ECUACIONES DIFERENCIALES GENERALIZADAS EN ESPACIOS DE BANACH Y ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES CON RETARDO*

Por Francisco Oliva

Introducción

Este trabajo consta de seis secciones. En la primera sección se define el concepto de integral generalizada en espacios de Banach siguiendo la definición de Kurzweil [1], se enuncia un teorema de existencia de ella [3], y se define el concepto de ecuación diferencial generalizada. En la segunda sección se enuncia y demuestra un teorema de existencia y unicidad de solución para ese tipo de ecuaciones diferenciales en espacios de Banach; se enuncian y demuestran varios lemas auxiliares. En la sección 3 se tratan generalidades sobre ecuaciones funcionales con retardo y se dan teoremas de equivalencia de solución para este tipo de ecuaciones y ecuaciones diferenciales generalizadas en espacios de Banach. En la sección 4 se obtiene un teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones funcionales con retardo. La sección 5 está dedicada a teoremas de unicidad, dependencia en parámetros y distancia entre soluciones de ecuaciones diferenciales generalizadas en espacios de Banach y aplicaciones de esos resultados a ecuaciones funcionales con retardo. Finalmente, en la sección 6 se enuncia y demuestra un teorema sobre unicidad de solución para ecuaciones funcionales con retardo que es más general que los obtenidos en la sección 5.

1. Ecuaciones diferenciales generalizadas en espacios de Banach

La generalización del concepto de ecuación diferencial está basado en una definición generalizada de la integral de Riemann-Stieltjes. En esta sección daremos la definición y propiedades esenciales de esta integral generalizada que denotaremos por K-integral 0 integral de Kurzweil.

Sean $\tau_* < \tau^*$ (τ^* y τ_* números reales) y $\tilde{S} = \tilde{S}[\tau_*, \tau^*]$ la clase de conjuntos $S \subset [\tau_*, \tau^*] \times [\tau_*, \tau^*] \subset R^2$ con la siguiente propiedad: para toda τ en el intervalo $[\tau_*, \tau^*]$ existe $\delta(\tau) > 0$ tal que (τ, t) es un punto de S si $|\tau - t| \leq \delta(\tau)$.

Sea $U(\tau, t)$ una función definida en cierta $S \in \tilde{S}$ y con valores en un espacio de Banach Y.[1]

Sea A una sucesión finita de números $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \cdots, \tau_k, \alpha_k\}$, con $\tau_* = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = \tau^*$ y con τ_i en el intervalo $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ para $i = 1, 2, \cdots, k$.

A es llamada una partición de $[\tau_*, \tau^*]$ subordinada a $S \in \tilde{S}$ si el punto $(\tau_i, t) \in S$ para $\tau_i \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ y para $i = 1, 2, \cdots, k$.

Denótese por $\tilde{A}(S)$ el conjunto de todas las particiones A subordinadas a S y por $B(A) = \sum_{j=1}^{k} U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})$ para $A \in \tilde{A}(S)$.

---

* Este trabajo constituye la tesis de Doctorado presentada por el autor en el Centro de Investigación del I P N. Se realizó bajo la dirección de los Doctores Z. Vorel y C. Imaz.

[1] Siempre que en este trabajo se hace referencia a un espacio de Banach se entenderá que se trata de un espacio de Banach real, cuya norma denotaremos $\| \; \|$.

DEFINICIÓN 1.1. *$U(\tau, t)$ es K-integrable si para toda $\epsilon > 0$ existe $S \in \tilde{S}$ tal que $\| B(A_1) - B(A_2) \| < \epsilon$ si A_1 y $A_2 \in \tilde{A}(S)$.*

Es fácil demostrar, [1] y [2], que U es K-integrable si y sólo si existe un único vector $b \in Y$ tal que dado $\epsilon > 0$ existe $S \in \tilde{S}$ tal que $A \in \tilde{A}(S)$ implica $\| B(A) - b \| < \epsilon$. Este vector b es denotado por $\int_{\tau_*}^{\tau^*} \mathfrak{D}U(\tau, t)$ que es la K-integral.

Puede ser demostrado [1] que si $U(\tau, t) = \mu(\tau)\alpha(t)$, μ función continua y α de variación acotada en $[\tau_*, \tau^*]$ entonces $\int_{\tau_*}^{\tau^*} \mathfrak{D}U$ existe y es igual a la integral de Riemann-Stieltjes $\int_{\tau_*}^{\tau^*} \mu(\tau)\, d\alpha(\tau)$. Que si $\partial U(\tau, t)/\partial t = \mu(\tau, t)$ es continua entonces $\int_{\tau_*}^{\tau^*} \mathfrak{D}U = \int_{\tau_*}^{\tau^*} \mu(\tau, \tau)\, d\tau$. Finalmente que si $U(\tau, t) = f(\tau)\cdot t$, $Y = R^n$ y $f(\tau)$ Perron-integrable, entonces $\int_{\tau_*}^{\tau^*} \mathfrak{D}U = \int_{\tau_*}^{\tau^*} f(\tau)\, d\tau$.

Sean $1 \geq \sigma > 0$, $w_j(\eta)$, $j = 1, 2$ funciones continuas y crecientes en $[0, \sigma]$, $w_3(\eta)$ con las mismas propiedades en $[0, \infty)$, $w_j(0) = 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} (2^j/\eta)\psi(\eta/2^j)$ uniformemente convergente para $\eta \in [0, \sigma]$, donde

$$\psi(\eta) = w_3(2w_1(\eta))w_2(\eta). \tag{1.2}$$

Nótese que se puede tomar $w_j(\eta) = \beta_j \eta^{\alpha_j}$, β_j, $\alpha_j > 0$, $\alpha_j \leq 1$, $j = 1, 2, 3$, $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2 > 1$.

Definamos $\Psi(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} (2^j/\eta)\psi(\eta/2^j)$, para $\eta \in (0, \sigma]$ y $\Psi(0) = 0$. Es fácil demostrar que $\Psi(\eta) \to 0$ si $\eta \to 0+$.

En [3] se demuestra el siguiente teorema de existencia de la K-integral antes definida.

TEOREMA 1.3. *Sea $U(\tau, t)$ una función con valores en Y, definida y continua en $[\tau_*, \tau^*] \times [\tau_*, \tau^*]$ y $\psi(\eta) \geq 0$ definida para $\eta \in [0, \sigma]$, $\sigma > 0$, $\psi(0) = 0$.*

Supóngase que la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^j \psi(\eta/2^j) \tag{1.4}$$

es uniformemente convergente en $[0, \sigma]$ y además:

$$\| U(\tau + \eta, t + \eta) - U(\tau + \eta, t) - U(\tau, t + \eta) + U(\tau, t) \| \leq \psi(\eta) \tag{1.5}$$

para $\eta \in [0, \sigma]$ y $(\tau + \eta, t + \eta)$, $(\tau + \eta, t)$, $(\tau, t + \eta)$, $(\tau, t) \in (\tau_*, \tau^*] \times (\tau_*, \tau^*]$. Entonces $\int_{\tau_*}^{\tau^*} \mathfrak{D}U$ existe y se cumplen las desigualdades siguientes:

$$\| \textstyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathfrak{D}U - U(\lambda_1, \lambda_2) + U(\lambda_1, \lambda_1) \| \leq \dfrac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{2} \Psi(|\lambda_2 - \lambda_1|) \tag{1.6}$$

$$\| \textstyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathfrak{D}U - U(\lambda_2, \lambda_2) + U(\lambda_2, \lambda_1) \| \leq \dfrac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{2} \Psi(|\lambda_2 - \lambda_1|) \tag{1.7}$$

para $\tau_* \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \tau^*$.

Utilizando el concepto de K-integral se define el concepto de ecuación diferencial generalizada de la siguiente manera:

Considérese un subconjunto abierto $Y_1 \subset Y$ y una función continua $F: Y_1 \times (T_1, T_2) \to Y$.

