# UNA NOTA SOBRE EL CIRCULO DE SEUDO ARCOS

POR J. H. REED E IGNACIO BELLO

## Introduccion

El ejemplo más reciente de un continuo plano homogéneo es el círculo de seudo arcos descubierto por Bing y Jones [1] en 1960. Hasta ahora los otros dos ejemplos de continuos planos homogéneos conocidos son el seudo arco [2] y la curva simple y cerrada.

La homogeneidad del círculo de seudo arcos $M$ se encuentra caracterizada por la propiedad de que cualquier homeomorfismo $h: K \to M$, de $K$ en $M$, $K \subseteq M$, puede ser extendido a un homeomorfismo de $M$ sobre $M$ siempre y cuando $K$ sea un punto. En el presente trabajo la homogeneidad de $M$ será extendida mediante la imposición de ciertas condiciones bajo las cuales el homeomorfismo $h$ puede ser extendido a $M$ siempre y cuando $K$ sea un subcontinuo de $M$.

## 1. Definiciones y notaciones

Una cadena $D$ es una colección finita de conjuntos abiertos $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ tal que $d_i$ corta a $d_j$ si $|i - j| \leq 1$ y $\rho(d_i, d_j) = \inf \{ (x, y) \mid y \in d_j \text{ y } x \in d_i\} > 0$ si $|i - j| > 1$. Los conjuntos $d_i$ serán llamados *eslabones* de la cadena $D$. La *subcadena* de $D$ formada por los conjuntos $d_r, d_{r+1}, \cdots, d_s$ será representada por $D(r, s)$.

La *malla de D* es el diametro mayor de los eslabones de $D$. Si la malla de $D$ es menor que $\epsilon$, $D$ será llamada una *cadena-$\epsilon$*.

Una cadena $D$ *recubre* a un conjunto $X$ si cada punto de $X$ pertenece a un eslabón de $D$.

*$D$ recubre propiamente* a $X$ si cada eslabón de $D$ contiene un punto de $X$ y $D$ recubre a $X$. *$D$ recubre irreduciblemente* a $X$ si cada eslabón de $D$ contiene un punto de $X$ que no pertenece a ningún otro eslabón de $D$ y $D$ recubre a $X$.

Un *continuo* es un conjunto compacto y conexo. El continuo $G$ será llamado *serpentoide* si para todo $\epsilon > 0$, $G$ puede ser recubierto por una cadena-$\epsilon$. $G$ será llamado un *arco de continuos* $\{g_x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ si existe una función continua $f$ de $G$ sobre $[0, 1]$ tal que $f^{-1}(x)$ es el continuo $g_x$, esto es, $\{g_x\}$ es una colección de continuos semicontinua superiormente que cubre $G$ y con la propiedad de que el espacio de partición es un arco. Si $R \subseteq [0, 1]$, $G(R)$ será la suma de todos los continuos en la colección $\{g_x \mid x \in R\}$.

El arco de continuos $G$ será llamado un *arco de continuos serpentoide* si $G$ es serpentoide. Si la función continua $f$ de $G$ sobre $[0, 1]$ es abierta (esto es, $\{g_x\}$ es una colección continua de conjuntos) $G$ será llamado un *arco de continuos serpentoide y continuo*. Si, además, cada miembro de la colección $\{g_x\}$ es un seudo arco $G$ será llamado un *arco de seudo arcos serpentoide y continuo*. Una cadena circular posee la propiedad de que la intersección del primer y el último eslabón es no vacía. Diremos que un continuo es *circular* si no es serpentoide y para todo $\epsilon > 0$ puede ser recubierto por una cadena-$\epsilon$ circular.

Un continuo circular $M$ será llamado un *círculo de seudo arcos continuo y circular* si existe una función f continua y abierta, de $M$ sobre una curva simple $y$ cerrada $C$, tal que para cada $x \in C, f^{-1}(x)$ es un seudo arco. Para mayor brevedad $M$ será llamado un *círculo de seudo arcos*. Bing $y$ Jones han demostrado que dos círculos de seudo arcos cualesquiera son homeomorfos entre sí y que cada uno de ellos es homogéneo [1].

