GRUPOS Y HOMOMORFISMOS ASOCIADOS CON UN SEMIGRUPO, III

POR JULIO RAFAEL BASTIDA

Esta nota constituye la conclusión de los artículos "Grupos y homomorfismos asociados con un semigrupo I, II" del autor, citados [1] y [2] en la bibliografía.

Las notaciones aquí empleadas son las de los artículos citados. En esta nota se presenta un ejemplo de un semigrupo S que contiene elementos p, q tales que $pH_q \nsubseteq H_{pq}$ y $H_{pq} \nsubseteq pH_q$. La construcción del ejemplo ilustra el cálculo explícito de $\mathcal{H}$-clases y de los varios conjuntos y grupos que se definieron anteriormente. La nota concluye con un problema cuya solución el autor ignora.

A. En esta parte se considera un grupo no-trivial G y el semigrupo multiplicativo I de los números reales x tales que $0 \leq x \leq 1$. La operación de G se designará por $\cdot$, y su elemento identidad por e.

Sea $S = \{ (g, 0) \mid g \in G\} \cup \{ (e, x) \mid x \in I\}$. Se define ahora una multiplicación en S como sigue:

$$\begin{aligned}
(g, 0)(h, 0) &= (g.h, 0) && \text{si} \quad g \in G \quad \text{y} \quad h \in G,\\
(e, x)(e, y) &= (e, xy) && \text{si} \quad x \in I \quad \text{e} \quad y \in I,\\
(g, 0)(e, x) &= (g, 0) && \text{si} \quad g \in G \quad \text{y} \quad x \in I,\\
(e, x)(g, 0) &= (g, 0) && \text{si} \quad g \in G \quad \text{y} \quad x \in I.
\end{aligned}$$

Es evidente que S, dotado con esta multiplicación, es un semigrupo, y que $(e, 1)$ es su elemento identidad. Obsérvese también que $\{ (g, 0) \mid g \in G\}$ es un subgrupo de S, y que $\{ (e, x) \mid x \in I\}$ es un subsemigrupo de S.

Sean $a = (e,0)$ y $b = (e, 1)$. Se tiene entonces que $ab = (e,0)(e,1) = (e,0) = a$.

$a)$ Es fácil ver que $H_a = \{ (g, 0) \mid g \in G\}$. En efecto, es claro que $a \in \{ (g, 0) \mid g \in G\}$, y como $\{ (g, 0) \mid g \in G\}$ es un subgrupo de S, es evidente que dos elementos cualesquiera de $\{ (g, 0) \mid g \in G\}$ son $\mathcal{H}$-equivalentes, de lo cual resulta que $\{ (g, 0) \mid g \in G\} \subseteq H_a$. Por otro lado, si $x \in I$ y $x > 0$, entonces $(e, x) \neq (g, 0)u$ para todas $g \in G$ y $u \in S$, de modo que (e, x) no es $\mathcal{H}$-equivalente a ningún elemento de $\{ (g, 0) \mid g \in G\}$; se concluye así que $H_a = \{ (g, 0) \mid g \in G\}$.

$b)$ También es claro que $H_b = \{b\}$. En efecto, en el argumento de $a)$ se vió que $(e, 1)$ no es $\mathcal{H}$-equivalente a ningún elemento de $\{ (g, 0) \mid g \in G\}$. Y además, si $x \in I$ y $x < 1$, entonces $(e, x)(e, y) \neq (e, 1)$ para toda $y \in I$, de lo cual se deduce que $(e, 1)$ no es $\mathcal{H}$-equivalente a (e, x). Se tiene entonces que $H_{(e,1)} = \{ (e, 1)\}$, o sea que $H_b = \{b\}$.

$c)$ Se verifica, finalmente, que $aH_b \subset H_{ab}$. Esto es una consecuencia evidente de $a)$ y $b)$, pues

$$aH_b = a\{b\} = \{ab\} = \{a\} \text{ y } H_{ab} = H_a = \{ (g, 0) \mid g \in G\}$$

y como $a = (e, 0)$ y G $\neq \{e\}$, se concluye que $aH_b \subset H_{ab}$.

