ALGUNOS RESULTADOS EN TEORIA DE FUNCIONES PARCIALMENTE CONTINUAS

POR A. GARCÍA-MÁYNEZ

1. Introducción

En este trabajo se presenta una generalización del teorema (6.2) del artículo [2]. La hipótesis "$f:X \to Y$ es una conectividad" ha sido reemplazada por "la función gráfica de $f:X \to Y$ es débilmente continua". Se ha hecho un esfuerzo por presentar todo el material necesario para hacer ágil y accesible la demostración de este teorema. Al final de este trabajo se hace patente el hecho de que si $f:I^n \to I^n$ es una función del n-cubo en sí mismo, en donde $n \geq 2$, las siguientes cuatro propiedades son equivalentes:

1) la función gráfica de f es débilmente contínua
2) f es periféricamente contínua
3) f es una conectividad
4) si $E \subset I^n$ es conexo y no degenerado, la gráfica de E carece de puntos aislados.

De ahí que el *Teorema del punto fijo de Brouwer* sea válido para funciones $f:I^n \to I^n$ que satisfacen cualquiera de estas cuatro propiedades, en virtud de ser el caso si f es periféricamente contínua (ver [1]).

2. Notación

Las letras X, Y, Z denotarán siempre espacios topológicos. El simbolismo "$f:X \to Y$" indica que f es una función del espacio X en el espacio Y, y se usa doble flecha $\Rightarrow$ si se quiere indicar que f es suprayectiva. Llamaremos *no degenerado* a cualquier conjunto que conste de más de un elemento. Un espacio T_1 es aquél en que cada uno de sus puntos es cerrado. Si A es un subconjunto de un espacio X, "int A", "F_rA", "$\bar{A}$" denotan, respectivamente, el interior, la frontera y la cerradura de A respecto a X. Un conexo es una *región* o un *contínuo* según que sea abierto o compacto.

3. Resultados preliminares

DEFINICIÓN 3.1. Un espacio X es *periféricamente compacto* si su topología admite una base cuyos elementos tienen frontera compacta.

PROPOSICIÓN 3.2. *Todo espacio X periféricamente compacto y de Hausdorff es regular.*

Demostración. Sea $x \in X$ y U un abierto que contiene a x. Existe V, abierto, tal que $x \in V \subset U$ y F_rV es compacta. Como X es de Hausdorff, existen abiertos ajenos R, S tales que $x \in R$, $F_rV \subset S$. Si definimos $W = V \cap R$ tenemos $x \in W \subset \bar{W} \subset U$ pues $\bar{W} \subset \bar{V}$, $\bar{W} \cap F_rV = \Phi$ implican $\bar{W} \subset V \subset U$.

DEFINICIÓN 3.3. X es *semi-localmente conexo* si para cada $x \in X$ y cada abierto U que contenga a x, existe un abierto V tal que $x \in V \subset U$ y $X - V$ tiene cuando más un número finito de componentes.

La siguiente proposición describe un tipo de espacios en donde la conexidad semi-local es más débil que la conexidad local.

PROPOSICIÓN 3.4. *Todo espacio X conexo, localmente conexo, periféricamente compacto y de Hausdorff es semi-localmente conexo.*

Demostración. Sea $x \in X$ y U un abierto que contiene a x. Existen abiertos V_1, V_2 tales que $x \in V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V_2 \subset \bar{V}_2 \subset U$ en donde F_rV_2 es compacta. Las componentes de $X - \bar{V}_1$ forman una cubierta abierta de F_rV_2, de manera que podemos extraer una subcubierta finita $\{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$. Sea K_i la componente de $X - V_1$ que contiene a H_i. Observemos que $X - V_2 \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$, pues si K es una componente de $X - V_1$ que intersecta a $X - V_2$ pero es distinta de cada K_i, entonces $K \subset X - \bar{V}_2$ pues $K \cap F_rV_2 = \Phi$. Por tanto K sería abierta y cerrada, y esto contradice el hecho de que X es conexo.

