SOBRE ALGUNAS IDENTIDADES DE JENSEN Y GOULD

POR ADALBERTO GARCÍA-MÁYNEZ

1. Introducción

El propósito de este trabajo es dar una demostración elemental de la fórmula de Jensen [4]:

$$(1.1)\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+\beta k}{k}\binom{\gamma-\beta k}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+\gamma-k}{n-k}\beta^k$$

en donde α, β, γ son números reales y n un entero ≥ 0. Obtendremos también, como consecuencias de (1.1), las identidades de Gould [3]:

$$(1.2)\qquad \sum_{k=0}^{n} A_k(\alpha,\beta)\cdot\binom{\gamma+(n-k)\beta}{n-k}=\binom{\alpha+\gamma+\beta n}{n};$$

$$(1.3)\qquad \sum_{k=0}^{n} A_k(\alpha,\beta)\cdot A_{n-k}(\gamma,\beta)=A_n(\alpha+\gamma,\beta)$$

en donde

$$A_k(\alpha,\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta k}\cdot\binom{\alpha+\beta k}{k}.$$

Blackwell y Dubins demostraron esta identidad con la técnica de simetría circular ([2]). No parece obvio, sin embargo, que (1.1) puede obtenerse directamente de la identidad de Gould (1.3).

Una simple sustitución en (1.1) nos dará la fórmula alternativa:

$$(1.4)\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{a-k(\beta-1)}{k}\binom{b+k(\beta-1)}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{a+b+1}{n-k}\beta^k.$$

2. La identidad de Jensen

Empezaremos esta sección con una identidad elemental: (2.1) Si p es real y n es un entero ≥ 0, entonces:

$$(2.2)\qquad \binom{p}{n}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{p+1}{n-j}$$

Demostración. Basta poner $a=-1$, $b=p+1$ en la bien conocida identidad

$$\binom{a+b}{n}=\sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b}{n-j}.$$

(2.3) Si $p(x)$ es un polinomio en x con coeficientes reales entonces, para $n\geq 1$, la derivada de $\binom{p(x)}{n}$ está dada por la fórmula:

$$D\binom{p(x)}{n}=Dp(x)\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\cdot\binom{p(x)}{n-j}.$$

Demostración. Por la regla para hallar la derivada de la composición de dos funciones, basta demostrar:

$$D\binom{x}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \cdot \binom{x}{n-j}. \tag{2.4}$$

(2.4) es trivialmente cierta si $n = 1$. Suponiendo (2.4) válida para enteros $n' \leq n$ tenemos:

$$D\binom{x}{n+1} = (n+1)^{-1} \cdot D\left[(x-n) \cdot \binom{x}{n}\right]$$

$$= (n+1)^{-1}\left[(x-n) \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \binom{x}{n-j} + \binom{x}{n}\right]$$

$$= (n+1)^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (x-n+j) \binom{x}{n-j}\right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{x}{n-j} + \binom{x}{n}\right]$$

Reemplazando $(x - n + j)\binom{x}{n-j}$ por $(n+1-j)\binom{x}{n+1-j}$ y usando la identidad $\binom{x}{n-j} + \binom{x}{n-j+1} = \binom{x+1}{n-j}$, el miembro de arriba puede escribirse como:

$$(n+1)^{-1}\left[(n+1) \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \binom{x}{n+1-j}\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j} \binom{x+1}{n+1-j} + \binom{x}{n}\right].$$

Por (2.1) la suma de los dos últimos términos dentro del paréntesis es nula. Por tanto:

$$D\binom{x}{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \binom{x}{n+1-j}$$

y (2.4) es válida para $n' = n + 1$.