B. En esta parte se considera un conjunto no-vacío X.

El conjunto de todas las funciones de X a X se designa por J_X. Si $\alpha \in J_X$ y y $\beta \in J_X$, por $\alpha\beta$ se designa el elemento de J_X tal que $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ para toda $x \in X$. Se ha definido así una multiplicación en J_X ; y es claro que J_X ,dotado con esta multiplicaión, es un semigrupo, el elemento $\mathcal{E}$ de J_X tal que $x\mathcal{E} = x$ para toda $x \in X$ es, evidentemente, el elemento identidad de J_X.

Para cada $\alpha \in J_X$, el conjunto $\{ (x, y) \mid x \in X, y \in X, \text{ y } x\alpha = y\alpha\}$ se designa por P_α.

El resultado siguiente, que se demuestra en [3], es esencial en el estudio del semigrupo J_X : si $\alpha \in J_X$ y $\beta \in J_X$, entonces α y β son $\mathcal{H}$-equivalentes si y solamente si $X\alpha = X\beta$ y $P_\alpha = P_\beta$.

En lo que sigue se supondrá que X es el conjunto de los enteros no-negativos, o sea que $X = \{0, 1, 2, 3, \cdots .\}$.

Sean $I = \{2x \mid x \in X\}$ y $J = \{2x + 1 \mid x \in X\}$: es claro que $I \cap J = \varnothing$ y $X = I \cup J$. Sea también $D = \{ (x, x) \mid x \in X\}$. Se definen ahora elementos α y β de J_X como sigue:

$$x\alpha = \begin{cases} 4x & \text{si} \quad x \in I, \\ x + 5 & \text{si} \quad x \in J, \end{cases}$$

$$x\beta = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \in I, \\ 0 & \text{si} \quad x \in J; \end{cases}$$

es claro entonces

$$x(\alpha\beta) = \begin{cases} 4x + 2 & \text{si} \quad x \in I, \\ x + 7 & \text{si} \quad x \in J. \end{cases}$$

Se verifica fácilmente que $X(\alpha\beta) = \{2, 8, 10, 12, 14, 16, \cdots\}$ y $P_{\alpha\beta} = \{ (2x, 8x - 5) \mid x \in X \text{ y } x > 0\} \cup \{ (8x - 5, 2x) \mid x \in X \text{ y } x > 0\} \cup D$.

Sea γ el elemento de J_x tal que

$$x\gamma = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \in I - \{4, 6\}, \\ 8 & \text{si} \quad x = 4, \\ 6 & \text{si} \quad x = 6, \\ 0 & \text{si} \quad x \in J. \end{cases}$$

a) Es claro que $\gamma \in H_\beta$: De las definiciones de β y γ as evidente que $X\gamma = I = X\beta$ y $P_\gamma = (J \times J) \cup D = P_\beta$; luego β y γ son $\mathcal{H}$-equivalentes, o sea que $\gamma \in H_\beta$.

b) Es también claro que $\alpha\gamma \notin H_{\alpha\beta}$. En efecto, como

$$X(\alpha\gamma) = \begin{cases} 4x + 2 & \text{si} \quad x \in I, \\ 6 & \text{si} \quad x = 1, \\ x + 7 & \text{si} \quad x \in J - \{1\}, \end{cases}$$

se tiene que $X(\alpha\gamma) = \{2, 6, 10, 12, 14, 16, \cdots\}$; por otro lado, se sabe que $8 \in X(\alpha\beta)$, de modo que $X(\alpha\gamma) \neq X(\alpha\beta)$; luego $\alpha\gamma$ y $\alpha\beta$ no son $\mathcal{H}$-equivalentes, o sea que $\alpha\gamma \notin H_{\alpha\beta}$.