Finalmente, definiendo $W = X - \bigcup_{i=1}^n K_i$, tenemos $x \in W \subset V_2 \subset U$ y $X - W$ tiene solamente un número finito de componentes.

El siguiente lema es elemental pero útil:

LEMA 3.5. *Si R es una región en un espacio X localmente conexo y regular y a, b son dos puntos arbitrarios de R, entonces existe un conexo cerrado $H = H_{a,b}$ tal que $\{a, b\} \subset H \subset R$.*

Demostración. Para cada $x \in R$, existe una región V_x tal que $x \in V_x \subset \bar{V}_x \subset R$. Como R es conexa y las $\{V_x\}$ cubren a R, existe una cadena simple $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \cdots, V_{x_n}\}$ en donde $a \in V_{x_1}$ y $b \in V_{x_n}$. Basta, por tanto, definir $H_{a,b} = \bigcup_{i=1}^n \bar{V}_{x_i}$ para obtener el resultado deseado.

PROPOSICIÓN 3.6. *Si X es un espacio conexo, localmente conexo, periféricamente compacto y de Hausdorff y $x \in X$ es tal que $X - x$ es conexo, entonces para cada abierto U que contenga a x, existe una región V tal que $x \in V \subset U$ y $X - V$ es conexo.*

Demostración. Como X es semi-localmente conexo, existe un abierto R tal que $x \in R \subset U$ y $X - R$ tiene sólo un número finito de componentes, digamos K_1, K_2, $\cdots$, K_n. Escojamos $a_i \in K_i$. Para cada i existe un conexo cerrado H_i en $X - x$ que contiene a los puntos a_1 y a_i. Sea S un abierto tal que $x \in S \subset R \cap (X - \bigcup_{i=1}^n H_i)$. Observemos que $\bigcup_{i=1}^n H_i$ es un conexo en $X - S$ que intersecta a cada K_i. Por tanto $\bigcup_{i=1}^n K_i = X - R$ está contenido en una sola componente C de $X - S$. Definamos, finalmente, V = componente de $X - C$ que contiene a x. Obviamente $x \in V \subset R \subset U$ y $X - V = C \cup (\bigcup_\alpha V_\alpha)$ en donde $\{V_\alpha\}$ son las componentes de $X - C$ distintas de V. Como X es conexo, cada $\bar{V}_\alpha \cap C$ es no vacía. Por tanto, $X - V = C \cup (\bigcup_\alpha \bar{V}_\alpha)$ es conexo.

4. Elementos Cíclicos

Empezaremos esta sección con varias definiciones.

DEFINICIÓN 4.1. Si X es conexo y $x \in X$, diremos que x es un *punto de corte de* X (o *corta a* X) si $X - x$ no es conexo.

DEFINICIÓN 4.2. Un subconjunto conexo no degenerado E de un espacio arbitrario X es un *elemento cíclico propio* si E no tiene puntos de corte y si cada conexo que contenga a E propiamente tiene puntos de corte.

DEFINICIÓN 4.3. Si $x \in X$, diremos que x es un punto extremo de X si para cada abierto U que contenga a x, existe un abierto V tal que $x \in V \subset U$ y F_rV consta de un sólo punto.

DEFINICIÓN 4.4. Dos puntos $p, q \in X$ son *conjugados* si ningún punto de X separa a p y q, es decir, si para cada $r \in X - (p \cup q)$ y cada separación $X - r = A \cup B$ se tiene $p \cup q \subset A$ ó $p \cup q \subset B$.