Una función $x(t)$ definida en el intervalo $(t_1, t_2) \subset (T_1, T_2)$ es solución de la ecuación diferencial generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = \mathfrak{D}F(x, t) \tag{1.8}$$

en el intervalo (t_1, t_2) con condición inicial $x(t_0) = x_0 \in Y_1, t_0 \in (t_1, t_2)$ si para $t_3, t_4 \in (t_1, t_2)$ se tiene $x(t_4)$, y $x(t_3)$, son puntos de Y_1 y se cumple la siguiente igualdad

$$x(t_4) - x(t_3) = \int_{t_3}^{t_4} \mathfrak{D}F(x(\tau), t) \tag{1.9}$$

2. Teoremas de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales generalizadas

Sea Y un espacio de Banach, $Y_1 \subset Y$ un conjunto abierto, $F: Y_1X[0, \sigma] \to Y$ una función continua que satisface las condiciones siguientes:

$$\| F(x, t_2) - F(x, t_1) \| \leqq w_1(| t_2 - t_1 |), \tag{2.1}$$

o en forma particular:

$$\| F(x, t_2) - F(x, t_1) \| \leqq K \, | t_2 - t_1 |^{\alpha}; \tag{2.2}$$

y

$$\begin{aligned} &\| F(x_1, t_1) - F(x_1, t_2) - F(x_2, t_1) + F(x_2, t_2) \| \\ &\leqq w_3(\| x_1 - x_2 \|)[| w_2(t_2) - w_2(t_1) |] \leqq w_3(\| x_1 - x_2 \|) w_2(| t_2 - t_1 |) \end{aligned} \tag{2.3}$$

o en forma particular:

$$\begin{aligned} &\| F(x_1, t_1) - F(x_1, t_2) - F(x_2, t_1) + F(x_2, t_2) \| \\ &\leqq K_1 \, \| x_1 - x_2 \|^{\gamma} \, | t_2^{\beta} - t_1^{\beta} | \leqq K_1 \, \| x_1 - x_2 \|^{\gamma} \, | t_2 - t_1 |^{\beta} \end{aligned} \tag{2.4}$$

con K y K_1 constantes positivas, $0 < \alpha, \beta, \gamma \leqq 1, \alpha\gamma + \beta > 1, x, x_i$ en Y_1, t_1, t_2 en $[0, \sigma]$, $\| x_1 - x_2 \|$ en $[0, \infty)$, $w_j(\eta)$ funciones continuas monótonas crecientes, $j = 1, 2, 3, i = 1, 2, \psi(\eta), \Psi(\eta)$ como se definieron en 1, $w_j(0) = 0$.

Definamos el siguiente conjunto W_1:

$W_1 = \{u \mid u: [0, \sigma] \to Y_1, u$ continua, $\| u(\tau_1) - u(\tau_2) \| \leqq 2w_1 \, | \tau_1 - \tau_2 |$, $| \tau_1 - \tau_2 | \leq \sigma\}$. Esto es, funciones con módulo de continuidad $2w_1$.

LEMA 2.5. *Supongamos que tenemos una función F definida en $Y_1X[0, \sigma]$ con valores en Y, que cumple las desigualdades* (2.1) *y* (2.3), *que $\psi(\eta)$, $\Psi(\eta)$ como se definieron en 1 y que $z \in W_1$. Bajo estas hipótesis se cumple que existe $\int_{t_0}^{t} \mathfrak{D}F(z(\tau), t)$ para $t_0, t \in [0, \sigma]$.*

Además si $F(u(\tau), t)$, $F(v(\tau), t)$ son integrables en el sentido de Kurzweil se cumple la siguiente desigualdad:

$$\| \int_{t_0}^{t} \mathfrak{D}F(u, s) - \int_{t_0}^{t} \mathfrak{D}F(v, s) \| \leq \int_{t_0}^{t} w_3[\| u(s) - v(s) \|] \, dw_2(s) \tag{2.6}$$

para t_0, t en $[0, \sigma]$, cuando esta última integral exista. (Por ejemplo cuando u y v

sean continuas, y en particular cuando estén en W_1.)

Demostración. En virtud de que z está en W_1 se cumple la desigualdad

$$\begin{aligned}(2.7)\quad & \| F(z(\tau+\eta), t+\eta) - F(z(\tau+\eta), t) - F(z(\tau), t+\eta) + F(z(\tau), t) \| \\ & \leqq \psi(\eta)\end{aligned}$$

para τ, t, $t+\eta$, $\tau+\eta\epsilon[t_0, t] \subset [0, \sigma]$ y en virtud de la continuidad de F en $Y_1 \times [0, \sigma]$ se puede aplicar el teorema 1.3 para concluir que existe la integral $\int_{t_0}^{t} \mathfrak{D}F(z, s)$ para $t \in [t_0, t] \subset [0, \sigma]$.

Para demostrar que la desigualdad (2.6) se cumple comparemos las sumas de Riemann correspondientes a las integrales que allí aparecen.

Sea k un entero cualquiera y la partición P_k siguiente $\tau_0 = t_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k = t$ tan fina como k sea grande y ésta tan grande como querramos, entonces se tiene utilizando (2.3):

$$\begin{aligned}(2.8)\quad & \| \textstyle\sum_{i=1}^{k} F(u(\tau_i), \tau_i) - F(u(\tau_i), \tau_{i-1}) - F(v(\tau_i), \tau_i) + F(v(\tau_i), \tau_{i-1}) \| \\ & \leqq \textstyle\sum_{i=1}^{k} w_3[\| u(\tau_i) - v(\tau_i) \|][w_2(\tau_i) - w_2(\tau_{i-1})].\end{aligned}$$

Si en (2.8) hacemos tender k a infinito resulta (2.6) con lo que concluye la demostración de este lema.

Ejemplo 2.9. Sea $G(x)$ una función definida y continua en Y_1 con valores en Y tal que $\| G(x_1) - G(x_2) \| \leqq w_3\| x_1 - x_2 \|$ para x_1, x_2 en Y_1, w_3 como se definió antes. La función $F(x, t) = t^\alpha G(x)$, $\frac{1}{2} < \alpha \leqq 1$ cumple las hipótesis del Lema 2.5.

DEFINICIÓN 2.10. *Si (x_1, t_1), (x_2, t_2) son dos puntos de $Y_1 \times (T_1, T_2)$ se define la distancia entre ellos de la siguiente manera:*

$$d[(x_1, t_1), (x_2, t_2)] = \| x_1 - x_2 \| + | t_2 - t_1 |$$

DEFINICIÓN 2.11. *Se dirá que la función $F \in \tilde{F}(Y_1 \times [0, T_1], \eta^\alpha, \eta_1^\beta - \eta_2^\beta, \eta^\gamma, \sigma)$ si F es continua en $Y_1 \times [0, T_1]$ y cumple (2.2) y (2.4), y que $F \in \tilde{F}(Y_1 \times [0, T_1], w_1(\eta), w_2(\eta_2), w_3(\eta), \sigma)$ si cumple (2.1), (2.3) y es continua en $Y_1 \times [0, T_1]$.*

Nota 2.12. Si consideramos el espacio de Banach Y, $Y_1 \subset Y$ abierto y $G_1 = Y_1 \times (T_1, T_2)$, tomamos un punto (x_0, t_0) en G_1 y llamamos ρ = distancia de (x_0, t_0) al complemento de $G_1 = \mathcal{C}\, G_1$, además si tomamos $t_0 = 0$ con lo que no se pierde generalidad. Llamemos $G = Y_1 \times [0, T_1]$, $T_1 \leqq T_2$.

TEOREMA 2.13. *Sean F en $\tilde{F}(G, \eta^\alpha, \eta_1^\beta - \eta_2^\beta, \eta, \sigma)$, $(x_0, 0)$ en G, y la ecuación diferencial generalizada*

$$(2.14)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \mathfrak{D}F(x(\tau), s) = \mathfrak{D}F(x, s) \\ x(0) = x_0 \quad \text{(condición inicial).} \end{cases}$$

Entonces existe solución única de (2.14) *en* $I = [0, L]$ *con* $0 < L =$ *mínimo de* σ, T_1 *y* $(\rho/4K)^{1/\alpha}$ *donde* K *y* α *son los que aparecen en* (2.2), *además se cumple*

$$(2.15) \qquad \| x(t_1) - x(t_2) \| \leqq 2K|t_2 - t_1|^{\alpha} \quad \text{para} \quad t_1,\ t_2 \text{ en } I.$$

Antes de hacer la demostración de este teorema hagamos las siguientes consideraciones:

a) La desigualdad (2.15) se expresa generalmente diciendo que x es regular en I.

b) La demostración de existencia y unicidad de solución de (2.14) en $[-L, 0]$ es similar a la que se haga en $[0, L]$. Por lo que se tendrá (después de hecha la demostración del Teorema 2.13) demostrada existencia y unicidad de solución de una ecuación generalizada con condición inicial $x(t_0) = x_0$ en un intervalo de centro t_0 y radio L en vista de la Nota 2.12.

c) Definamos la siguiente sucesión de funciones:

$$(2.16) \qquad x_0(t) = x_0$$

$$(2.17) \qquad x_{i+1}(t) = x_0 + \int_0^t \mathfrak{D}F(x_i(\tau), s), \text{ para } \quad i = 0, 1, 2, \cdots \text{ y } t \in I = [0, L].$$

Demostraremos varios lemas antes de hacer la demostración del teorema.

LEMA 2.18. *Bajo la hipótesis del Teorema* 2.13 *se tiene que las funciones* $x_j(t)$ *de* (2.16) *y* (2.17) *están bien definidas ya que son regulares y por lo tanto existe la integral* $\int_0^t \mathfrak{D}F(x_j(\tau), s)$ *para* $t \in I$ *y* $j = 0, 1, 2, \cdots$.

