UN TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA ECUACIONES DE TIPO NEUTRO

Por Carlos Imaz

Consideremos la ecuación diferencial funcional

$$x'(t) = F(t, x_t), \tag{1}$$

donde F es una función con dominio $[0, T) \times A$ y valores en R^n. Aquí A es el conjunto de funciones con dominio $[-h, 0]$, valores en R^n y tales que existe su derivada por la derecha. Véase [1] para una explicación de la nomenclatura y descripción del problema de Cauchy para (1).

Dado un elemento $u \in A$ y reales positivos a, N y M denotaremos con $B(u, a, N, M)$ al conjunto de funciones con dominio en $[-h, a]$, valores en R^n, de clase C^1 en $[0, a]$ y tales que se cumplen las condiciones

$$\begin{cases} x_0 \equiv u \\ |x(t) - u(0)| \leq N, & t \in [0, a] \\ |x'(t) - F(0, u)| \leq M, & t \in [0, a]. \end{cases} \tag{2}$$

Con la métrica inducida por la C^1 topología en el espacio de funciones de clase C^1 en $[0, a]$ este conjunto es un espacio métrico completo. Explícitamente, la métrica $\rho = \rho(u, a, N, M)$ está dada por

$$\rho(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq a} \{|x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|\}.$$

Definimos ahora un subconjunto $A^*(F) \subset A$, que designamos por conjunto de condiciones iniciales admisibles para (1), por medio de las propiedades siguientes: $u \in A^*$ si existen constantes positivas a_0, N_0, M_0 tales que $F(t, x_t)$ es continua en $t \in [0, a]$ para toda $x \in B(u, a_0, N_0, M_0)$ y uniformemente acotada.

Finalmente, dada $u \in A^*(F)$ diremos que F es u-lipschitziana si existen constantes a_1, N_1, M_1 y $L (L < \frac{1}{4})$ tales que $|F(t, x_t) - F(t, y_t)| \leq L\rho(u, a, N, M)(x, y)$ para cualesquiera $t \in [0, a]$, $x, y \in B(u, a, N, M)$ con $a \leq a_1$, $N \leq N_1$ y $M \leq M_1$.

Teorema. *Si existe algún elemento $u \in A^*(F)$ tal que F sea u-lipschitziana entonces* (1) *tiene solucion única (en clase C^1) al problema de condición inicial $x_0 = u$.*

Demonstración. Por comodidad consideremos la función $u \in A^*$ definida en todo el intervalo $[-h, +\infty)$ extendiéndola linealmente con derivada $F(0, u)$. Sea $M = \min(M_0, M_1)$. Tomemos una $N \leq \min(N_0, N_1)$ y tal que

$$\frac{N}{2} + \frac{7M}{12} \leq M. \tag{3}$$

Finalmente tomemos $a \leq \min(a_0, a_1)$ y tal que

$$(4) \qquad \begin{cases} | u(t) - u(0) | \leq N; t \in [0, a] \\ | F(t, u_t) - F(0, u_0) | \leq \dfrac{M}{3}; t \in [0, a] \\ aL < 1 \\ aK \leq N, \end{cases}$$

donde K es una cota de F. Habiendo elegido de esta manera las constantes a, N y M fijemos nuestro espacio $B = B(u, a, N, M)$ y consideremos la transformación T aplicada en B y definida por

$$(5) \qquad T[x](t) \begin{cases} u(t); t \in [-h, 0] \\ u(0) + \displaystyle\int_0^t F(s, x_s)\, ds; t \in [0, a]. \end{cases}$$

Claramente $T[x]$ es de clase C^1 en [0, a]. Vamos a demostrar que de hecho $T[x] \in B$ para toda $x \in B$. Para ello tenemos que comprobar las condiciones (2). La primera es inmediata de (5). La segunda se sigue de que

$$| T[x](t) - u(0)| \leq \textstyle\int_0^t |F(s, x_s)|\, ds \leq aK \leq N.$$

Para comprobar la tercera,

$$\begin{aligned} | T[x]'(t) - F(0, u_0) | &\leq | F(t, x_t) - F(t, u_t) | \\ &\quad + | F(t, u_t) - F(0, u_0) | \\ &\leq L\rho(B)(x, u) + \frac{M}{3}, \end{aligned}$$

según la condición de Lipschitz y la segunda condición en (4). Pero

$$\begin{aligned} L\rho(B)(x, u) &\leq L[\sup_{0 \leq t \leq a} |x(t) - u(t)| + \sup_{0 \leq t \leq a} |x'(t) - u'(t)|] \\ &\leq L[\sup_{0 \leq t \leq a} |x(t) - u(0)| + \sup_{0 \leq t \leq a} |u(0) - u(t)| \\ &\quad + \sup_{0 \leq t \leq a} |x'(t) - F(0, u_0)|] \\ &\leq L[2N + M] < \frac{N}{2} + \frac{M}{4}. \end{aligned}$$

LLevando esta desigualdad a la anterior tenemos

$$| T[x]'(t) - F(0, u_0) | < \frac{N}{2} + \frac{7M}{12} \leq M.$$

Con lo que concluimos que $T[x] \in B$.

Ahora bien, para cualesquiera $x, y \in B$

$$| T[x](t) - T[y](t)| \leq \textstyle\int_0^t |F(s, x_s) - F(s, y_s)|\, ds \leq aL\rho(B)(x, y),$$

y además,

$$| T[x]'(t) - T[y]'(t)| = | F(t, x_t) - F(t, y_t)| \leq L\rho(B)(x, y).$$

Las dos relaciones anteriores demuestran que T es una contracción de B en si mismo y el teorema se sigue del principio de Banach.

No es difícil ver que, bajo condiciones convenientes, las hipótesis del teorema valen para ecuaciones de la forma

$$x'(t) = f(x_t) + g(x_t'),$$

donde f y g son operadores lineales.

CENTRO DE INVESTIGACIÓN del I P N,

REFERENCIA

[1] J. K. HALE and C. IMAZ, *Existence, uniqueness, continuity and continuation of solutions for retarded differential equations*. Bol. Soc. Mat. Mex. **11** (1966), 29–37.