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea X un espacio conexo, no degenerado, localmente conexo, periféricamente compacto y de Hausdorff. Si $p \in X$ no corta a X y no es un punto extremo de X, entonces existe un punto en $X - p$ que es conjugado de p.*

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que p no es conjugado de ningún punto de $X - p$. Si U es un abierto alrededor de p, existe una región V tal que $p \in V \subset U$ y $X - V$ es conexo y no vacío (ver 3.6). Escojamos $q \in F_rV$. Como p y q no son conjugados, existe un punto $x \in X$ y una separación $X - x = A_p \cup A_q$ en donde $p \in A_p$ y $q \in A_q$. Necesariamente $x \in V$, pues de lo contrario $V \cup q$ sería un conexo en $X - x$ que intersecta a A_p y A_q. Por tanto, $X - V \subset A_q$, $A_p \cup x \subset V$, $F_rA_p = x$, de manera que p es un punto extremo, una contradicción.

DEFINICIÓN 4.6. Sean p, X como en la proposición 4.5. Definimos T_p como el conjunto de puntos de $X - p$ que son conjugados de p.

PROPOSICIÓN 4.7. *Si X es un contínuo métrico localmente conexo, entonces $T_p \cup p$ es un elemento cíclico propio.*

Demostración. Por (4.5), $L = T_p \cup p$ es no degenerado. Demostraremos ahora que si γ es un arco simple en X que une dos puntos a y b de L, entonces $\gamma \subset L$. Si $z \in \gamma - L$, existe un punto $x \in X$ y una separación $X - x = M \cup N$ en donde $p \in M$, $z \in N$. Como $L \cap N = \Phi$ tenemos $L \subset M \cup x$. Pero $\gamma - x = (\gamma \cap M) \cup (\gamma \cap N)$ es una separación, de manera que $(\gamma \cap M) \cup x$ es un subcontínuo propio de γ que contiene a y b, lo cual es imposible. Esto implica, en particular, que L es conexo y que p no es un punto de corte de L. Si $q \in T_p$ cortara a L, tendríamos una separación $L - q = A \cup B$ en donde $p \in A$. Escojamos $b \in B$. Como p y b son conjugados, q no puede separarlos en X, de manera que existe un arco simple γ en $X - q$ que une p y b. Por lo ya demostrado,

$\gamma \subset L - q$, una contradicción. Por tanto, L es un conjunto conexo, no degenerado, sin puntos de corte. L es máximo respecto a estas propiedades, pues si N_0 es conexo, contiene a L y $x \in N_0 - L$, existe un punto $z \in X$ tal que $X - z = A \cup B$ es una separación y $p \in A$, $x \in B$. Necesariamente $z \in N_0$, pues de lo contrario N_0 sería un conexo en $X - z$ que intersecta a A y B. Por consiguiente z es un punto de corte de N_0.

COROLARIO 4.8. *Si $Z \subset X$ es arco conectable, también lo es $Z \cap (T_p \cup p)$.*

Las siguientes proposiciones describen algunas otras propiedades de los elementos cíclicos propios.

PROPOSICIÓN 4.9. *Todo elemento cíclico propio E de un espacio T_1 X es cerrado.*

Demostración. Si $x \in \bar{E} - E$, $E \cup x$ es conexo, no degenerado y carece de puntos de corte.

PROPOSICIÓN 4.10. *Si X es localmente compacto, conexo, localmente conexo, métrico y separable, E es un elemento cíclico propio de X y Q es una componente de $X - E$, entonces F_rQ consta de un sólo elemento.*

Demostración. Supongamos que a, b son dos puntos distintos de F_rQ. Sean R_a, R_b dos regiones ajenas tales que $a \in R_a$, $b \in R_b$ y sean $a' \in R_a \cap Q$, $b' \in R_b \cap Q$. Sea γ_1 un arco simple en Q que une a' y b'. Los puntos a, a' pueden ser unidos en R_a por un arco simple γ_2 y los puntos b, b' pueden ser unidos en R_b por un arco simple γ_3. La curva $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ contiene un arco simple γ tal que los puntos extremos de γ y *sólo* los puntos extremos de γ están en E. Obviamente $E \cup \gamma$ es conexo, cíclico y contiene a E como subconjunto propio, lo cual es una contradicción.