Demostración. La demostración la haremos por inducción. Para $x_0(t) = x_0$ y $t \in I$ es obvio el lema.

Supongamos que se cumple para n:

$$\| x_n(t_2) - x_n(t_1) \| \leq 2K|t_2 - t_1|^{\alpha}; \quad t_1, t_2 \in I$$

entonces

$$\| x_n(t) - x_0 \| + |t| = \| x_n(t) - x_n(0) \| + |t| \leqq 2Kt^{\alpha} + |t| \leq 3Kt^{\alpha} < \rho$$

para $t \in I$, por lo cual $(x_n(t), t)$ es un punto de G y en vista del Teorema 1.3 existe la integral $\int_0^t \mathfrak{D}F(x_n, s)$.

Entonces se tiene

$$\| x_{n+1}(t_2) - x_{n+1}(t_1) \| = \| \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{D}F(x_n, s) \|$$

$$\leq \frac{|t_2 - t_1|}{2} \sup_{0 \leq |t_2 - t_1| \leq \sigma} \Psi(|t_2 - t_1|) + \|F(x_n(t_1), t_1) - F(x_n(t_1), t_2)\|$$

$$\leq \frac{|t_2 - t_1|}{2} \sup_{0 \leq |t_2 - t_1| \leq \sigma} \Psi(|t_2 - t_1|) + K|t_2 - t_1|^{\alpha} \leq 2K|t_2 - t_1|^{\alpha}$$

con lo que se ha demostrado que $x_j(t)$, $t \in I$ y $j = 0, 1, 2, \cdots$ es una sucesión de funciones regulares.

Lema 2.19. *Bajo las hipótesis del Teorema* 2.13 *se cumplen las desigualdades*:

$$\| x_0(t) - x_1(t) \| \leqq Kt^\alpha, \qquad t \text{ en } I. \tag{2.20}$$

$$\| x_{n+1}(t) - x_n(t) \| \leqq \frac{Kt^\alpha (K_1 \beta t^\beta)^n}{(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta) \cdots (\alpha + n\beta)} \tag{2.21}$$

$n = 1, 2, \cdots$, y t en I.

Demostración. La demostración se hará por inducción.

$$\| x_1(t) - x_0 \| = \| \textstyle\int_0^t \mathfrak{D} F(x_0, s) \| = \| F(x_0, t) - F(x_0, 0) \| \leqq Kt^\alpha$$

que es (2.20).

Ahora demostremos (2.21)

$$\| x_2(t) - x_1(t) \| = \| \textstyle\int_0^t \mathfrak{D}[F(x_1, s) - F(x_0, s)] \|$$

$$\leqq K_1 \textstyle\int_0^t \| x_1(s) - x_0(s) \| d(s^\beta) \leqq KK_1 \int_0^t s^\alpha s^{\beta - 1} \beta \, ds,$$

o sea

$$\| x_2(t) - x_1(t) \| \leqq \frac{KK_1 \beta t^{\alpha+\beta}}{\alpha + \beta} = \frac{Kt^\alpha (K_1 \beta t^\beta)}{\alpha + \beta} \tag{2.22}$$

ahora si suponemos que

$$\| x_i(t) - x_{i-1}(t) \| \leqq \frac{Kt^\alpha (K_1 \beta t^\beta)^{i-1}}{(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta) \cdots (\alpha + (i - 1)\beta)} \tag{2.23}$$

entonces

$$\| x_{i+1}(t) - x_i(t) \| = \| \textstyle\int_0^t \mathfrak{D} F(x_i, s) - \int_0^t \mathfrak{D} F(x_{i-1}, s) \|$$

$$\leq K_1 \textstyle\int_0^t \| x_i(s) - x_{i-1}(s) \| \beta s^{\beta-1} \, ds$$

$$\leq K_1 \beta \int_0^t \frac{Ks^\alpha (K_1 \beta)^{i-1} s^{\beta(i-1)} s^{\beta-1} \, ds}{(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta) \cdots [\alpha + (i - 1)\beta]}$$

o sea

$$\| x_{i+1}(t) - x_i(t) \| \leq \frac{(K_1 \beta t^\beta)^i K t^\alpha}{(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta) \cdots (\alpha + i\beta)} \tag{2.24}$$

por lo que (2.21) se cumple para toda $n = 1, 2, \cdots$ y queda demostrado este lema.

Lema 2.25. *Bajo las hipótesis del Teorema* 2.13 *se cumple que*

$$\textstyle\sum_{n=0}^\infty \| x_{n+1}(t) - x_n(t) \| \leq Ke^{K_1}, \quad t \in I \tag{2.26}$$

o sea que la serie (2.26) *converge uniformemente en* I, *o sea que* $x_n(t)$ *converge uniformemente en* I (*conforme* n *tiende a infinito*) *a un elemento* $x(t)$ *en* Y, *por ser éste un espacio completo.*

Demostración. Como $\alpha + \beta > 1$, si tomo $0 \leqq t \leqq \sigma \leqq 1$ se cumple

$$\frac{(\beta t^\beta K_1)^n t^0 K}{\beta \cdot 2\beta \cdots n\beta} \geq \frac{(\beta t^\beta K_1)^n K t^\alpha}{(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta) \cdots (\alpha + n\beta)}$$

o sea

$$\frac{KK_1^n}{n!} \geq \frac{(K_1 t^\beta)^n K}{n!} \geq \frac{(\beta K_1 t^\beta)^n K t^\alpha}{(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta) \cdots (\alpha + n\beta)} \tag{2.27}$$

y en virtud del Lema 2.16 y de (2.24) resulta

$$\| x_{n+1}(t) - x_n(t) \| < K \frac{K_1^n}{n!} \quad n = 1, 2, \cdots$$

o sea que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| x_{n+1}(t) - x_n(t) \| \leqq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1^n}{n!} + K = K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_1^n}{n!} = Ke^{K_1}$$

con lo cual se termina la demostración del Lema 2.25.

Nota 2.28. $x(t)$ se demuestra que es regular (y que por lo tanto existe la integral $\int_0^t \mathfrak{D}F(x, s)$) en forma similar a como se hizo en el Lema 2.18 para las $x_j(t)$, t en I.

Demostración del Teorema 2.13. Por el Lema 2.5 y la convergencia uniforme de $x_n(t)$ a $x(t)$ para t en I se concluye la convergencia uniforme de $\int_0^t \mathfrak{D}F(x_n, s)$ a $\int_0^t \mathfrak{D}F(x, s)$ en I:

$$\begin{aligned} &\| \textstyle\int_0^t \mathfrak{D}F(x_n(\tau), s) - \int_0^t \mathfrak{D}F(x, s) \| \\ &\qquad \leq \textstyle\int_0^t \| x_n(s) - x(s) \| \, ds^\beta < \dfrac{\epsilon t^{\beta+1}}{\beta + 1} \leq \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq N. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Como:

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t \mathfrak{D}F(x_n, s), \tag{2.30}$$

en vista de (2.26) se tiene tomando límites cuando $n \to \infty$ en (2.27) que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \mathfrak{D}F(x, s) \tag{2.31}$$

con lo cual se ha demostrado la existencia de solución regular de (2.14) en I.

Para demostrar la unicidad sean $x(t)$, $y(t)$ dos soluciones de (2.14) en I, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \| x(t) - y(t) \| &= \| \textstyle\int_0^t \mathfrak{D}F(x(\tau), s) - \int_0^t \mathfrak{D}F(y(\tau), s) \| \\ &\leqq \textstyle\int_0^t \| x(s) - y(s) \| \beta s^{\beta-1} \, ds + C \end{aligned} \tag{2.32}$$

($C > 0$ arbitraria), por el Lema 2.5.

Aplicando el lema de Gronwall en (2.32) se tiene $\| x(t) - y(t) \| \leqq Ce^{\int_0^t \beta s^{\beta-1} ds} = Ce^{t^\beta} \leqq Ce^{L^\beta} = Ce^{\mathfrak{a}}$; $\mathfrak{a} = L^\beta =$ constante luego, $x(t) = y(t)$ porque se puede tomar C arbitrariamente pequeña. Con esto concluye la demostración del Teorema 2.13.

3. Teoremas de equivalencia

3.1 *Generalidades sobre ecuaciones funcionales con retardo.* Sea R^n un espacio euclideano de dimensión n y con $| x |$ denotemos la norma euclideana de x en R^n.

Sea X el conjunto de todas las funciones $x(t)$ definidas y continuas en el intervalo compacto $[T_1, T_2]$ con valores en R^n es decir:

$$x:[T_1, T_2] \to R^n$$

X se considerará un espacio de Banach con la norma $\| x \| = \sup_{t \in [T_1, T_2]} | x(t) |$. Sea h tal que $0 < h < T_2 - T_1$ y H el espacio de funciones definidas y continuas en $[-h, 0]$ con valores en R^n y con la norma definida por

$$\| y \|_H = \sup_{t \in [-h, 0]} | y(t) |,$$

para toda $y \in H$.