## 2. Algunas propiedades de los arcos de seudo arcos continuos y serpentoides

Los resultados de esta sección, con excepción del teorema 2.4, se deben a Bing y Jones.

TEOREMA 2.1. *Sea $P = \{p_x \mid 0 \leq x \leq 1; p_x = f^{-1}(x)\}$ un arco de seudo arcos continuo y serpentoide. Si $0 < a < b < c < d < 1$, existe un número positivo $\epsilon$ tal que si $D$ es una cadena-$\epsilon$ que recubre a $P$, todo eslabón de $D$ cuya intersección con $P([b, c])$ es no vacía, se encuentra entre cualquier eslabón de $D$ que corte a $P([0, a])$ y cualquier otro eslabón de $D$ que corte a $P([d, 1])$.*

TEOREMA 2.2. *Sea $P = \{p_x \mid 0 \leq x \leq 1; p_x = f^{-1}(x)\}$ un arco de seudo arcos continuo y serpentoide. Para cada $\epsilon > 0$ existe una cadena-$\epsilon$ $D$ que recubre a $P$ con la propiedad de que el primer eslabón de $D$ corta a $p_0$ y el último eslabón de $D$ corta a $p_1$.*

TEOREMA 2.3. *Sea $P = \{p_x \mid 0 \leq x \leq 1; p_x = f^{-1}(x)\}$ y $Q = \{q_x \mid 0 \leq x \leq 1; q_x = f_2^{-1}(x)\}$ arcos de seudo arcos continuos y serpentoides. Si $h$ es un homeomorfismo de $p_1 + p_0$ sobre $q_1 + q_0$ tal que $h(p_0) = q_0$ y $h(p_1) = q_1$, $h$ puede ser extendido a un homeomorfismo $h^*$ de $P$ sobre $Q$ con la propiedad de que para todas las $x$ entre $0$ y $1$ se verifica que $h^*(p_x) = q_x$.*

TEOREMA 2.4. *Sean $P$ y $Q$ arcos de seudo arcos continuos y serpentoides. Si $g$ es un homeomorfismo de $[0, 1]$ sobre $[0, 1]$, existe un homeomorfismo $h^*$ de $P$ sobre $Q$ con la propiedad de que para todas las $x$ entre $0$ y $1$ se verifica que $h^*(p_x) = q_{g(x)}$.*

*Demostración.* Sea $P = \{p_x \mid 0 \leq x \leq 1; p_x = f_1^{-1}(x)\}$ y $Q = \{q_x \mid 0 \leq x \leq 1; q_x = f_2^{-1}(x)\}$, $f_2$ es una función continua y abierta de $Q$ sobre $[0, 1]$, luego entonces $g^{-1} \circ f_2$ es una función continua y abierta de $Q$ sobre $[0, 1]$. Sea $\hat{Q} = \{\hat{q}_x \mid 0 \leq x \leq 1; \hat{q}_x = (g^{-1} \circ f_2)^{-1}(x)\}$. $\hat{Q}$ es un arco de seudo arcos continuo y serpentoide y si $\hat{Q}$ y $Q$ son considerados como conjuntos de puntos, $\hat{Q} = Q$. Nótese que para cada $x \in [0, 1]$, $\hat{q}_x = q_{g(x)}$.

Sea $h$ un homeomorfismo de $p_0 + p_1$ sobre $\hat{q}_0 + \hat{q}_1$ con la propiedad de que $h(p_0) = \hat{q}_0$ y $h(p_1) = \hat{q}_1$. Usando el teorema 2.3, $h$ puede ser extendido a un homeomorfismo $h^*$ de $P$ sobre $\hat{Q}$ con la propiedad de que para todas las $x$ entre 0 y 1 se verifica que $h^*(p_x) = q_x$. Como $Q = \hat{Q}$ y $q_x = q_{g(x)}$, $h^*$ es un homeomorfismo de $P$ sobre $Q$ tal que para cada $x \in [0, 1]$, $h^*(p_x) = q_{g(x)}$.