PROPOSICIÓN 4.11. *Sean X, E como en* (4.4). *Existe entonces una retracción monótona $r: X \Rightarrow E$.*

Demostración. Defínase $r(x) = x$ si $x \in E$ y $r(x) = F_rQ_x$ si $x \in Q_x$, componente de $X - E$. Si K es un cerrado en E, $r^{-1}(K) = K \cup (\bigcup_\alpha Q_\alpha)$, en donde $\{Q_\alpha\}$ son las componentes de $X - E$ cuyo punto fronterizo está contenido en K. Como X es conexo y localmente conexo, la frontera del abierto $\bigcup_\alpha Q_\alpha$ está contenida en K. Por tanto $r^{-1}(K)$ es cerrado y r es continua.

5. Conjuntos semi-cerrados y espacios unicoherentes

Una importante clase de subconjuntos de un espacio X es la clase de subconjuntos semi-cerrados cuya definición aparece abajo. Todo cerrado en un espacio de Hausdorff resulta ser semi-cerrado.

DEFINICIÓN 5.1. Un subconjunto H de un espacio X es *semi-cerrado* si H tiene componentes cerradas en X y si todo subconjunto no degenerado que es el límite de una sucesión convergente de componentes de H está contenido en H.

DEFINICIÓN 5.2. Para cada función $f:X \to Y$ definimos la función gráfica de f como $g:X \to X \times Y$ en donde $g(x) = (x, f(x))$.

DEFINICIÓN 5.3. Una función $f : X \to Y$ es *débilmente continua* si para cada cerrado $K \subset Y, f^{-1}(K)$ tiene todas sus componentes cerradas en X.

PROPOSICIÓN 5.4. *Si X es localmente conexo y de Hausdorff y $f:X \to Y$ es una función de X en un espacio Y cuya función gráfica es débilmente continua, entonces si $K \subset Y$ es cerrado, $f^{-1}(K)$ es semi-cerrado.*

Demostración. Obviamente f es débilmente continua, de manera que sólo es necesario demostrar que si $C_1, C_2, \cdots$ es una sucesión de componentes de $f^{-1}(K)$ que converge a un conjunto C que contiene un punto $p \in X - f^{-1}(K)$, entonces $C = p$. Supongamos, por el contrario, que C contiene un punto $q \neq p$. Sea R una región tal que $q \in R \subset \bar{R} \subset X - p$. Si n es suficientemente grande, digamos si $n > m$, $C_n \cap R \neq \Phi$. Por este motivo el conjunto $Q = R \cup (\bigcup_{n>m} C_n)$ es conexo. Sin embargo $p \in \bar{Q}$ pero $g(p) \notin g(Q)$ puesto que $g(p) \in (X - \bar{R}) \times (X - K) \subset X \times Y - g(Q)$. Esto contradice el hecho de que g es débilmente continua.

En lo que sigue llamaremos *espacio de Peano* a todo continuo métrico localmente conexo.

Es necesario ahora introducir el concepto de unicoherencia.

DEFINICIÓN 5.5. Un espacio conexo X es unicoherente (entre dos subconjuntos A y B) si para cada representación $X = H \cup K$, en donde H, K son conexos cerrados (y $H \supset A$, $K \supset B$), la intersección $H \cap K$ es conexa.

PROPOSICIÓN 5.6. *Sea $f:X \Rightarrow Y$ una función continua, cerrada y monótona. Si X es unicoherente entre dos subconjuntos A y B entonces Y es unicoherente entre $f(A)$ y $f(B)$.*

Demostración. Supongamos que $Y = H \cup K$, en donde H y K son conexos cerrados y $H \supset f(A)$, $K \supset f(B)$. Por tanto $X = f^{-1}(H) \cup f^{-1}(K)$, en donde $f^{-1}(H)$ y $f^{-1}(K)$ son conexos cerrados y $f^{-1}(H) \supset A$, $f^{-1}(K) \supset B$. Como X es unicoherente entre A y B, el conjunto $f^{-1}(H) \cap f^{-1}(K) = f^{-1}(H \cap K)$ es conexo. Por consiguiente, $H \cap K = ff^{-1}(H \cap K)$ es también conexo.