Si $x \in X$, definamos $x_t \in H$ para $t \in [T_1 + h, T_2]$ como sigue

$$x_t(s) = x(t + s) \quad \text{para} \quad -h \leq s \leq 0. \tag{3.2}$$

En otras palabras x_t es la restricción de x al intervalo $[t - h, t]$.

Sea $X_1 \subset X$ con la siguiente propiedad: si $x = x(t)$ para $t \in [T_1, T_2]$ es un elemento de X_1 y si $\bar{t} \in [T_1, T_2]$ entonces

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{para} \quad t \in [T_1, \bar{t}] \\ x(\bar{t}) & \text{para} \quad t \in [\bar{t}, T_2] \end{cases} \tag{3.3}$$

es también un elemento de X_1.

Sea H_1 un subconjunto de H tal que $x \in X_1 \Rightarrow x_t \in H_1$ para $t \in [T_1 + h, T_2]$.

Considérese la ecuación diferencial funcional con retardo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x_t, t) \\ x_{T_1+h} = \varphi(\tau), \; T_1 \leq \tau \leq T_1 + h \\ \varphi(T_1 + h) = x_{00} \in R^n \end{cases} \tag{3.4}$$

Donde $f:H_1 \times [T_1 + h, T_2] \to R^n$ y para una $x \in X_1$ fija $f(x_t, t)$ es integrable en $t \in [T_1 + h, T_2]$.

DEFINICIÓN 3.5. *Una solución de* (3.4) *es una función absolutamente continua* $x(t)$ *definida en* $[T_1 + h, T_2]$ *tal que* (x_t, t) *en el dominio de definición de* f *y que se satisfaga* $x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(x_s, s)\, ds$ *para* $t_1, t_2 \in [T_1 + h, T_2]$.

Supongase que la función primitiva de $f(x_t, t)$ tiene los siguientes módulos de continuidad para $x^1, x^2 \in X_1$:

$$\left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x_s^1, s)\, ds \right| \leqq w_1(| \tau_2 - \tau_1 |) \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} [f(x_s^1, s) - f(x_s^2, s)]\, ds \right| \\ &\qquad \leq w_2(| \tau_2 - \tau_1 |) \sup_{s \in [\tau_1, \tau_2]} w_3(\| (x^1 - x^2)_s \|_H) \end{aligned} \tag{3.7}$$

para

$$T_1 + h \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T_2 \qquad \text{y} \qquad | \tau_2 - \tau_1 | \leqq \sigma$$

donde σ depende solamente de T_1, T_2, h. Las funciones w_1, w_2 continuas y crecientes en $[0, \sigma]$, w_3 con las mismas propiedades en $[0, \infty)$; $w_i(0) = 0$, $\psi(n)$, $\Psi(n)$ como se definieron y con las propiedades que se indicaron en 1.

3.8 *Teoremas de equivalencia.* Sea $f(x_t, t)$ como se definió en 3.1, definamos

$$(3.9) \quad F(x, t)(\tau) = \begin{cases} \int_{T_1+h}^{\tau} f(x_s, s)\, ds, \tau \in [T_1 + h, t], t \in [T_1 + h, T_2]. \\ \int_{T_1+h}^{t} f(x_s, s)\, ds, \tau \in [t, T_2], t \in [T_1 + h, T_2]. \\ 0 \text{ para } \tau \text{ o } t \in [T_1, T_1 + h]. \end{cases}$$

para $x \in X_1$.

De aquí que $F(x, t)$ es un elemento del espacio X definido al principio de 3.1 y $F(x, t)(\tau)$ en R^n es el valor de $F(x, t)$ en el punto $\tau \in [T_1, T_2]$.

Para $F(x, t)$ así definida considérese la ecuación generalizada

$$(3.10) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \mathfrak{D}F(x, t) \\ x(T_1 + h) = x_0 \in X_1, x_0(\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau) & \text{para} \quad \tau \in [T_1, T_1 + h] \\ \varphi(T_1 + h) = x_{00} & \text{para} \quad \tau \in [T_1 + h, T_2]. \end{cases} \end{cases}$$

En [4] se demuestran los dos teoremas de equivalencia que a continuación se enuncian.

TEOREMA 3.11. *Sea $\xi(t)$ una solución de la ecuación* (3.4) *en el sentido de la Definición* 3.5, *con la condición inicial allí dada.*

Definamos para t en $[T_1 + h, T_2]$

$$(3.12) \qquad x(t)(\tau) = \begin{cases} \xi(\tau) & \text{para} \quad \tau \in [T_1, t] \\ \xi(t) & \text{para} \quad \tau \in [t, T_2] \end{cases}$$

Entonces $x(t)$ en X es una solución de la ecuación generalizada (3.10) *en $[T_1 + h, T_2]$. Además $x(t)$ es regular en $[T_1 + h, T_2]$.*

TEOREMA 3.13. *Sea $x(t)$ una solución regular de la ecuación generalizada* (3.10) *con F dada por* (3.9) *en $[T_1 + h, T_2]$ y con la condición inicial dada en* (3.10).

Entonces la función

$$(3.14) \qquad \xi(\tau) = \begin{cases} x(T_1 + h)(\tau); T_1 \leq \tau \leq T_1 + h \\ x(\tau)(\tau); T_1 + h \leq \tau \leq T_2 \end{cases}$$

es una solución de (3.4) *en $[T_1 + h, T_2]$ con la condición inicial dada en* (3.4).

PROPOSICIÓN 3.15. *La unicidad de solución de la ecuación* (3.10) *con determinada condición inicial implica la unicidad de solución de* (3.4) *con cierta condición inicial también; en efecto, si $x(t)$ es una solución de* (3.10) *en $[T_1 + h, T_2]$ tal que $x(T_1 + h) = x_0$, $x_0(T_1 + h) = x_{00}$ entonces podemos definir la solución de* (3.4) *como sigue:*

$$(3.16) \qquad y(\tau) = \begin{cases} x(T_1 + h)(\tau); T_1 \leq \tau \leq T_1 + h \\ x(\tau)(\tau); T_1 + h \leq \tau \leq T_2. \end{cases}$$

Supongamos que existe $y_1(\tau) \neq y(\tau)$ tal que $y_1(\tau) = y(\tau) = x(T_1 + h) = x_0$ para τ en $[T_1, T_1 + h]$.

Podemos definir

(3.17) $$x_1(t)(\tau) = \begin{cases} y_1(\tau), \ \tau \in [T_1, t] \\ y_1(t), \ \tau \in [t, T_2] \end{cases}$$

y

(3.18) $$x_2(t)(\tau) = \begin{cases} y(\tau), \ \tau \in [T_1, t] \\ y(t), \ \tau \in [t, T_2] \end{cases}$$

pero

(3.19) $$\begin{aligned} x_2(T_2)(\tau) &= y(\tau), \quad \tau \text{ en } [T_1, T_2] \\ x_1(T_2)(\tau) &= y_1(\tau), \quad \tau \text{ en } [T_1, T_2] \end{aligned}$$

y como

(3.20) $$x_1(T_1 + h)(\tau) = y_1(T_1 + h) = y(T_1 + h) = x_{00} = x_2(T_1 + h)(\tau)$$

para τ en $[T_1 + h, T_2]$ se concluye que $y(\tau) = y_1(\tau)$ para τ en $[T_1 + h, T_2]$ en vista de (3.19) y la unicidad de solución de (3.10).

La proposición inversa no la usaremos en este trabajo pero se cumple; unicidad en (3.4) implica unicidad en (3.9) (se demuestra en forma similar).

4. Teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones funcionales con retardo

Consideremos la ecuación

(4.1) $$\frac{dx}{dt} = f(x_t, t) \quad \text{con} \quad f: H_1 \times [T_1 + h, T_2] \to R^n,$$
$$\text{donde} \quad [T_1 + h, T_2] \subset [0, \infty)$$

Lebesgue integrable y con la condición inicial $x_{T_1+h} = \varphi(\tau)$, τ en $[T_1, T_1 + h]$ y los módulos de continuidad de la integral de f:

(4.2) $$\left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x_s, s)\, ds \right| \leq K |\tau_2 - \tau_1|^\alpha$$

(4.3) $$\begin{aligned} \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} [f(x_s^1, s) - f(x_s^2, s)]\, ds \right| &\leq K_1 \| x^1 - x^2 \| |\tau_2^\beta - \tau_1^\beta| \\ &\leq K_1 \| x^1 - x^2 \| |\tau_2 - \tau_1|^\beta \end{aligned}$$

$K, K_1 > 0$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta > 1$, x, x^i en X_1 para $i = 1, 2$, t_1, t_2 en $[T_1, T_2]$. Definamos $F(x, t)$ como en (3.9) y consideremos la ecuación generalizada

(4.4) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mathfrak{D}F(x(\tau), t) \\ x(T_1 + h) = x_0(\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau) & \text{para} \quad \tau \in [T_1, T_1 + h] \\ x_{00} & \text{para} \quad \tau \in [T_1 + h, T_2] \end{cases} \end{cases}$$

Bajo estas hipótesis se cumple el siguiente teorema.