$c)$ Se demuestra ahora, para concluir, que $H_{\alpha\beta} \subset \alpha H_\beta$:

De $a)$ se sabe que $\alpha\gamma \in \alpha H_\beta$, y de $b)$ que $\alpha\gamma \notin H_{\alpha\beta}$. So tiene entonces que $\alpha H_\beta \neq H_{\alpha\beta}$; bastará verificar que $H_{\alpha\beta} \subseteq \alpha H_\beta$.

Sea entonces $\delta \in H_{\alpha\beta}$. Luego $X\delta = X(\alpha\beta) = \{2, 8, 10, 12, 14, 16 \cdots\}$ y $P_\delta = P_{\alpha\beta} = \{(2x, 8x - 5) \mid x \in X \text{ y } x > 0\} \cup \{(8x - 5, 2x) \mid x \in X \text{ y } x > 0\} \cup D$.

Si $x \in I$, $y \in J$, y $4x = y + 5$, entonces $x(\alpha\beta) = 4x + 2 = y + 7 = y(\alpha\beta)$, de donde $(x, y) \in P_{\alpha\beta}$; siendo $P_\delta = P_{\alpha\beta}$, se tiene que $(x, y) \in P_\delta$, o sea que $x\delta = y\delta$.

Es posible entonces, en virtud del argumento precedente, definir un elemento λ de J_X como sigue:

$$\begin{aligned}
(4x)\lambda &= x\delta && \text{si} \quad x \in I, \\
(x + 5)\lambda &= x\delta && \text{si} \quad x \in J, \\
x\lambda &= 4 && \text{si} \quad x = 2, \\
x\lambda &= 6 && \text{si} \quad x = 4, \\
x\lambda &= 0 && \text{si} \quad x \in J;
\end{aligned}$$

es entonces claro que $X\lambda = I = X\beta$.

La inclusión $(J \times J) \cup D \subseteq P_\lambda$ es evidente.

Se desea verificar que $P_\lambda \subseteq (J \times J) \cup D$. Supóngase que esto sea falso. Luego existe un elemento (x, y) de P_λ tal que $(x, y) \notin (J \times J) \cup D$; como ninguno de los enteros 0, 4, 6 pertenece a $X\delta$, la definición de λ implica que $x \in I - \{2, 4\}$ e $y \in I - \{2, 4\}$, de modo que uno de los enteros x, y puede escribirse en la forma $z + 5$, con $z \in J$; puede suponerse, por supuesto, que $y = z + 5$, donde $z \in J$. Es imposible que exista un elemento w de J tal que $x = w + 5$; en efecto, en caso contrario $w\delta = (w + 5)\lambda = x\lambda = y\lambda = (z + 5)\lambda = z\delta$, de donde $(w, z) \in P_\delta$, lo cual implica que $(w, z) \in D$, o sea que $w = z$; y esto implica que $x = y$, lo cual es absurdo. Es también imposible que exista un elemento w de I tal que $x = 4w$: en efecto, en caso contrario $w\delta = (4w)\lambda = x\lambda = y\lambda = (z + 5)\lambda = z\delta$, de donde $(w, z) \in P_\delta$; esto implica la existencia de un entero n tal que $n > 0$, $w = 2n$, y $z = 8n - 5$, de donde se deduce que $y = z + 5 = 8n = 4w = x$, lo cual es absurdo. En conclusión, se ve que $x \in I - \{2, 4\}$, que $x \neq w + 5$ para toda $w \in J$, y que $x \neq 4w$ para toda $w \in I$; esto es evidentemente absurdo. Se deduce entonces que $P_\lambda \subseteq (J \times J) \cup D$.

Luego $P_\lambda = (J \times J) \cup D$; pero es evidente que $P_\beta = (J \times J) \cup D$, de modo que $P_\lambda = P_\beta$.

Se ha visto así que $X\lambda = X\beta$ y $P_\lambda = P_\beta$, lo cual quiere decir que λ y β son $\mathcal{H}$-equivalentes. Luego $\lambda \in H_\beta$.