Definición 2.5. *Sean α, β números reales y m, n enteros, en donde $n \geq 0$. Definimos $p_m(\alpha, \beta, n)$ como:*

$$p_m(\alpha, \beta, n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{\alpha + \beta k}{m} \binom{n}{k}. \tag{2.6}$$

Teorema 2.7. *La derivada respecto a β de $p_m(\alpha, \beta, n+1)$ está dada por la fórmula:*

$$D_\beta p_m(\alpha, \beta, n+1) = (n+1) \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^{j-1}}{j} p_{m-j}(\alpha + \beta, \beta, n). \tag{2.8}$$

Demostración. Usando (2.3) tenemos:

$$D_\beta p_m(\alpha, \beta, n+1) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \cdot \frac{(-1)^{j-1}}{j} \cdot k \cdot \binom{\alpha+\beta k}{m-j} \cdot \binom{n+1}{k}$$

$$= (n+1) \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n+j-k}}{j} \binom{\alpha+\beta k}{m-j} \cdot \binom{n}{k-1}.$$

Sumando primero respecto a k y después respecto a j, obtenemos (2.8).

COROLARIO 2.9. *Si* $m < n$, $p_m(\alpha, \beta, n) = 0$ *para cualesquiera* α, β; y $p_n(\alpha, \beta, n) = \beta^n$ *para toda* α.

Demostración. Como el resultado es evidente para $n = 0$, procederemos por inducción respecto a n. Supongamos el resultado cierto para enteros $n' \leq n$ y sea m un entero $\leq n+1$. Por (2.7) tenemos:

$$D_\beta p_m(\alpha, \beta, n+1) = 0 \text{ si } m < n+1;$$

$$D_\beta p_{n+1}(\alpha, \beta, n+1) = (n+1)\beta^n$$

Como $p_m(\alpha, 0, n) = 0$ para toda α, m y $n > 0$, concluimos:

$$p_m(\alpha, \beta, n+1) = 0 \text{ si } m < n+1$$

$$p_{n+1}(\alpha, \beta, n+1) = \beta^{n+1}.$$

Esto completa la demostración.

(2.10) (Identidad de Jensen.) Si α, β, γ son números reales y n es un entero ≥ 0, entonces:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\beta k}{k} \binom{\gamma-\beta k}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \beta^k \binom{\alpha+\gamma-k}{n-k} \tag{2.11}$$

Demostración. Como ambos miembros de (2.11) son polinomios en α y γ para cada n, basta demostrar (2.11) si α y γ son enteros y su suma es $\geq n-1$.

Para cada pareja ordenada (m, n) de enteros no negativos, sea $P_{m,n}$ la siguiente proposición: "Si α y γ son enteros y $\alpha + \gamma - (n-1) = m$ entonces (2.11) se cumple". Es claro que $P_{m,0}$ es cierta para toda m, pues si $n = 0$ ambos miembros de (2.11) son iguales a 1, para cualesquiera α, γ y m. Observemos, por otro lado, que

$$\binom{\alpha+\beta k}{k}\binom{n-1-\alpha-\beta k}{n-k} = (-1)^{n-k}\binom{\alpha+\beta k}{n}\binom{n}{k}. \tag{2.12}$$

Por (2.12) y (2.9), $P_{0,n}$ es también cierta para toda n. Probaremos que si $P_{m-1,n'}$ es cierta para toda n' y $P_{m,n'}$ es cierta para $n' < n$ entonces $P_{m,n}$ es cierta. Una vez demostrado esto podemos probar, por inducción respecto a n, que si $P_{m-1,n'}$ es cierta para toda n' entonces $P_{m,n'}$ es cierta para toda n'. Usando finalmente inducción respecto a m concluimos que $P_{m,n}$ es cierta para toda m y toda n.

Sean, pues, α, γ enteros tales que $\alpha + \gamma - (n-1) = m$. Entonces:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\beta k}{k}\binom{\gamma-\beta k}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\beta k}{k}\binom{\gamma-1-\beta k}{n-k}$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\beta k}{k}\binom{\gamma-1-\beta k}{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n} \beta^k \binom{\alpha+\gamma-1-k}{n-k}$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k \binom{\alpha+\gamma-1-k}{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n} \beta^k \binom{\alpha+\gamma-k}{n-k}.$$

Esto completa la demostración de (2.10).