## 3. Extension de homeomorfismos de un subcontinuo

En la presente sección investigaremos algunas de las propiedades de los subcontinuos de un arco de seudo arcos serpentoide y enumeraremos ciertas condiciones bajo las cuales un homeomorfismo, de un subcontinuo del círculo de seudo arcos, puede ser extendido.

TEOREMA 3.1. *Sea* $P = \{p_x \mid 0 \leq x \leq 1; p_x = f^{-1}(x)\}$ *un arco de seudo arcos continuo y serpentoide y* $K$ *un subcontinuo descomponible de* $P$. *Para cada* $x \in [0, 1]$ $p_x \cap K \neq \emptyset$ *si y sólo si* $p_x \subseteq K$.

*Demostración*: Si $p_x \subseteq K$ inmediatamente se verifica que $p_x \cap K \neq \emptyset$. Seguidamente demostraremos que si $p_x \cap K \neq \emptyset$ entonces $p_x \subseteq K$. Recordemos que la función $f$ de $P$ sobre $[0, 1]$ es continua y abierta. Nótese que $f(K)$ dontiene más de un punto (Si $K$ contiene un solo punto fuera indescomponible). Sea $f(K) = [a, b]$ donde $a < b$ y $x \in (a, b)$. Supongamos que $p_x$ no es un subconjunto de $K$. Luego entonces existe una $y \in p_x$ tal que $y \notin K$. Sea $\delta_1 = \rho(y, K)$, $\delta_2 = \rho(p_a, p_b)$, $\delta_3 = \rho(p_x, p_a)$, $\delta_4 = \rho(p_x, p_b)$ y $\delta = \frac{1}{3} \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$.

Como $P([a, b])$ es un arco de seudo arcos continuo *y* serpentoide, de acuerdo con el teorema 2.2 existe una cadena-$\delta$ $D = [d_1, d_2, \cdots, d_n]$ que recubre irreduciblemente a $P([a, b])$ y con la propiedad de que el primer eslabón de $D$ corta a $p_a$ y el último eslabón de $D$ corta a $p_b$. Sea $D(1, p)$ la subcadena maximal de $D$ que recubre propiamente a $p_a$; $D(q, n)$ la subcadena maximal de $D$ que recubre propiamente a $p_b$.

Como $p_a \cap K \neq \emptyset$ algún eslabón $d_k$ de $D(1, p)$ corta a $K$. También tenemos que $p_b \cap K \neq \emptyset$ luego entonces algún eslabón $d_j$ de $D(q, n)$ corta a $K$, por lo tanto la intersección de $K$ con todo eslabón de $D$ entre $d_k$ y $d_j$ es no vacía. Por consiguiente todo eslabón de $D$ corta a $p_a$, $K$ ó $p_b$, luego entonces ningún eslabón de $D$ contiene a $y$. Pero $D$ recubre a $P([a, b])$ y $y \in P([a, b])$, una contradicción. Así tenemos que para todas las $x \in (a, b)$ si $p_x \cap K \neq \emptyset$ se verifica que $p_x \subseteq K$. Solo queda demostrar que $p_a \subseteq K$ y $p_b \subseteq K$. Este resultado puede ser obtenido inmediatamente ya que $K$ es cerrado y $\lim_{x \to a} p_x = p_a$, $\lim_{x \to b} p_x = p_b$.

TEOREMA 3.2. *Sea* $P = \{p_x \mid 0 \leq x \leq 1; p_x = f^{-1}(x)\}$ *un arco de seudo arcos continuo y serpentoide. Si* $K$ *es un subcontinuo indescomponible de* $P$, $f(K)$ *es un punto.*

*Demostración*. Si $f(K)$ contiene más de un punto entonces $f(K) = [a, b]$ para alguna $a$ y $b$, donde $a < b$. Usando un argumento similar al empleado en la demostración del teorema 3.2 se verifica que para cada $x \in [a, b]$ $p_x \subseteq K$, luego entonces $K = U\{p_x \mid x \in [a, b]\}$ lo cual indica que $K$ es descomponible, una contradicción.

COROLARIO 3.3. Sea $P$ un arco de seudo arcos continuo y serpentoide y $K$ un subcontinuo propio de $P$:

(i) $K$ es descomponible si y solo si $K$ es un arco de seudo arcos continuo y serpentoide.