TEOREMA 4.5. *Existe solución única regular de la ecuación* (4.1) *en* $[T_1 + h, T_2]$ *si* $T_1 + h - T_2 = L =$ *mínimo de* σ *y* $(\rho/4k)^{1/\alpha}$, T_2 ; *con* K *y* α *de la fórmula* 4. 2).

Demostración. 1. La unicidad de solución es consecuencia directa de la Proposición 3.15.

2. La existencia de solución es consecuencia de los Teoremas 2.13 y 3.14.

Ejemplos 4.6. A) En el caso en que $h = 0$ la ecuación (4.1) es una ecuación diferencial ordinaria sin retardo y estamos pidiendo que $f(x, t)$ sea integrable y que se cumplan (4.2) y (4.3).

B) Si definimos

$$f(x_t, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t = 0 \\ G(x_t)t^{\alpha-1}, & t \neq 0, \ \frac{1}{2} < \alpha < 1 \end{cases}$$

donde $G(x_t) \neq 0$, t en $[0, T]$, continua y acotada en su dominio de definición, $| G(x_1) - G(x_2) | \leqq K_1 \| x_1 - x_2 \|$ para x_1, x_2 en H_1 (H_1 definido al principio de esta sección), t en $[0, T] = I$, entonces se cumplen las hipótesis del Teorema 4.5:

I) $| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x_s, s)\, ds | \leq M | \tau_1^{\alpha} - \tau_2^{\alpha} | \leq M | \tau_1 - \tau_2 |^{\alpha}$

II) $| \int_{\tau_1}^{\tau_2} [f(x_s^1, s) - f(x_s^2, s)]\, ds | \leq K_1 \| x^1 - x^2 \| |\tau_1^{\alpha} - \tau_2^{\alpha} |$

$$\leq K_1 \| x_1 - x_2 \| | \tau_1 - \tau_2 |^{\alpha}, \quad \tau_i \in [0, T]; \ i = 1, 2.$$

En la siguiente sección se dan criterios de unicidad de solución con hipótesis menos estrictas respecto a x en $F(x, t)$.

5. Unicidad de soluciones de ecuaciones generalizadas en espacios de Banach y de ecuaciones funcionales con retardo

Generalidades. Sean $F(x, t)$ en $\tilde{F}(G, w_1, w_2, w_3, \sigma)$; $\bar{F}(x, t)$ en $\tilde{F}(G, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \sigma)$, $x(t)$ una solución de

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \mathfrak{D}F(x, t) \\ x(0) = x_0 \quad (\text{condición inicial}) \end{cases}$$

en $[0, T]$; $y(t)$ una solución de

$$\text{(5.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{d\tau} = \mathfrak{D}\bar{F}(y, t) \\ y(0) = y_0 \quad (\text{condición inicial}) \end{cases}$$

en $[0, T]$.

Supondremos que $(x(\tau), t)$, $(y(\tau), t)$ en G para τ, t en $[0, T]$ y que se cumplen las desigualdades siguientes

$$\text{(5.3)} \qquad \| x(\tau_2) - x(\tau_1) \| \leqq 2w_1(| \tau_2 - \tau_1 |)$$

$$\text{(5.4)} \qquad \| y(\tau_2) - y(\tau_1) \| \leqq 2\bar{w}_1(| \tau_2 - \tau_1 |)$$

para τ_1, τ_2 en $[0, T]$, $| \tau_2 - \tau_1 | \leq \sigma$.

Denotemos por $\bar{\psi}(\eta) = w_3(2w_1(\eta))\cdot w_2(\eta) + \bar{w}_3(2\bar{w}_1(\eta))\bar{w}_2(\eta)$ y por $\bar{\Psi}(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty}(2^j/\eta)\bar{\psi}(\eta/2^j)$ para $\eta \in (0, \sigma]$, $\bar{\Psi}(0) = 0$ y supongamos que esta serie es uniformemente convergente en $(0, \sigma]$ y que $\bar{\Psi}(\eta) \to \bar{\Psi}(0) = 0$ si $\eta \to 0+$.

Llamemos $A(x, t) = F(x, t) - \bar{F}(x, t)$ para (x, t) en G y supongamos que

$$\| A(x, t_2) - A(x, t_1) \| \leqq w_4(|t_2 - t_1|), \text{ para } (x, t_i) \text{ en } G, \quad i = 1, 2, \; |t_2 - t_1| \leqq \sigma. \tag{5.5}$$

Esta desigualdad caracteriza la proximidad de las ecuaciones (5.1) y (5.2).

Como

$$\| A(x, t_2) - A(x, t_1) \| \leq \| F(x, t_2) - \bar{F}(x, t_1) \| + \| F(x, t_2) - \bar{F}(x, t_1) \|$$

la desigualdad (5.5) siempre se satisface con $w_4(\eta) = w_1(\eta) + \bar{w}_1(\eta)$.

Sin embargo el caso más importante es cuando esta función se toma esencialmente más pequeña que $w_1(\eta) + \bar{w}_1(\eta)$.

Teoremas de unicidad de solución.

TEOREMA 5.6. *Sea m un entero positivo tal que $T/m \leq \sigma$, entonces las soluciones $x(\tau)$, $y(\tau)$ de (5.1) y (5.2) respectivamente cumplen la siguiente desigualdad:*

$$\| x(T) - y(T) \| \leq \frac{T}{2}\Psi\left(\frac{T}{m}\right) + mw_4\left(\frac{T}{m}\right) + w_2\left(\frac{T}{m}\right)\sum_{i=1}^{m-1} w_3(|x_i - y_i|) + \| x_0 - y_0 \| \tag{5.7}$$

donde

$$x_i = x\left(\frac{iT}{m}\right), \quad y_i = y\left(\frac{iT}{m}\right), i = 0, 1, \cdots, m.$$

Demostración. Como $x(t)$, $y(t)$ son soluciones de las ecuaciones generalizadas (5.1) y (5.2) respectivamente se tiene para $t_1, t_2 \in [0, T]$ que

$$\| x(t_2) - y(t_2) - x(t_1) + y(t_1) \| = \| \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{D}[F(x, t) - \bar{F}(y, t)] \|$$

y en virtud del Teorema 1.3 se tiene

$$\| x(t_2) - y(t_2) - x(t_1) + y(t_1) \| \leq \frac{|t_2 - t_1|}{2}\Psi(|t_2 - t_1|) + \| F(x(t_1), t_1) - \bar{F}(y(t_1), t_1) - F(x(t_1), t_2) + \bar{F}(y(t_1), t_2) \|$$

o sea

$$\begin{aligned}
\| x(t_2) - y(t_2) - x(t_1) + y(t_1) \| &\leq \frac{|t_2 - t_1|}{2}\Psi(|t_2 - t_1|) \\
&\quad + \| F(x(t_1), t_1) - F(y(t_1), t_1) + F(y(t_1), t_1) - \bar{F}(y(t_1), t_1) \\
&\quad - F(x(t_1), t_2) + \bar{F}(y(t_1), t_2) - F(y(t_1), t_2) + F(y(t_1), t_2) \| \\
&\leq \frac{|t_2 - t_1|}{2}\Psi(|t_2 - t_1|) + \| A(y(t_1), t_1) - A(y(t_1), t_2) \| \\
&\quad + w_3(\| x(t_1) - y(t_1) \|)w_2(|t_2 - t_1|) \\
&\leq \frac{|t_2 - t_1|}{2}\Psi(|t_2 - t_1|) + w_4(|t_2 - t_1|) + w_3(\| x(t_1) - y(t_1) \|)w_2(|t_2 - t_1|)
\end{aligned}$$

es decir

$$\|x(t_2) - y(t_2) - x(t_1) + y(t_1)\| \le \frac{|t_2 - t_1|}{2}\Psi(|t_2 - t_1|) + w_4(|t_2 - t_1|) + w_3(\|x(t_1) - y(t_1)\|)w_2(|t_2 - t_1|) \tag{5.8}$$

y

$$\|x(t_2) - y(t_2)\| \le \frac{|t_2 - t_1|}{2}\Psi(|t_2 - t_1|) + w_4(|t_2 - t_1|) + \|x(t_1) - y(t_1)\| + w_3(\|x(t_1) - y(t_1)\|)w_2(|t_2 - t_1|). \tag{5.9}$$

