}, r(m - 1, h)\,|\beta|^{-1}, r(m - 1, h)\,|\alpha|^{-1})$$

se tiene que $|\alpha\beta - \omega_1\omega_2| < r(m - 1, h)$ y por tanto $\Delta(h, w) < r(m - 1, h)[w(x) = \text{Irr}\,(\omega_1\omega_2, k)]$, lo cual implica:

$$\begin{aligned} d(h, w) &= (\Delta(h, w) r(m - 1, h)^{n(m-1,h)-1} \cdots r(0, h)^{n(0,h)-n(1,h)})^{1/n(0,h)} \\ &\leq |\alpha\beta - \omega_1\omega_2|^{1/n_0(h)} D(h). \end{aligned}$$

Luego si:

$$\begin{aligned} \delta < \text{Mín}\,\{&|\alpha|, |\beta|, r(m - 1, h)^{\frac{1}{2}}, r(m - 1, h)\,|\alpha|^{-1}, r(m - 1, h)\,|\beta|^{-1}, \\ &\epsilon^{\frac{1}{2}}, \epsilon\,|\alpha|^{-1}, \epsilon\,|\beta|^{-1}, (\epsilon D(h)^{-1})^{n\,(0,h)}, |\alpha|^{-1}(\epsilon D(h)^{-1})^{n\,(0,h)}, |\beta|^{-1}(\epsilon D(h)^{-1})^{n\,(0,h)}\} \end{aligned}$$

se cumple lo que se quería demostrar.

Supongamos que $\beta = 0$, entonces $\alpha \cdot \beta = 0$. Dado $\epsilon > 0$ cualquiera, existe $\delta > 0$ tal que $\omega_1 \epsilon C(\alpha, \delta)$, $\omega_2 \epsilon C(0, \delta($, implica $\omega_1\omega_2 \epsilon C(0, \epsilon)$.

Imponemos a δ la condición $\delta < |\alpha|$, entonces $\omega_1 \epsilon C(\alpha, \delta)$ implica $|\omega_1| = |\alpha|$. Y tenemos que:

$$|\omega_1\omega_2| = |\omega_1|\,|\omega_2| = |\alpha|\,|\omega_2| < \epsilon,$$

para lo cual basta elegir $\delta = \epsilon/|\alpha|$.

Sea $w(x) = \text{Irr}\,(\omega_1\omega_2, k)$, entonces:

$$d(x, w(X)) = |w(0)|^{1/n(w)} = |\omega_1\omega_2|.$$

Por tanto: $\delta < \text{Mín}\,(|\alpha|, \epsilon/|\alpha|)$, y se cumple lo que se quería demostrar.

8. Generalización del concepto $k[x]/(f(x))$

Siendo $f(x) \in k[x]$ un polinomio irreducible, se sabe que el anillo de polinomios $k[x]$ reducido módulo el ideal engendrado por $f(x)$, es un campo. Ahora se trata de generalizar esta definición cuando se considera un elemento de la completación $\hat{S}_k$ de S_k.

Para lo cual consideramos primeramente una sucesión de extensiones algebraicas $\{k(\alpha_i)\}$, tales que $k(\alpha_i) \subset k(\alpha_{i+1})$ para $i = 1, 2, 3, \cdots$. Y siguiendo una sugerencia del Dr. Marc Krasner, se procede como sigue.

Por estar α_i en $k(\alpha_{i+1})$, existe un polinomio $\varphi_i(x) \in k[x]$ tal que $\alpha_i = \varphi_i(\alpha_{i+1})$ y $n(\varphi_i) < n(f_{i+1})$, siendo $f_{i+1}(x) = \text{Irr}\ (\alpha_{i+1}, k)$.

En el anillo de polinomios $k[x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots]$ se considera el ideal $\mathfrak{T}$ engendrado por

$$\{f_i(x_i),\ x_{i-1} - \varphi_{i-1}(x_i)\}_{i=1,2,3,\cdots}\ (x_0 = \varphi_0 = 0).$$

Siendo $\Omega = k[x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots]/\mathfrak{T}$ y $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} k(\alpha_i)$, se tiene el siguiente:

Lema 8.1 Ω es isomorfo a L.

Demostración. Sea $\eta \in \Omega$, entonces:

$$\eta = Y(x_1, x_2, \cdots, x_s) + \mathfrak{T} = \overline{Y(x_1, x_2, \cdots, x_s)}$$
$$= \overline{A_0 + A_1x_1 + A_2x_1^2 + \cdots + A_tx_1^t},$$

donde $A_j (j = 0, 1, \cdots, t)$ son polinomios en $x_2, \cdots, x_s$ con coeficientes en k. Y como $x_1 - \varphi_1(x_2) \in \mathfrak{T}$, se tiene:

$$\eta = \overline{A_0 + A_1\varphi_1(x_2) + \cdots + A_t(\varphi_1(x_2))^t} = \overline{B_0 + B_1x_2 + \cdots + B_{t'}x_2^{t'}},$$

donde $B_j (j = 0, 1, \cdots, t')$ son polinomios en $x_3, \cdots, x_s$ con coeficientes en k. Y como también $x_2 - \varphi_2(x_3) \in \mathfrak{T}$, se sustituye x_2 por $\varphi_2(x_3)$. Siguiendo este proceso se llega a $\eta = \overline{g(x_s)}$, y como $f_s(x_s) \in \mathfrak{T}$, tenemos $g(x_s) = q(x_s)f_s(x_s) + r(x_s)$, donde $n(r(x_s)) < n(f_s(x_s))$, y se tiene finalmente: $\eta = \overline{r(x_s)}$.