(ii) $K$ es indescomponible si y sólo si $K$ es un seudo arco o un punto.

LEMA 3.4. *Sean* $P$ *y* $Q$ *arcos de seudo arcos continuos y serpentoides,* $h$ *un homeo-*

*morfismo de $P$ sobre $Q$. Para cada $x \in [0, 1]$ se verifica que $h(p_x) = q_y$ para alguna $y \in [0, 1]$.*

*Demostración.* Para cada $x \in [0, 1]$, $p_x$ es un subcontinuo indescomponible de $P$. Supongamos que $h(p_x) \neq q_y$ para ninguna $y \in [0, 1]$. Tenemos que $h(p_x) \subseteq q_y$ para alguna $y$, ó existe $y_1 \neq y_2$ tal que $h(p_x) \cap q_{y_1} \neq \emptyset$ y $h(p_x) \cap q_{y_2} \neq \emptyset$.

Si $h(p_x)$ corta a $q_{y_1}$ y a $q_{y_2}$, $y_1 \neq y_2$, $h(p_x)$, de acuerdo con el teorema 3.2, es descomponible, una contradicción.

Si $h(p_x) \subseteq q_y$ para alguna $y$, y si $h(p_x) \neq q_y$ entonces existe una $z \in q_y$ tal que $z \notin h(p_x)$. Luego entonces existe una $w \in [0, 1]$ tal que $z \in h(p_w)$. Pero entonces $h^{-1}(q_y)$ corta a $p_x$ y a $p_w$ lo cual indica, de acuerdo con el teorema 3.2, que $h^{-1}(q_y)$ es descomponible, una contradicción.

LEMA 3.5. *Sean $P = \{p_x \mid 0 \leq x \leq 1; p_x = f_1^{-1}(x)\}$ y $Q = \{q_x \mid 0 \leq x \leq 1; q_x = f_2^{-1}(x)\}$ arcos de seudo arcos continuos y serpentoides, $K$ y $L$ subcontinuos de $P$ y $Q$ respectivamente, y $h$ un homeomorfismo de $K$ sobre $L$. $h$ induce un homeomorfismo $\hat{h}$ de $f_1(K)$ sobre $f_2(L)$.*

*Demostración*: Para cada $y \in f_1(K)$ sea $\hat{h}(y) = z$ si $y$ sólo si $h(p_y) = q_z$. Luego entonces $\hat{h}$ es una función uno a uno de $f_1(K)$ sobre $f_2(L)$. Si $A$ es un subconjunto cerrado de $f_2(L)$, $Q(A) = f_2^{-1}(A)$ es un subconjunto cerrado de $L$ y $h^{-1}(Q(A))$ es un subconjunto cerrado de $K$; luego entonces $h^{-1}(Q(A))$ es un subconjunto compacto de $P$, lo cual indica que $f_1(h^{-1}(Q(A)))$ es un subconjunto cerrado de $f_1(K)$. Pero $f_1(h^{-1}(Q(A))) = \hat{h}^{-1}(A)$, luego entonces $\hat{h}$ es una función continua uno a uno de $f_1(K)$ sobre $f_2(L)$ y como $f_1(K)$ es compacto $\hat{h}$ es un homeomorfismo.

TEOREMA 3.6. *Sean $P = \{p_x \mid 0 \leq x \leq 1; p_x = f_1^{-1}(x)\}$ y $Q = \{q_x \mid 0 \leq x \leq 1; q_x = f_2^{-1}(x)\}$ arcos de seudo arcos continuos y serpentoides, $K$ y $L$ subcontinuos descomponibles de $P$ y $Q$ respectivamente y $h$ un homeomorfismo de $K$ sobre $L$. Sea $\hat{h}$ el homeomorfismo inducido de $f_1(K)$ sobre $f_2(L)$. $h$ puede ser extendido a un homeomorfismo $h^*$ de $P$ sobre $Q$ si y sólo si $\hat{h}$ puede ser extendido a un homeomorfismo de $[0, 1]$ sobre $[0, 1]$.*

*Demostración.* Primeramente, si $h$ puede ser extendido a un homeomorfismo $h^*$ de $P$ sobre $Q$ entonces, de acuerdo con el Lema 3.5, $h^*$ definirá una extensión $\hat{h}^*$ de $\hat{h}$.