Es fácil ver que $\delta = \alpha\lambda$: en efecto, si $x \in I$, entonces $x(\alpha\lambda) = (x\alpha)\lambda = (4x)\lambda = x\delta$; y si $x \in J$, entonces $x(\alpha\lambda) = (x\alpha)\lambda = (x + 5)\lambda = x\delta$.

Dado que $\lambda \in H_\beta$ y que $\delta = \alpha\lambda$, se llega finalmente a la conclusión deseada, o sea que $\delta \in \alpha H_\beta$.

C. En esta parte se consideran semigrupos S' y S'', sus operaciones siendo designadas multiplicativamente.

Sea $S = S' \times S''$. Se define entonces una multiplicación en S como sigue: $(x', x'')(y', y'') = (x'y', x''y'')$. Es claro que S, dotado con esta multiplicación, es un semigrupo. La validez de la proposición siguiente es evidente:

PROPOSICIÓN: *Si S' y S'' tienen elemento identidad, y si $(x', x'') \in S' \times S''$, entonces $H_{(x',x'')} = H_{x'} \times H_{x''}$.*

D. Es fácil construir ahora el ejemplo deseado. Desígnese por S' el semigrupo construído en la parte A, y por S'' el construído en la parte B.

Se sabe que S' y S'' son semigrupos con identidad. También se sabe que S' contiene elementos a, b tales que $aH_b \subset H_{ab}$, y que S'' contiene elementos α, β tales que $H_{\alpha\beta} \subset \alpha H_\beta$.

Sea $S = S' \times S''$ el semigrupo definido como en la parte **C**, y sean $p = (a, \alpha)$ y $q = (b, \beta)$. Se tiene entonces que $pq = (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha\beta)$, de modo que $H_{pq} = H_{ab} \times H_{\alpha\beta}$; y además, se ve también que $pH_q = (a, \alpha)H_{(b,\beta)} = (a, \alpha)\cdot(H_b \times H_\beta) = aH_b \times \alpha H_\beta$.

La inclusión $pH_q \subseteq H_{pq}$ implicaría entonces que $\alpha H_\beta \subseteq H_{\alpha\beta}$, en contradicción con $H_{\alpha\beta} \subset \alpha H_\beta$. Por otro lado, la inclusión $H_{pq} \subset pH_q$ implicaría que $H_{ab} \subseteq aH_b$, en contradicción con $aH_b \subset H_{ab}$.

Se concluye entonces que $pH_q \nsubseteq H_{pq}$ y que $H_{pq} \nsubseteq pH_q$, que era lo deseado.

E. En esta parte final se presenta una pregunta cuya respuesta el autor ignora.

Sea S un semigrupo, y sean $x, y \in S$. En virtud de la discusión de la parte V de [1], se sabe que $\Gamma_1[x, y]$ se identifica canónicamente con un subgrupo de Γ_y, y que $\Gamma_2[x, y]$ se identifica canónicamente con un subgrupo de Γ_{xy}. También se sabe que la inclusión $xH_y \subseteq H_{xy}$ implica que $\Gamma_1[x, y] = \Gamma_y$, y que la inclusión $H_{xy} \subseteq xH_y$ implica que $\Gamma_2[x, y] = \Gamma_{xy}$.

Esto dicho, se tiene el problema siguiente. ¿ Existe un semigrupo S que contenga elementos x, y tales que $\Gamma_1[x, y] \subset \Gamma_y$ y que $\Gamma_2[x, y] \subset \Gamma_{xy}$?

FLORIDA ATLANTIC UNIVERSITY

REFERENCIAS

[1] J. R. BASTIDA, *Grupos y homomorfismos asociados con un semigrupo* I, Bol. Soc. Mat. Mex., **8** (1963) 26–45.

[2] J. R. BASTIDA, *Grupos y homomorfismos asociados con un semigrupo* II, Bol. Soc. Mat. Mex., **9** (1964) 7–16.

[3] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*. Math. Surveys. **7**: Amer. Math. Soc. (1962).