Recordando que $x_k = x(kT/m)$ y que $y_k = y(kT/m)$ para $k = 0, 1, \cdots, m$ se tiene

$$\begin{aligned}\|x_m - y_m - x_0 + y_0\| &= \|x_m - y_m - x_{m-1} + y_{m-1} + x_{m-1} - y_{m-1} \\ &- x_{m-2} + y_{m-2} + x_{m-2} - y_{m-2} - \cdots - x_0 + y_0\| \le \|x_m - y_m - x_{m-1} + y_{m-1}\| \\ &+ \|x_{m-1} - y_{m-1} - x_{m-2} + y_{m-2}\| + \cdots + \|x_1 - y_1 - x_0 + y_0\| \\ &\le \frac{mT}{2m}\Psi\left(\frac{T}{m}\right) + mw_4\left(\frac{T}{m}\right) + w_2\left(\frac{T}{m}\right)\sum_{i=1}^{m-1} w_3(\|x_i - y_i\|)\end{aligned}$$

por (5.8)

$$\therefore\ \|x(T) - y(T)\| \le w_2\left(\frac{T}{m}\right)\sum_{i=1}^{m-1} w_3(\|x_i - y_i\|) + \frac{T}{2}\Psi\left(\frac{T}{m}\right) + mw_4\left(\frac{T}{m}\right) + \|x_0 - y_0\|$$

que es lo que queríamos demostrar.

Si en el Teorema 5.6 tomamos $w_3(\eta) = \eta$ tenemos el siguiente teorema [5]:

TEOREMA 5.10. *Sea m un entero positivo tal que $T/m \le \sigma$, si $x(\tau)$, $y(\tau)$ son soluciones de* (5.1) y (5.2) *respectivamente, entonces se tiene*

$$\|x(T) - y(T)\| \le \left[\frac{T}{m}\Psi\left(\frac{T}{m}\right) + w_4\left(\frac{T}{m}\right)\right]\frac{\left[1 + w_2\left(\frac{T}{m}\right)\right]^m - 1}{w_2\left(\frac{T}{m}\right)} + \|x_0 - y_0\|\left[1 + w_2\left(\frac{T}{m}\right)\right]^m. \tag{5.11}$$

TEOREMA 5.12. *Si en el Teorema* 5.10 *se toma $w_2(\eta) = L\eta$, $L > 0$, $w_4(\eta) = M\eta$, $M \geqq 0$ entonces se tiene*

$$\|x(T) - y(T)\| \leqq \frac{M}{L}(e^{LT} - 1) + \|x_0 - y_0\|e^{LT}. \tag{5.13}$$

La demostración de este teorema se sigue de (5.11) pasando al límite cuando $m \to \infty$, porque entonces $\Psi(T/m) \to 0$.

Nota 5.14. Si $w_2(\eta) = L\eta$, $L > 0$, se obtiene del Teorema 5.12 la unicidad de solución de

$$\frac{dx}{d\tau} = \mathfrak{D}F(x, t), \quad x(0) = x_0 \tag{5.15}$$

en efecto; si $x(\tau)$, $y(\tau)$ son dos soluciones regulares de (5.15) en $[0, T]$ tales que $x_0 = y_0$, entonces escribiendo $F(x, t) = \bar{F}(x, t)$, por lo que se puede tomar $M = 0$ y entonces $x(T) = y(T)$. Evidentemente no es limitación esencial tomar el intervalo fundamental como $[0, T]$ y la unicidad de solución puede ser demostrada en cualquier punto del intervalo donde la solución esté definida.

Se puede demostrar el siguiente teorema de unicidad en espacios de Banach, tal como se hizo en [6].

Teorema 5.16. *Sean $F(x, t)$ en $\tilde{F}(G, w_1, w_2, \sigma)$, $\psi(\eta) = w_1(\eta)\cdot w_2(\eta) \geq 0$, $\eta \in [0, \sigma]$, $\eta^{-1}\psi(\eta)$ no decreciente, $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i\psi(\sigma/2^i) < \infty$ y si para $\lambda > 0$ se cumple que*

$$\lim_{\eta\to 0+} \Psi(\eta)\, \frac{e^{\lambda\eta^{-1}w_2(\eta)}}{\eta^{-1}w_2(\eta)} = 0 \tag{5.17}$$

y (x_0, t_0) *es un punto de G entonces existe cuando más una solución regular $x(\tau)$ de*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \mathfrak{D}F(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.18}$$

Teorema 5.19. Sea $\psi = \psi(t, r)$ *una función no negativa definida en*

$$0 < t < a, \qquad r \geqq 0 \ (a > 0), \tag{5.20}$$

Lebesgue medible sobre t para r fija y continua no decreciente en r para t fija. Además para todo subconjunto acotado B de (5.20) *supongamos que existe una función χ_B definida en $0 < t < a$ tal que $\psi(t, r) \leq \chi_B(t)$; (t, r) en B y para el cual χ_B es Lebesgue integrable en $\gamma < t < a$ para toda $\gamma > 0$.*

Para cada α tal que $0 < \alpha < a$, la función idénticamente cero es la única función absolutamente continua en $0 \leqq t < \alpha$ que satisface:

$$\rho' = \psi(t, \rho) \text{ c.d.q. en } 0 < t < \alpha \text{ y tal que } \rho_+'(0) \tag{5.21}$$

existe y que se cumple la igualdad

$$\rho_+'(0) = \rho(0) = 0. \tag{5.22}$$

Supongamos además que (ver 2.5)

$$\left| \int_{t_0}^{t} \mathfrak{D}[F(x, s) - F(y, s)] \right| \leqq \int_{t_0}^{t} \psi(s, \| x - y \|)\, ds, \tag{5.23}$$

t_0, t en $[0, a]$; F continua en $Y_1 \times [0, a]$, $Y_1 \subset Y$ abierto, Y espacio de Banach. Supongamos[2] *que además una función $\psi_1(t)$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i\, \eta\psi_1(\eta/2^i) = \Psi(\eta)$*

---

[2] Tal hipótesis es muy común: Si $w_i(t) = t^{\alpha_i}$, $\alpha_i \leq 1$, $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2 > 1$; $i = 1, 2, 3$, entonces $\eta^{-1}\psi_1(\eta) = \eta^{\alpha_1\alpha_3+\alpha_2-1} = \eta^{\epsilon}$, $0 < \epsilon \leq 1$ y además $| \int_0^t w_3\|x(s) - y(s)\| dw_2(s) | \leq \psi_1(t)$ por el 2° Teorema del valor medio para integrales de Riemann-Stieltjes [8].

es convergente, $t^{-1}\psi_1(t)$ *es no decreciente en* $[0, \sigma]$; $\sigma > 0$ *y* $\lim_{t\to 0+} t^{-1}\psi_1(t) = 0$, *y que* $\int_0^t \psi(s, 2w_1(s))\, ds \leq \psi_1(t)$.

Bajo estas condiciones existe cuando más una solución regular del problema

$$(5.24)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \mathfrak{D}F(x, t) \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que hay dos soluciones φ_1, φ_2 de (5.24) y sea

$$(5.25)\qquad p(t) = \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \|, \qquad 0 \leqq t \leqq a$$

entonces existe σ tal que $0 < \sigma \leqq a$, $p(\sigma) > 0$, luego por $(\sigma, p(\sigma))$ existe solución absolutamente continua que satisface (5.21) en cierto intervalo a la izquierda de σ.

Tan lejos de σ (a la izquierda) como ρ exista se satisface

$$(5.26)\qquad \rho(t) \leqq p(t).$$

Porque si este no fuera el caso existiría a la izquierda de σ un punto θ tal que $\rho(\theta) = p(\theta)$ y $\rho(t) > p(t)$ para $t < \theta$ ($\theta = \sigma$ no está excluída).

Se tiene que

$$p(\theta) = \| \textstyle\int_0^\theta \mathfrak{D}[F(\varphi_1, t) - F(\varphi_2, t)] \|$$

Para $h > 0$ pequeño

$$p(\theta - h) = \| \textstyle\int_0^{\theta-h} \mathfrak{D}[F(\varphi_1, t) - F(\varphi_2, t)] \|$$

y

$$p(\theta) - p(\theta - h) \leqq \| \textstyle\int_{\theta-h}^\theta \mathfrak{D}[F(\varphi_1, t) - F(\varphi_2, t)] \|$$

luego

$$p(\theta) - p(\theta - h) \leq \textstyle\int_{\theta-h}^\theta \psi(t, p(t))\, dt$$

y como

$$p(\theta) - \rho(\theta - h) = \textstyle\int_{\theta-h}^\theta \psi(t, \rho(t))\, dt$$

se tiene

(5.27) $\rho(\theta - h) \leqq p(\theta - h)$ en vista de que $\psi(t, p) \leq \psi(t, \rho)$ para $\theta - h \leq t \leq \theta$.