Ahora definimos la siguiente correspondencia: dado $\eta = \overline{r(x_s)} \in \Omega$ le hacemos corresponder la clase de $r(x_s)$ en $k[x_s]/(f_s(x_s))$, que claramente es un isomorfismo.

Si α_i es la raíz de $f_i(x) = 0$ que define la sucesión $\{k(\alpha_i)\}$ de campos tales que $k(\alpha_i) \subset k(\alpha_{i+1}) (i = 1, 2, \cdots)$, se tiene $k[x_i]/(f_i(x_i)) \simeq k(\alpha_i)$, y por tanto:

$$\Omega \simeq \bigcup_{i=1}^{\infty} k[x_i]/(f_i(x_i)) \simeq \bigcup_{i=1}^{\infty} k(\alpha_i) = L.$$

Definición 1. Dada una sucesión $\{\eta_j\} = \{\overline{r_j(x_{s(j)})}\} \subset \Omega$ decimos que es de Cauchy si y sólo si la sucesión $\{\text{Irr}\ (r_j(x_{s(j)}), k\}$ es de Cauchy con la ultramétrica de S_k, y además:

$$\lim\ (\text{Irr}\ (r_j(x_{s(j)}) - r_{j+1}(x_{s(j+1)})), k) = x$$

cuando j tiende hacia infinito.

Con esta definición se tiene inmediatamente que la completación $\hat{\Omega}$ de Ω (utilizando la definición 1), es isomorfa con la completación $\hat{L}$ de L utilizando la ultramétrica del lema 7.1.

Definición 2. Dada la sucesión $\{\alpha_i\} \subset K$ = cerradura algebraica de k (campo valuado y completo), que es de Cauchy y tal que

$$|\alpha - \alpha_i| = |\alpha_{i+1} - \alpha_i| = \Delta(f_{i+1}, f_i) < \Delta(f_i) = r_{m-1}(f_i),$$

para $i = 1, 2, \cdots,$; siendo, además $\{f_i\} \subset S_k$ de Cauchy $[f_i = \text{Irr }(\alpha_i, k)]$. Entonces el completado $\hat{\Omega}$ de $\Omega = k[x_1, \cdots, x_i, \cdots]/\mathfrak{T}$ lo definimos como $k[x]/(\varphi)$, donde $\varphi = \lim f_i(x)$ cuando i tiende a ∞. Y siendo $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} k(\alpha_i)$, entonces la completación $\hat{L}$ de L con la ultramétrico del lema 7.1 es la extensión algebraica generalizada $k(\alpha)$, donde $\alpha = \lim \alpha_i$ cuando $i \to \infty$. Y se tiene

$$k[x]/(\varphi) = \hat{\Omega} \simeq \hat{L} = k(\alpha).$$

Si α es algebraico en el sentido usual, se tiene que $k(\alpha) \supset k(\alpha_i)\,(i = 1, 2, \cdots)$, en virtud de la condición que cumplen las α_i. Y entonces $\Omega = k[x]/(f(x))$, donde $f(x) = \text{Irr }(\alpha, k)$, y $L = k(\alpha)$, y $k(\alpha)$ es ya completo. Por tanto la definición 2 generaliza el concepto $k[x]/(f(x))$.

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL IPN

REFERENCIAS

[1] N. BOURBAKI, Eléments de mathématique. Part I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III. Topologie générale. Chapitres III et IV. Actual. Sci. Ind., no. 916. Hermann et Cie., Paris, 1942.

[2] M. KRASNER, *Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions finies et séparables des corps valués complets: principes fondamentaux; espaces de polynomes et transformation T; lois d'unicité, d'ordonations et d'existence.* C. R. Acad. Sci. Paris **222** (1946), 626–28.

[3] ———, *Algèbre et théorie de nombres,* Colloques Internationaux du CNRS, Paris (1949), 29–40.

[4] ———, *Approximation des corps valués complets de caractéristique* p $\neq$ 0 *par ceux de caractéristique* 0, Colloque D'Algebre Supérieur, Bruxelles (1956), CBRM, p. 129.

[5] ———, *Théorie de la ramification dans les extensions finies des corps valués: compléments et applications.* C. R. Acad. Sci. Paris **221** (1945), 737–39.

[6] ———, *Sur la primitivité de corps p-ádiques,* Mathematica (Cluj) (1937), 72–191.

[7] ———, *Théorie de la ramification des idéaux de Corps non-galoisiens de nombres algébriques,* Mém. Soc. Roy. Sci. Liege. Coll. **11** (1937), 1–110.

[8] ———, *Théorie de la ramification dans les extensions finies des corps valués: hypergroupe de décomposition.* C. R. Acad. Sci. Paris **220** (1945), 28–30.

[9] E. WEISS, Algebraic Number Theory, McGraw-Hill Book Co. Inc. New York—San Francisco—Toronto—London, 1963.