UN RESULTADO EN ANALISIS COMBINATORIO

POR ADALBERTO GARCÍA-MÁYNEZ

1. Introducción

El propósito de este trabajo es demostrar el siguiente resultado en análisis combinatorio.

Se tiene una mesa redonda con $2n$ sillas alrededor y n matrimonios desean sentarse alrededor de ella. El número de formas en que pueden hacerlo de manera que exactamente m maridos queden sentados junto a su esposa es:

$$p_{n,m} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} 2^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} (2n - 1 - k)!\ (0 \leq m \leq n). \tag{1.1}$$

Dos arreglos se consideran iguales si y sólo si los compañeros a la derecha y a la izquierda de cada persona en el primer arreglo, coinciden, respectivamente con los compañeros a la derecha y a la izquierda de esa persona en el segundo arreglo.

Llamaremos $p_{n,m}$ al número dado por la expresión (1.1) y $\tilde{p}_{n,m}$ al número de arreglos buscado. Para probar que siempre $p_{n,m} = \tilde{p}_{n,m}$ demostraremos que $p_{n,m}$ y $\tilde{p}_{n,m}$ pueden obtenerse de $p_{n-1,k}$ y $\tilde{p}_{n-1,k} (k = 0, 1, \cdots, n - 1)$, respectivamente, con la misma fórmula recursiva. Ese es el contenido de los dos teoremas en este artículo.

2. El número $\tilde{p}_{n,m}$

TEOREMA 2.1. *Sea $\tilde{p}_{n,m}$ el número de formas en que n matrimonios pueden sentarse alrededor de una mesa circular de manera que exactamente m maridos queden sentados junto a su esposa $(0 \leq m \leq n)$. Acordemos también $\tilde{p}_{n,m} = 0$ si $m > n$ ó $m < 0$. Entonces se tiene:*

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{n+1,m} &= 2(2n - m + 1)\tilde{p}_{n,m-1} + [(2n - m)(2n - m - 1) + 2m]\tilde{p}_{n,m} \\ &\quad + 2(m + 1)(2n - m - 1)\tilde{p}_{n,m+1} + (m + 1)(m + 2)\tilde{p}_{n,m+2}\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

en donde m, n son enteros tales que $0 \leq m \leq n + 1$.

Demostración. Si suponemos que hay $2n$ sillas alrededor de la mesa y que n matrimonios han ya tomado sus lugares, al presentarse un nuevo matrimonio será necesario intercalar dos sillas más. Suponiendo $\tilde{p}_{k,m}$ conocido para $k \leq n$ y para toda m, podemos considerar todo arreglo en $\tilde{p}_{n+1,m}$ como el resultado de intercalar dos sillas en un arreglo de n matrimonios como se explica a continuación:

a) Por cada arreglo en $\tilde{p}_{n,m-1}$ podemos obtener $2(2n - m + 1)$ arreglos en $\tilde{p}_{n+1,m}$ intercalando las dos sillas juntas de manera de no separar a los $m - 1$ matrimonios que ya estaban juntos.

b) Por cada arreglo en $\tilde{p}_{n,m}$ podemos obtener $(2n - m)(2n - m - 1) + 2m$ arreglos en $\tilde{p}_{n+1,m}$ intercalando las sillas juntas de manera de separar a uno de los matrimonios que ya estaban unidos o intercalando las sillas separadamente de manera de no separar a ninguno de los matrimonios previamente unidos.

c) Por carda arreglo en $\tilde{p}_{n,m+1}$ podemos obtener $2(m+1)(2n-m-1)$ arreglos en $\tilde{p}_{n+1,m}$ intercalando las sillas separadamente y con una y sólo una de las sillas separando a uno de los $m+1$ matrimonios unidos.

d) Por cada arreglo en $\tilde{p}_{n,m+2}$ podemos obtener $(m+1)(m+2)$ arreglos en $\tilde{p}_{n+1,m}$ intercalando las sillas de manera de separar a dos de los $m+2$ matrimonios unidos.

Esto nos dará todos los arreglos posibles en $\tilde{p}_{n+1,m}$. Sumando los arreglos obtenidos en a), b), c) y d) obtenemos (2.2).

3. El número $p_{n,m}$

TEOREMA 3.1. *Sea*

$$p_{n,m} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} 2^k \binom{n}{k}\binom{k}{m}(2n-1-k)!,$$

en donde m, n son enteros tales que $0 \leq m \leq n$. Sea también $p_{n,m} = 0$ para $m > n \geq 0$ y para $m < 0 \leq n$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} p_{n+1,m} &= 2(2n-m+1)p_{n,m-1} + [(2n-m)(2n-m-1)+2m]p_{n,m} \\ &\quad + 2(m+1)(2n-m-1)p_{n,m+1} + (m+1)(m+2)p_{n,m+2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Demostración. Se considerarán cinco casos:

Caso 1. $0 < m \leq n-2$. Usando la identidad $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} p_{n+1,m} = \sum_{k=m}^{n+1} (-1)^{k-m} 2^k \binom{n}{k-1}\binom{k}{m}(2n+1-k)! \\ + \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} 2^k \binom{n}{k}\binom{k}{m}(2n+1-k)! \end{aligned}$$

Cambiando índices en la primera suma obtenemos:

$$\begin{aligned} p_{n+1,m} = -2 \sum_{k=m-1}^{n} (-1)^{k-m} 2^k \binom{n}{k}\binom{k+1}{m}(2n-k)! \\ + \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} 2^k \binom{n}{k}\binom{k}{m}(2n+1-k)! \end{aligned} \tag{3.3}$$