PROPOSICIÓN 5.7. *Sea X un espacio unicoherente de Peano. Si $L \subset X$ es un subconjunto de X que separa a X, existe un conexo cerrado $K \subset L$ tal que K separa a X.*

Demostración. Si $X - L = M \cup N$ e una separación, existen abiertos ajenos R, S tales que $M \subset R$, $N \subset S$. Tomando $C = X - (R \cup S)$ es fácil de ver que C es cerrado, $C \subset L$ y separa a X. Escojamos $a \in R$, $b \in S$. Demostraremos ahora que la propiedad de separar a los puntos a, b es inductiva. Si $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ es una sucesión decreciente de compactos que separan a y b, necesariamente $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ separa a y b. Supongamos, por el contrario, que este no es el caso. Existe entonces un arco γ en $X - \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ que une a y b. Como cada C_n separa a y b, $\gamma \cap C_n \neq \Phi$ para cada n. La sucesión decreciente de compactos no vacíos $\gamma \cap C_1 \supset \gamma \cap C_2$

$\supset \cdots$ debe tener intersección no vacía. Pero $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\gamma \cap C_n) = \gamma \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n)$, lo cual contradice el hecho de que γ está contenido en $X - \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Por el principio de reducción de Brouwer, C contiene un cerrado K que separa a y b irreduciblemente. Si R_a, R_b son las componentes de $X - K$ que contienen a y b respectivamente, la irreducibilidad de K implica que $K = F_r R_a = F_r R_b$. Observemos ahora que R_b es una componente de $X - \bar{R}_a$. Por tanto, si $X - R_a = \bar{R}_b \cup (UC_\alpha)$, en donde $\{C_\alpha\}$ son las componentes de $X - \bar{R}_a$ distintas de R_b, la conexidad de X implica $C_\alpha \cap \bar{R}_b \neq \Phi$, de manera que $X - R_a$ debe ser conexo. Finalmente, como X es unicoherente y $X = \bar{R}_a \cup (X - R_a)$, el conjunto $\bar{R}_a \cap (X - R_a) = F_r R_a = K$ debe ser conexo. Esto completa la demostración.

Corolario 5.8. *Si X es un espacio unicoherente de Peano sin puntos de corte, ningún subconjunto totalmente disconexo puede separar a X.*

Las dos siguientes proposiciones describen dos propiedades básicas de los conjuntos semi-cerrados. La primera de ellas es trivial y omitimos su demostración.

Proposición 5.9. *Si H, K son subconjuntos de X, en donde H es cerrado y K semi-cerrado, entonces $H \cap K$ es semi-cerrado.*

Proposición 5.10. *Si K es un subconjunto semi-cerrado de un espacio compacto y métrico X, la identificación determinada por las componentes de K y los puntos de $X - K$ es cerrada.*

Demostración. Debemos demostrar que si C es un cerrado en X y T es la unión de componentes de K que intersectan a C, entonces $T \cup C$ es cerrado. Supongamos que $x \in \bar{T} - T$, $x \notin C$. Existe una sucesión de componentes de T que convergen a un conjunto H, en donde $x \in H$. Las hipótesis relativas a X implican que H es un continuo. Como cada componente de T intersecta a C, tenemos $H \cap C \neq \Phi$. Por tanto, H es no degenerado. Como K es semi-cerrado tenemos $x \in H \subset K$, y finalmente, de $H \cap C \neq \Phi$, concluimos $x \in H \subset T$, una contradicción.

6. Teorema principal

Antes de enunciar nuestro teorema daremos dos definiciones:

Definición 6.1. Un espacio X es *localmente cohesivo* si para cada $x \in X$ y cada abierto U que contenga a x, existe una región R tal que $x \in R \subset U$; $F_r R$ es conexa y $\bar{R}$ es unicoherente entre x y $F_r R$.