Supongamos que $\hat{h}$ puede ser extendido a un homeomorfismo $\hat{h}^*$ de $[0, 1]$ sobre $[0, 1]$. De acuerdo con el Teorema 2.4 existe un homeomorfismo $h_1$ de $Q$ sobre $Q$ tal que $h_1(q_x) = q_{(\hat{h}^*)^{-1}(x)}$. Luego entonces $h_1 \circ h$ define un homeomorfismo de $K$ sobre $h_1(L)$ y para cada $x \in f_1(K)$ se verifica que $h_1 \circ h(p_x) = h_1(q_{*(x)}) = q_x$. Mediante el uso del teorema 2.3 $h_1 \circ h$ puede ser extendido a un homeomorfismo $\bar{h}$ de $P$ sobre $Q$. Sea $h^* = h^{-1} \circ \bar{h}$. Se verifica que $h^*$ es un homeomorfismo de $P$ sobre $Q$ y si $y \in K$, entonces $h^*(y) = h_1^{-1} \circ \bar{h}(y) = h_1^{-1} \circ h_1 \circ h(y) = h(y)$. Luego entonces $h^*$ es una extensión de h lo cual completa la demostración.

TEOREMA 3.7. *Sea* $M = \{p_x \mid x \in S^1;\ p_x = f^{-1}(x)\}$ *un círculo de seudo arcos continuo y circular, $f$ una función continua y abierta de $M$ sobre $S^1$. Si $K$ es un subcontinuo propio de $M$ entonces* $f(K) \neq S^1$.

*Demostración.* Supongamos que $f(K) = S^1$. Sea $y \in M - K$ y $x_0 \in S^1$ tal que $y \in p_{x_0}$. Sea $U$ un conjunto abierto tal que $y \in U$ y $U \cap K = \emptyset$. Como la colección $\{p_x \mid x \in S^1\}$ es continua, existe un intervalo abierto $(a, b)$ de $S^1$ tal que $x_0 \in (a, b)$ y para todas las $x$ en $[a, b]$ se verifica que $p_x \cap U \neq \emptyset$. Sean $y_a$ y $y_b$ elementos de $p_a \cap U$ y $p_b \cap U$ respectivamente. Sea $\epsilon_1 > 0$ tal que cualquier conjunto abierto con un diametro menor que $\epsilon_1$ y conteniendo uno de los puntos $y_a$, $y_b$ ó $y$ es un subconjunto de $U$.

Tenemos que $M([a, b])$ es un arco de seudo arcos serpentoide, por lo tanto usando el Teorema 2.1, podemos obtener un $\epsilon_2 > 0$ tal que si $D$ es una cadena-$\epsilon_2$ que recubre propiamente a $M([a, b])$ todo eslabón de $D$ cuya intersección con $p_{x_0}$ es no vacía se encuentra entre cualquier eslabón de $D$ que corte a $p_a$ y cualquier otro eslabón de $D$ que corte a $p_b$. Sea $\epsilon_3 > 0$ tal que ningún conjunto con un diametro menor que $\epsilon_3$ tenga elementos en común con dos de los conjuntos $p_{x_0}$, $p_a$, $p_b$.

Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$, $E$ una cadena-$\epsilon$ circular que recubra a $M$, y $E'$ una subcadena de $E$ que recubra propiamente a $M([a, b))$. Sean $e_y'$, $e_{y_a}'$, $e_{y_b}'$ eslabones de $E'$ conteniendo a $y$, $y_a$ e $y_b$ respectivamente, $e_y'$, $e_{y_a}'$, $e_{y_b}'$ son subconjuntos de $U$. Además, como $p_{x_0} \cap K \neq \emptyset$ algún eslabón de $E'$, entre $e_{y_a}'$ y $e_{y_b}'$ corta a $K$. La malla de $E$ puede ser tomada lo suficientemente pequeña para que la intersección de algún eslabón de $E$ que no sea un eslabón de $E'$ con $K$, sea no vacía, lo cual indica que $K$ no es conexo, una contradicción; por lo tanto $f(K) \neq S^1$.