Desarrollando el miembro derecho de (3.2), fijando $m+2 \leq k \leq n$ y tomando como factor

$$\alpha_k = (-1)^{k-m} 2^k \binom{n}{k} \cdot \frac{k!(2n-k-1)!}{m!(k-m+1)!},$$

este miembro se puede escribir como

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{k=m+2}^{n} \alpha_k[- 2m(2n - m + 1) + (2n - m)(2n - m - 1)(k - m + 1)\\
&\quad + 2m(k - m + 1) - 2(2n - m - 1)(k - m)(k - m + 1)\\
&\quad + (k - m - 1)(k - m)(k - m + 1)]\\
&\quad + \text{términos de órdenes } m - 1, m \text{ y } m + 1.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

El factor de α_k se reduce a

$$(2n - k)[(k - m)(2n + 1 - k) - 2(k + 1)] = \beta_k .$$

Puede fácilmente verificarse que $\alpha_k\beta_k$ es igual a la suma de los términos de orden k en (3.3), $m + 2 \leq k \leq n$. Tomando $p = 2^m \cdot n!(2n - m - 2)!/m!(n - m + 1)!$ como factor, los términos de órdenes $k = m - 1, m$ y $m + 1$ en (3.4) son:

$$\begin{aligned}
p[&m(2n - m - 1)(2n - m)(2n - m + 1)\\
&- 2m(n - m + 1)(2n - m + 1)(2n - m - 1)\\
&+ 2m(n - m)(n - m + 1)(2n - m + 1)\\
&+ (2n - m - 1)^2(2n - m)(n - m + 1)\\
&+ 2m(n - m + 1)(2n - m - 1)\\
&-2(2n - m)(2n - m - 1)(n - m)(n - m + 1)\\
&- 4m(n - m)(n - m + 1) + 4(2n - m - 1)(n - m)(n - m + 1)]
\end{aligned}$$

lo cual se reduce a:

$$p\cdot(2n - m - 1)(2m^3 - 5m^2n + 4mn^2 + m^2 - 3mn + 2n^2 - 3m + 2n).$$

Por otra parte, la suma de los términos de órdenes $k = m - 1, m$ y $m + 1$ en (3.3) es:

$$\begin{aligned}
&2^m\binom{n+1}{m}(2n + 1 - m)! - 2^{m+1}\binom{n+1}{m+1}(m + 1)(2n - m)!\\
&\quad + 2^{m+1}\binom{n}{m+1}(m + 1)(m + 2)(2n - m - 1)!\\
&\quad = p\cdot(2n - m - 1)[(n + 1)(2n - m)(2n - m + 1)\\
&\quad - 2(n + 1)(n - m + 1)(2n - m) + 2(n - m)(n - m + 1)(m + 2)]\\
&\quad = p\cdot(2n - m - 1)(2m^3 - 5m^2n + 4mn^2 + m^2 - 3mn + 2n^2 - 3m + 2n),
\end{aligned}$$

que es también la suma de los términos de órdenes $k = m - 1, m$ y $m + 1$ en (3.4). Esto completa la demostración en el caso 1.

Caso 2. $m = 0$. La relación (3.2) toma la forma:

$$p_{n+1,0} = 2n(2n - 1)p_{n,0} + 2(2n - 1)p_{n,1} + 2p_{n,2}\,. \tag{3.5}$$

Sustituyendo $m = 0$ en (3.3) tenemos:

$$\begin{aligned} p_{n+1,0} = {} & -2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^k \binom{n}{k}(2n - k)! \\ & + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^k \binom{n}{k}(2n + 1 - k)! \end{aligned} \tag{3.6}$$

Fijando $2 \leq k \leq n$ y tomando como factor

$$a_k = (-1)^k 2^k \binom{n}{k}(2n - k - 1)!,$$

el miembro derecho de (3.5) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{k=2}^{n} a_k[2n(2n - 1) - 2k(2n - 1) + k(k - 1)] \\ & \qquad + \text{términos de órdenes 0 y 1.} \end{aligned} \tag{3.7}$$

El factor de a_k en (3.7) se reduce a $b_k = (2n - k)(2n - k - 1)$. Como en el caso 1, $a_k b_k$ es igual a la suma de los términos de orden k en (3.6), $2 \leq k \leq n$.

Los términos de órdenes 0 y 1 en (3.5) suman: $2n(2n - 1)(2n - 1)! - 2n(2n - 1)\cdot 2\cdot n\cdot(2n - 2)! + 2(2n - 1)\cdot 2\cdot n\cdot(2n - 2)! = (2n)!$ que es igual a la suma de los términos de órdenes 0 y 1 en (3.6).

Caso 3. $m = n - 1$. Debemos demostrar en este caso que:

$$p_{n+1,n-1} = 2(n + 2)p_{n,n-2} + (n^2 + 3n - 2)p_{n,n-1} + 2n^2\cdot p_{n,n}\,. \tag{3.8}$$

Directamente se obtiene:

$$\begin{aligned} p_{n,n-2} &= 2^{n-3}\cdot(n - 1)\cdot(n^2 - 3n + 4)\cdot n! \\ p_{n,n-1} &= 2^{n-1}\cdot(n - 2)\cdot n! \\ p_{n,n} &= 2^n\cdot(n - 1)! \\ p_{n+1,n-1} &= 2^{n-2}\cdot n\cdot(n^2 - n + 2)\cdot(n + 1)! \end{aligned}$$

Sustituyendo es fácil verificar que la relación (3.8) se cumple.

Caso 4. $m = n$. $p_{n+1,n} = 2(n + 1)p_{n,n-1} + n(n + 1)p_{n,n}$.

La demostración es trivial, así como en el caso 5.

Caso 5. $m = n + 1$. $p_{n+1,n+1} = 2n\cdot p_{n,n}$.

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL I P N