Definición 6.2. Una función $f: X \to Y$ es *periféricamente contínua* si para cada $x \in X$ y cada par de abiertos U, V que contengan a x, $f(x)$ respectivamente, existe un abierto W tal que $x \in W \subset U$ y $f(F_r W) \subset V$.

Teorema 6.3. *Sea X un espacio métrico, localmente compacto y localmente cohesivo. Sea $f: X \to Y$ una función de X en un espacio Y regular y T_1. Si la función gráfica g de f es débilmente continua, entonces f es periféricamente continua.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U, V abiertos que contienen a x, $f(x)$ respectivamente. Podemos suponer que U es una región con frontera conexa tal que $\bar{U}$ es compacta y unicoherente entre x y $F_r U$. Sean U_0, V_0 dos abiertos tales que

$x \in U_0 \subset \bar{U}_0 \subset U$; $f(x) \in V_0 \subset \bar{V}_0 \subset V$. Por las proposiciones 5.4 y 5.9, el conjunto $D = \bar{U}_0 \cap f^{-1}(\bar{V}_0)$ es semi-cerrado. Sea A_0 la componente de D que contiene a x, y sea A la unión de A_0 y todas las componentes de $X - A_0$ que no están contenidas en U. Es claro que A es cerrado, conexo y $FrA \subset A_0$. Además $\bar{U} - A$ es conexo y contiene a $B = FrU$. Si $x \in W = \text{int}\, A$, entonces $FrW \subset A_0 \subset D \subset f^{-1}(V)$ y $W \subset U$, y no habría nada más que probar. Supongamos, pues, que $x \notin \text{int}\, A$. Sea $Z = \bar{U}/\mathcal{G}$, en donde $\mathcal{G}$ es la descomposición de $\bar{U}$ determinada por A, B, las componentes de D ajenas a A y cada punto de $U - (A \cup D)$. La proposición 5.10 implica que la identificación canónica $h : \bar{U} \Rightarrow Z$ es cerrada, y, usando la proposición 5.6, concluimos que Z es un espacio de Peano unicoherente entre $a = h(A)$ y $b = h(B)$. Cabe considerar dos casos:

1) b es conjugado de a

2) b no es conjugado de a

En el primer caso, a y b pertenecen a un elemento cíclico propio E (proposición 4.2). Observemos lo siguiente:

i) E es unicoherente entre a y b (proposiciones 4.11 y 5.6)

ii) $h(D)$ es totalmente disconexo

iii) E es unicoherente (teorema 5.2 en [2]).

Por tanto, por el corolario 5.8 el conjunto $N' = E - h(D)$ es conexo. Además $x \in \bar{N}$, en donde $N = h^{-1}(N')$. En efecto, si $x \notin \bar{N}$, existe una región S tal que $x \in S \subset X - N$. El conjunto $T = h(S) \cap E$ satisfaría entonces las siguientes propiedades incompatibles:

1) $T \subset h(D)$

2) T es no degenerado

3) T es conexo.

La propiedad 1) es evidente. En cuanto a 2), si T se redujera al punto a, el conjunto $h(S)$, que es conexo y no degenerado (pues $x \notin \text{int}\, A$), no podría intersectar a más de una componente de $Z - E$, pues entonces contendría un punto de corte de Z (Proposición 4.10), el cual tendría que coincidir con a, contradiciendo el hecho de que a no corta a Z. Obtendríamos la misma contradicción si $h(S)$ estuviera contenido en la cerradura de una componente de $Z - E$. Finalmente, la última propiedad es una consecuencia del Corolario 4.8.

Notemos, a continuación, que $g(x) = (x, f(x)) \notin \overline{g(N)}$, pues $g(x) \in U_0 \times V_0 \subset X \times Y - g(N)$ y esto contradice el hecho de que g es débilmente contínua.