3. Consecuencias

Obtendremos ahora algunas consecuencias importantes de la identidad de Jensen. Empezaremos con una definición

$$A_k(\alpha, \beta) = \binom{\alpha+\beta k}{k} - \beta\binom{\alpha+\beta k-1}{k-1}, \tag{3.1}$$

en donde α, β son números reales y k un entero ≥ 0.

Observemos que

$$A_k(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta k} \cdot \binom{\alpha+\beta k}{k} \text{ si } \alpha + \beta k \neq 0$$

en tanto que

$$A_k(\alpha, \beta) = (-1)^k \beta \text{ si } \alpha + \beta k = 0, k > 0$$

y

$$A_k(\alpha, \beta) = 1 \text{ si } \alpha = k = 0.$$

Demostraremos ahora la identidad (1.2):

$$\sum_{k=0}^{n} A_k(\alpha, \beta)\binom{\gamma+(n-k)\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\gamma+\beta n}{n}.$$

Reemplazando el valor de $A_k(\alpha, \beta)$, el miembro izquierdo de (1.2) puede escribirse como:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\beta k}{k}\binom{\gamma+(n-k)\beta}{n-k} - \beta\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\beta k-1}{k-1}\binom{\gamma+(n-k)\beta}{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \beta^k \binom{\alpha+\gamma+\beta n-k}{n-k}$$
$$- \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{k+1} \binom{\alpha+\beta+\gamma-1+(n-1)\beta-k}{n-1-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \beta^k \binom{\alpha+\gamma+\beta n-k}{n-k}$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \beta^k \binom{\alpha+\gamma+\beta n-k}{n-k} = \binom{\alpha+\gamma+\beta n}{n}.$$

Para probar la segunda identidad de Gould (1.3)

$$\sum_{k=0}^{n} A_k(\alpha, \beta) A_{n-k}(\gamma, \beta) = A_n(\alpha + \gamma, \beta)$$

sustituimos el valor de $A_{n-k}(\gamma, \beta)$ y obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k(\alpha, \beta) A_{n-k}(\gamma, \beta)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k(\alpha, \beta) \binom{\gamma + (n-k)\beta}{n-k} - \beta \sum_{k=0}^{n-1} A_k(\alpha, \beta) \binom{\gamma - 1 + (n-k)\beta}{n-1-k}.$$

Una doble aplicación de (1.2) nos dá:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k(\alpha, \beta) A_{n-k}(\gamma, \beta)$$

$$= \binom{\alpha + \gamma + \beta n}{n} - \beta \binom{\alpha + \gamma + \beta n - 1}{n-1} = A_n(\alpha + \gamma, \beta).$$

Finalmente, para obtener (1.4) basta hacer la sustitución $\alpha = -a - 1$; $\gamma = -b + n - 1$. Como caso particular, si a, b y β son enteros, obtenemos la congruencia de Adem ([1]):

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a - k(\beta - 1)}{k} \binom{b + k(\beta - 1)}{n-k} \equiv \binom{a + b + 1}{n} \pmod{\beta}.$$

Centro de Investigación del I P N

Referencias

[1] J. Adem, *The relations on Steenrod powers of cohomology classes*, en Algebraic Geometry and Topology, Princeton (1957), 191–238.

[2] D. Blackwell and L. Dubins, *An elementary proof of an identity of Gould's*, Bol. Soc. Mat. Mex. **11** (1966), 108–10.

[3] H. W. Gould, *Generalization of a theorem of Jensen concerning convolutions*, Duke Math. J. **27** (1960), 71–6.

[4] J. L. W. V. Jensen, *Sur une identité d'Abel et sur d'autres formules analogues*, Acta Math. **26** (1902), 307–13.