Como (5.27) contradice la definición de θ se ha demostrado (5.26).

Ahora $\rho(t) > 0$ (tal como se demostró en el Teorema 6.3).

Luego $0 < \rho(t) \leqq p(t)$ para t en $(0, \sigma]$ por lo tanto: $\lim_{t\to 0+} \rho(t) = 0$.

Definimos $\rho(0) = 0$ y escribimos

$$(5.28)\qquad 0 < \frac{\rho(t)}{t} \leqq \frac{p(t)}{t} \quad (0 < t \leqq \sigma)$$

pero

$$\frac{p(t)}{t} \leqq \frac{\displaystyle\int_0^t \psi(s, p(s))\, ds}{t} \leqq \frac{\psi_1(t)}{t}$$

$$\therefore \lim_{t\to 0+} \frac{\rho(t)}{t} = \rho_+{}'(0) = 0$$

lo que contradice las hipótesis del teorema, luego $p(\sigma) > 0$ para ninguna σ tal que $0 < \sigma < a$, o sea $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para toda $t \in [0, a]$.

LEMA 5.29. ([7]). *Sea el problema*

$$\begin{cases} u' = U(t, u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{5.30}$$

$U(t, u)$ una función continua no negativa definida en un subconjunto E de R^2 y no decreciente respecto a u en $[0, a]$.

Sea $v(t)$ una función continua que satisface

$$v(t) \leqq v_0 + \int_0^t U(s, v(s))\, ds$$

con $v_0 \leqq u_0$. Entonces $v(t) \leqq u^0(t)$ en $[0, a] = I$, donde $u^0(t)$ es la máxima solución de (5.30) en $[0, a]$.

TEOREMA 5.31. *Sean las ecuaciones diferenciales generalizadas siguientes:*

$$\frac{dx}{d\tau} = \mathfrak{D}F(x, t), \qquad x(0) = x_0 \tag{5.32}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \mathfrak{D}\bar{F}(y, t), \qquad y(0) = y_0 \tag{5.33}$$

$x(t)$, $y(t)$ soluciones de ellas respectivamente en $[0, a]$; $A(x, t)$, $w_4(\eta)$ como se definieron antes, con $w_4(\eta) \leqq \beta\eta$, $\beta \geq 0$ constante,

$$\left\| \int_{t_0}^t \mathfrak{D}[F(x, s) - F(y, s)] \right\| \leq \int_{t_0}^t U(\| x(s) - y(s) \|, s)\, ds, \; t_0,\; t \text{ en } [0, a];$$

que se cumplan las hipótesis del Lema 5.29 y tomemos la condición inicial del problema (5.30) así:

$$u_0 \geqq \| x_0 - y_0 \| + \beta\alpha$$

Bajo estas condiciones se cumple

$$\| x(t) - y(t) \| \leqq u^0(t). \tag{5.34}$$

Nota 5.35. Si en el Teorema 5.31 tomamos $x_0 = y_0$; $F \equiv \bar{F}$ (lo cual nos permite tomar $\beta = 0$); suponemos que (5.30) teniendo la condición inicial $u_0 = 0$ tiene solamente la solución trivial (lo cual es muy posible según se ha visto antes). Entonces $x(t) = y(t)$.

Demostración del Teorema 5.31. Si $x(t)$, $y(t)$ son soluciones de (5.32) y (5.33) respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \| x(t) - y(t) \| &= \| x_0 - y_0 + \int_0^t \mathfrak{D}[F(x(s), s) - \bar{F}(y(s), s)) \| \\ &\leqq \| x_0 - y_0 \| + \| \int_0^t \mathfrak{D}[F(x(s), s) - F(y(s), s)] \| \\ &\quad + \| \int_0^t \mathfrak{D}[F(y(s), s) - \bar{F}(y(s), s) \| \\ &\leqq \| x_0 - y_0 \| + \int_0^t U(\| x(s) - y(s) \|, s)\, ds \\ &\quad + \| \int_0^t \mathfrak{D}[F(y(s), s) - \bar{F}(y(s), s)] \| \end{aligned}$$

Si tomamos la partición P_k del intervalo $[0, t] \subset [0, a]$ siguiente: $p_k = \{0 = t_0 < t_1 \cdots < t_k = t\}$ podemos aproximar la última integral de la última desigualdad con un error $\epsilon \geqq 0$ tan pequeño como se desee tomando k suficientemente grande,

$$\begin{aligned}\| x(t) - y(t) \| \leq{} & \| x_0 - y_0 \| + \int_0^t U(\| x(s) - y(s) \|), s)\, ds \\ & + \sum_{i=1}^k \| F(y(t_i), t_i) - \bar{F}(y(t_i), t_i) - F(y(t_i), t_{i-1}) \\ & + \bar{F}(y(t_i), t_{i-1}) \| + \epsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\| x(t) - y(t) \| \leqq{} & \| x_0 - y_0 \| + \int_0^t U(\| x(s) - y(s) \|, s)\, ds + \sum_{i=1}^k w_4(t_i - t_{i-1}) \\ & + \epsilon\end{aligned}$$

$$\| x(t) - y(t) \| \leqq \| x_0 - y_0 \| + \epsilon + \beta t + \int_0^t U(\| x(s) - y(s) \|, s)\, ds$$

$$\| x(t) - y(t) \| \leqq \| x_0 - y_0 \| + \beta a + \int_0^t U(\| x(s) - y(s) \|, s)\, ds + \epsilon;$$

o sea que tomando en el Lema 5.35 $v_0 = \| x_0 - y_0 \| + \beta a + \epsilon$ se cumple que

$$\| x(t) - y(t) \| \leqq u^0(t), \text{ para } t \text{ en } [0, a].$$

En forma similar se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.36. *Sean las ecuaciones generalizadas*

$$\frac{dx}{d\tau} = \mathfrak{D}F(x, t),\ x(0) = x_0 \tag{5.37}$$

que tiene solución única en $[0, a] = I$

$$\frac{dx}{d\tau} = \mathfrak{D}F_k(x, t),\ x_k(0) = x_0^k \tag{5.38}$$

que tiene solución $x_k(t)$, $k = 1, 2, \cdots, t$ *en* I. *Supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis*:

$x_0^k \to x_0$; $F_k(x(s), t) \to F(x(s), t)$ uniformemente; $\| \int_{t_0}^t \mathfrak{D}[F(x, s) - F(x_k, s)] \| \leqq \int_{t_0}^t U(\| x(s) - x_k(s) \|)\, ds$, t_0, t en I;

que se cumplen las hipótesis del Lema 5.29 *y tomemos para el problema* (5.30) *como condición inicial* u_0 *tal que* $u_0 \geqq |x_0 - x_0^k| + \epsilon_k a$, *para casi toda* k *natural, donde* ϵ_k *es una sucesión de reales no negativos que converge a cero si* $k \to \infty$.

Bajo estas condiciones

$$\| x(t) - x_k(t) \| \leqq u^0(t).$$

Nota 5.39. Si en el Teorema 5.36 se puede tomar $u^0(t) \leqq \delta$ para t en I, $\delta > 0$, entonces $x(t) \to x_k(t)$ uniformemente en I.

Nota 5.40. Usando los Teoremas de equivalencia 3.10 y 3.12 se pueden traducir los resultados que hemos obtenido para ecuaciones generalizadas a ecuaciones funcionales con retardo.

6. Teorema de unicidad para ecuaciones funcionales con retardo

En esta sección se enuncia y demuestra un teorema (Teorema 6.3) de unicidad de solución de ecuaciones funcionales con retardo; este teorema es más general que el que se puede obtener a partir del Teorema 5.36 para ecuaciones funcionales con retardo.

Antes de enunciar el teorema se demostrará el siguiente

Lema 6.1. *Sean* φ^1, φ^2 *dos funciones continuas definidas en el intervalo*

$[-r, a]$, $q(t)$

$$= |\varphi^1(t) - \varphi^2(t)| \text{ y } p(t) = \|\varphi_t^1 - \varphi_t^2\|_H = \sup_{-r\leq s\leq 0} |\varphi^1(t+s) - \varphi^2(t+s)|$$

con $r \geq a$, *para* $t \in [0, a]$; $\varphi^1(m) = \varphi^2(m)$, *si* $m \in [-r, 0]$. *Bajo estas hipótesis existe* h, $a \geq h > 0$ *tal que se cumple la desigualdad*:

$$(6.2) \quad p(t) - p(t-z) \leq q(t) - q(t-z)|, \text{ para } z \in [0, h], \ (t-z) \in [0, a].$$

Demostración. Consideremos las dos posibilidades siguientes:

a) Cuando $\sup_{s\varepsilon[0,t]} q(s) = q(t) = p(t)$

Como $q(\ell) \leq p(\ell)$ para toda $\ell \in [0, a]$, entonces

$$p(t) - p(\ell) \leq q(t) - q(\ell) \leq |q(t) - q(\ell)|$$

b) Cuando $\sup_{s\varepsilon[0,t]} q(s) = q(t)$ para al menos un $t_1 \in [0, t)$ y $q(t) < q(t_1)$ para todo t_1 con esa propiedad.