COROLARIO 3.8. *Sea $M$ un círculo de seudo arcos continuo y circular. $M$ no es homeomorfo a ninguno de sus subcontinuos propios.*

*Demostración*: Sea $M = \{p_x \mid x \in S^1; p_x = f^{-1}(x)\}$ y $K$ un subcontinuo propio de $M$. Usando el teorema 3.7 $f(K) \neq S^1$, lo cual indica que existe un intervalo $[a, b]$ de $S^1$ tal que $K \subseteq M([a, b])$. Pero $M([a, b])$ es un arco de seudo arcos serpentoide y por tanto $K$ es serpentoide y $M$ no puede ser homeomorfo a $K$.

TEOREMA 3.9. *Sean $M$ y $N$ círculos de seudo arcos continuos y circulares, $K$ y $L$ subcontinuos de $M$ y $N$ respectivamente y $h$ un homeomorfismo de $K$ sobre $L$. $h$ puede ser extendido a un homeomorfismo $h^*$ de $M$ sobre $N$ si $K$ y $L$ satisfacen una de las siguientes condiciones*:

(1) *$K$ y $L$ son descomponibles*;

(2) *$K$ y $L$ son subcontinuos propios de algún seudo arco contenido en $M$ y $N$ respectivamente*;

(3) *$K$ y $L$ son los seudo arcos maximales contenidos en $M$ y $N$ respectivamente.*

*Demostración.* Para demostrar (1) usaremos el Corolario 3.8 el cual nos permite suponer que $K$ y $L$ son subcontinuos propios de $M$ y $N$ respectivamente.

Sea $M = \{p_x \mid x \in S^1;\ p_x = f^{-1}(x)\}$ y $N = \{q_x \mid x \in S^1;\ q_x = f_2^{-1}(x)\}$. De acuerdo con el Teorema 3.7 existen intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ de $S^1$ tal que $K \subset M([a, b])$, $L \subset N([c, d))$, $p_a \cap K = p_b \cap K = \emptyset$ y $q_c \cap L = q_d \cap L = \emptyset$. Luego entonces el homeomorfismo inducido $\hat{h}$ de $f_1(K)$ sobre $f_2(L)$ puede ser extendido a un homeomorfismo $\hat{h}^*$ de $[a, b]$ sobre $[c, d]$. Usando el Teorema 3.6, $h$ puede ser extendido a un homeomorfismo $\bar{h}$ de $M([a, b])$ sobre $N([c, d])$. Finalmente, mediante el uso del Teorema 2.3 $\bar{h}$ puede ser extendido a un homeomorfismo $h^*$ de $M$ sobre $N$ lo cual concluye la demostración de (1).

A continuación demostraremos (3). En este caso $f_1(K)$ y $f_2(L)$ son cada uno, un punto de $S^1$. Sea $c \in S^1$ tal que $c \neq f_1(K)$ y $c \neq f_2(L)$. Usando el Teorema 2.3 $h$ puede ser extendido a un homeomorfismo $\bar{h}$ de $M([f_1(K), c])$ sobre $N([f_2(L), c])$. Haciendo use del Teorema 2.3 nuevamente, $\bar{h}$ puede ser extendido al homeomorfismo $h^*$.

Solamente nos queda demostrar (2). Sean $x_0$ y $y_0$ puntos en $S^1$, $K$ y $L$ subcontinuous propios de $p_{x_0}$ y $q_{y_0}$ respectivamente. Como se indica en [2] $h$ puede ser extendido a un homeomorfismo $\bar{h}$ de $p_{x_0}$ sobre $q_{y_0}$. Para concluir se procede como en (3) lo cual termina la demostración de (2).

UNIVERSIDAD DEL SUR DE LA FLORIDA

REFERENCIAS

[1] R. H. BING and F. B. JONES, *Another homogeneous plane continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., **60**(1960), 171–92.

[2] F. H. BING, *A homogeneous indecomposable plane continuum*, Duke Math. J., **15**(1948), 729–42.