Por tanto a y b no pueden ser conjugados. Sea z un punto de Z que separa a y b. Necesariamente $h^{-1}(z)$ es una componente de D pues $\bar{U}$ no tiene puntos de corte.†

† Supongamos que $\alpha \in U$ es un punto de corte de $\overline{U}$, digamos $\overline{U} - \alpha = A \cup B$, en donde $F_rU \subset A$. Existe una región R_α tal que $\alpha \in R_\alpha \subset \overline{R}_\alpha \subset U$; $B \not\subset R_\alpha$ y cuya frontera F_rR_α es conexa. Ambos conjuntos $A \cup \alpha$, $B \cup \alpha$ son conexos e intersectan a R_α y a su complemento. Por tanto $A \cap F_rR_\alpha \neq \Phi \neq B \cap F_rR_\alpha$. Pero esto es imposible puesto que F_rR_α es conexa y $F_rR_\alpha \subset A \cup B$.

Por tanto si G' es la componente de $Z - z$ que contiene a a y $G = h^{-1}(G')$, tenemos $x \in G \subset Y$ y $F_rG \subset h^{-1}(z) \subset D \subset f^{-1}(\bar{V}_0) \subset f^{-1}(V)$. Esto completa la demostración.

7. Relación con el Teorema del Punto Fijo de Brouwer

Es fácil demostrar que el n-cubo I^n es localmente cohesivo para $n \geq 2$. Por tanto, si $f:I^n \to I^n$ es una función del n-cubo en sí mismo cuya función gráfica es débilmente continua, el teorema de la sección anterior implica que f es periféricamente continua. Whyburn demuestra en [1] que si $f:X \to Y$ es una función periféricamente contínua de un espacio métrico y localmente cohesivo X en un espacio métrico Y, entonces f es una conectividad, es decir, la función gráfica de f preserva conexos.

Sea ahora $f:X \to Y$ una función de un espacio X en un espacio Y. Consideremos las siguientes propiedades:

P_1 : la función gráfica de f es débilmente continua

P_2 : f es periféricamente continua

P_3 : f es una conectividad

P_4 : si $E \subset X$ es conexo y no degenerado, la gráfica de E carece de puntos aislados.

Es interesante conocer la relación que existe entre estas cuatro propiedades. Desde luego $P_3 \Rightarrow P_4$ si $X \times Y$ es T_1 y $P_4 \Rightarrow P_1$ sin ninguna restricción en X, Y o $X \times Y$. También $P_2 \Rightarrow P_4$ si X es regular y T_1. El teorema de la sección anterior asegura que $P_1 \Rightarrow P_2$ si X es métrico, localmente compacto y localmente cohesivo y si Y es regular y T_1. Desde luego es posible tener $P_1 \Rightarrow P_2$ sin que X sea localmente cohesivo, por ejemplo, si $X = Y = I =$ intervalo cerrado [0, 1]. Sin embargo, si X no es localmente cohesivo, la implicación $P_2 \Rightarrow P_3$ puede fallar. A este respecto Whyburn demuestra en [1] que si X es métrico y localmente cohesivo y Y es métrico, entonces la implicación $P_2 \Rightarrow P_3$ es válida. Por tanto, si X es métrico, localmente compacto y localmente cohesivo y Y es métrico, las cuatro propiedades P_1, P_2, P_3, P_4 son equivalentes, por ejemplo si $X = Y = I^n =$ n-cubo para $n \geq 2$. Esta situación es de especial interés debido al hecho que toda función periféricamente continua del n-cubo en sí mismo, para $n \geq 2$, deja un punto fijo. Esta es la llamada "Extensión del teorema del punto fijo de Brouwer" (ver [1]). Concluyo este trabajo enunciando un problema cuya solución ignoro:

"¿Es toda conectividad $f:X \to Y$ de un espacio de Peano X en un espacio métrico Y periféricamente continua?"

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL I P N

REFERENCIAS

[1] G. T. WHYBURN, *Quasi-closed sets and fixed points*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **57** (1967), 201–05.

[2] G. T. WHYBURN, *Loosely closed sets and partially continuous functions*, Michigan Math. J., **14** (1967), 193–205.