Sea t_1^1 el primer punto a la izquierda de t donde se cumple la propiedad arriba mencionada; si llamamos $h = t - t_1^1$ entonces esta es la $h > 0$ que buscábamos ya que para toda $s \in [t-h, t]$ se cumple $p(t) - p(s) = 0 \leqq |q(t) - q(s)|$.

Teorema 6.3. *Sea* $\psi = \psi(t, r)$ *una función no negativa definida en* $\mathfrak{M} = \{(t, r), t \in (0, a), r \geq 0\}$ *Lebesgue medible en t para r fija y continua no decreciente en r para t fija.*

Además para cada subconjunto acotado B de $\mathfrak{M}$ *supongamos que existe* x_B *definida en* $0 < t < a$ *tal que*

$$(6.4) \qquad \psi(t, r) \leq x_B(t) \quad ((t, r) \in B)$$

y para la cual x_B *es Lebesgue integrable en* $\gamma < t < a$ *para toda* $\gamma > 0$.

Supóngase que para cada α *tal que* $0 < \alpha < a$ *la función idénticamente cero es la única función absolutamente continua en* $0 \leq t < \alpha$ *que satisface*

$$(6.5) \qquad \rho' = \psi(t, \rho) \text{ c.d.q.}$$

en $0 < t < \alpha$ *y tal que* $\rho_+'(0)$ *existe y se cumple:*

$$(6.6) \qquad \rho(0) = \rho_+'(0) = 0.$$

Sea $f: [0, a] \times H_1 \to R^n$, $H_1 \subset H$ *abierto siendo H el conjunto de funciones continuas definidas en* $[-r, 0]$; *f continua.*

Consideremos la ecuación diferencial funcional con retardo

$$\frac{dx}{dt} = f(x_t, t) \quad x_0 = \xi \in H_1. \tag{6.7}$$

Si f satisface la desigualdad

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \psi(t, \| x_1 - x_2 \|_H) \tag{6.8}$$

para $(t, x_j) \in [0, a] \times H_1$ con $j = 1, 2$, entonces existe cuando más una solución φ de la ecuación (6.7) con condición inicial dada.

Demostración. Supongamos que hay dos soluciones φ^1, φ^2 definidas en $[0, a]$ tales que $\varphi_0^1 = \varphi_0^2 = \xi$.

Sean las funciones p y q definidas como en el Lema 6.1,

$$p(t) = \| \varphi_t^1 - \varphi_t^2 \|_H \quad 0 \leq t < a \tag{6.9}$$

y

$$q(t) = |\varphi^1(t) - \varphi^2(t)| \quad 0 \leq t \leq \tag{6.10}$$

entonces existe $\sigma \in (0, a]$ tal que $p(\sigma) > 0$; por el punto $(\sigma, p(\sigma))$ pasa por lo tanto una solución (función absolutamente continua) que satisface la ecuación (6.5) en cierto intervalo a la izquierda de σ.

Tan lejos de σ (a la izquierda) como ρ exista se satisface la siguiente desigualdad

$$\rho(\mathrm{t}) \leq p(t). \tag{6.11}$$

Porque si este no fuera el caso existiría a la izquierda de σ un punto θ tal que

$$\rho(\theta) = p(\theta) \text{ y } \rho(\mathrm{t}) < p(t) \tag{6.12}$$

para $t < \theta$ ($\theta = \sigma$ no está excluído) y t tal que $\rho(t)$ esté definido.

En vista del lema anterior (Lema 6.1) y de que φ^1, φ^2 son soluciones de la ecuación diferencial (6.7) se tiene:

$$q(\theta) = \left| \int_0^\theta [f(t, \varphi_t^1) - f(t, \varphi_t^2)]\, dt \right|$$

y para $h > 0$ suficientemente pequeña, por ejemplo, para h igual al mínimo de h del Lema 6.1 y de la h para la existencia de solución de (6.5) a la izquierda de θ, se tiene

$$q(\theta - \mathrm{h}) = \left| \int_0^{\theta-h} [f(t, \varphi_t^1) - f(t, \varphi_t^2)]\, dt \right| \text{ como } \big|\, |u| - |v| \,\big| \leqq |u - v|$$

entonces

$$p(\theta) - p(\theta - h) \leq |q(\theta) - q(\theta - h)| \leq \left| \int_{\theta-h}^\theta [f(t, \varphi_t^1) - f(t, \varphi_t^2)]\, dt \right|$$
$$\leq \int_{\theta-h}^\theta \psi(t, p(t))\, dt$$

como $\psi(t, p(t)) \leq \psi(t, \rho(t))$, $\theta - h \leq t \leq \theta$ se tiene $\rho(\theta - h) \leq p(\theta - h)$ lo que contradice la definición de θ, por lo cual está demostrada la desigualdad (6.11).

Ahora $\rho(t) > 0$ en $0 < t \leq \sigma$ (hasta donde esté definida); porque si no $\rho(\hat{\sigma}) = 0$ para cierta $\hat{\sigma}$ tal que $0 < \hat{\sigma} < \sigma$, y la función $\hat{\rho}$ definida por

$$\text{(6.13)} \qquad \begin{cases} \hat{\rho}(t) = 0 \ (0 \leq t \leq \hat{\sigma}) \\ \hat{\rho}(t) = \rho(t) \ (\hat{\sigma} < t \leq \sigma) \end{cases}$$

sería una función no identicamente cero que satisface (6.6) lo que contradice la hipótesis del teorema. Entonces

$$\text{(6.14)} \qquad 0 < \rho(t) \leqq p(t).$$

Continuemos hasta tenerla definida en $(0, \sigma]$. En vista de (6.14) se tiene

$$\lim_{t \to 0+} \rho(t) = 0$$

Definamos $\rho(0) = 0$ y escribamos

$$0 < \frac{\rho(t)}{t} \leqq \frac{p(t)}{t} \ (0 < t \leqq \sigma)$$

como

$$\frac{p(t)}{t} = \frac{\| \varphi_t^1 - \varphi_t^2 \|_H}{t} = \sup_{s \in [-r, 0]} \frac{| \varphi^1(t+s) - \varphi^2(t+s) |}{t}$$

$$= \frac{| \varphi^1(\hat{t}) - \varphi^2(\hat{t}) |}{t}, 0 < \hat{t} \leq t, \text{ como } \frac{| \varphi^1(\hat{t}) - \varphi^2(\hat{t}) |}{t}$$

$$\leq \frac{| \varphi^1(\hat{t}) - \varphi^2(\hat{t}) |}{\hat{t}} \text{ y si } t \to 0+ \text{ entonces } \hat{t} \to 0+$$

y por lo tanto, como

$$\lim_{\hat{t} \to 0+} \frac{\varphi^1(\hat{t}) - \xi(0)}{\hat{t}} = \lim_{\hat{t} \to 0+} \frac{\varphi^2(\hat{t}) - \xi(0)}{\hat{t}} = f(0, \xi)$$

se tiene

$$\lim_{t \to 0+} \frac{p(t)}{t} = 0 \text{ y } \rho_+'(0) = 0$$

lo que contradice las hipótesis del teorema, luego $p(\sigma) > 0$ para ninguna σ tal que $0 < \sigma < a$, o sea $\varphi_t^1 = \varphi_t^2$ para toda t en $[0, a]$ por lo que $\varphi^1(t) = \varphi^2(t)$ para t en $[0, a]$.

Instituto Mexicano del Petroleo

Referencias

[1] J. Kurzweil, *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*. Czechoslovak Math. J., **7**, 82 (1957), 418–49.

[2] ———, *Addition to the former paper*. Czechoslovak Math. J., **9**, 84 (1959), 564–73.

[3] C. Imaz and Z. Vorel, *Generalized ordinary differential equations in Banach spaces and applications to functional equations*. Bol. Soc. Mat. Mex., **11**, 2 (1966), 47–59.

[4] F. Oliva and Z. Vorel, *Functional equations and generalized ordinary differential equations*. Bol. Soc. Mat. Mex., **11**, 1 (1966), 40–6.

[5] Z. Vorel, *Estimates of the distance of two solutions based on the theory of generalized differential equations*. Časopis Pést. Mat. Československa Akademie Věd., **85** (1960), 158–87.

[6] J. Kurzweil, *Uniqueness of solutions of generalized differential equations*. Czechoslovak Math. J. **8**, 83 (1958), 502–8.

[7] P. Hartman, Ordinary Differential Equations. J. Wiley and Sons, Inc., New York, 1964.

[8] T. Apostol, Mathematical Analysis. Addison Wesley, Massachusetts, 1957.