COMPACTIFICACIONES Y METRIZACION DE ESPACIOS TOPOLOGICOS

Por A. García-Máynez

1. Introducción

El propósito primordial de este trabajo es obtener una generalización común de dos importantes resultados en metrización de espacios topológicos: teoremas 3.3 y 3.4 en [6] o corolarios 3.3.1 y 3.3.6 a nuestro lema 3.3. De este lema se desprende también un corolario (3.3.7) que no parece estar en la literatura.

Se relacionan también las cubiertas abiertas de un espacio X con las vecindades de su diagonal en $X \times X$ y se obtienen los resultados 2.6, 2.7 y 2.10.

2. Preliminares

Recordemos las siguientes definiciones:

(2.1) Una sucesión $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots$ de cubiertas abiertas de un espacio X es un *desarrollo* de X si para cada $x \in X$, $\{St(x, \mathcal{U}_n) \mid n = 1, 2, \cdots\}$ es una base local en x. X es *desarrollable* si existe un desarrollo de X.

(2.2) Un subespacio A de X es un G_δ *fuerte* en X si existe una sucesión decreciente $V_1 \supset V_2 \supset \cdots$ de vecindades abiertas de A tales que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n^-$

(2.3) Una familia $\mathfrak{D} = \{d_i \mid i \in I\}$ de métricas continuas en un espacio (X, τ) *genera* a τ si la familia

$$\mathcal{B} = \{V_\epsilon^i(x) \mid x \in X, i \in I, \epsilon > 0\}$$

es una base de τ, en donde

$$V_\epsilon^i(x) = \{y \in X \mid d_i(x, y) < \epsilon\}.$$

(2.4) Para cada conjunto X, la *diagonal* $\Delta(X)$ de X se define como

$$\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

(2.5) Sea X un espacio topológico, $A \in 2^X$ y $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ dos familias de vecindades de A. Entonces $\mathcal{G}_2$ *refina* a $\mathcal{G}_1$ si para cada $V \in \mathcal{G}_1$ existe $W \in \mathcal{G}_2$ tal que $W \subset V$.

Teorema 2.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{G}$ la familia de complementos en $X \times X$ de conjuntos de la forma $\{x\} \times H$, en donde H es un cerrado en X y $x \in X \sim H$. Entonces X es desarrollable si y sólo si existe una sucesión $V_1, V_2, \cdots$ de vecindades abiertas de $\Delta(X)$ (en $X \times X$) que refina a $\mathcal{G}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots$ es un desarrollo de X. Para cada entero positivo n definamos

$$V_n = \bigcup \{S \times S \mid S \in \mathcal{U}_n\}$$

Es claro que cada V_n es una vecindad abierta de $\Delta(X)$. Si $x \in X$ y H es un cerrado en X que no contiene a x, entonces existe un entero n tal que

$$St(x, \mathcal{U}_n) \cap H = \Phi.$$

Ahora $V_n \cap (\{x\} \times H) = \Phi$, pues si $h \in H$ y $x \in S \in \mathcal{U}_n$, entonces $h \notin St(x, \mathcal{U}_n)$ y $(x, h) \notin S \times S$. Por tanto, la familia $\{V_1, V_2, \cdots\}$ refina a $\mathcal{G}$. Recíprocamente, si $\{V_1, V_2, \cdots\}$ es una familia de vecindades abiertas de $\Delta(X)$ que refina a $\mathcal{G}$ y

$$\mathcal{U}_n = \{S \in \tau \mid S \times S \subset V_n\}$$

entonces $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots\}$ es un desarrollo de X. En efecto, si $x \in U \in \tau$, el conjunto $K = X \times X \sim (\{x\} \times (X \sim U)) \in \mathcal{G}$. Por tanto, existe un entero n tal que $V_n \cap (\{x\} \times (X \sim U)) = \Phi$. Si $x \in L \in \mathcal{U}_n$, se tiene $L \times L \subset V_n$, de manera que $(L \times L) \cap (\{x\} \times (X \sim U)) = \Phi$. Esto implica que $L \subset U$ y, por consiguiente, $St(x, \mathcal{U}_n)$ está contenida en U.

Corolario 2.6.1. *Si X es T_1 y desarrollable, entonces $\Delta(X)$ es un G_δ en $X \times X$.*

Teorema 2.7. *Sea (X, τ) paracompacto y T_2 y U un abierto en $X \times X$ que contiene a $\Delta(X)$. Entonces existe un abierto W en $X \times X$ tal que $\Delta(X) \subset W \subset W^- \subset U$.*

Demonstración. Sea $\mathcal{U} = \{S \in \tau \mid S \times S \subset U\}$ y $\mathcal{V}$ un $*$-refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ (recuérdese que X es totalmente normal). Definamos

$$W = \bigcup\{T \times T \mid T \in \mathcal{V}\}.$$

Es claro que W es abierto y que $W \supset \Delta(X)$. Falta demostrar que $W^- \subset U$. Sea $(y, z) \in W^-$. Por hipótesis, existen $T \in \mathcal{V}$ y $(y', z') \in X \times X$ tales que:

$$(y', z') \in (St(y, \mathcal{V})) \times (St(z, \mathcal{V})) \cap (T \times T).$$

Como $\mathcal{V}^*$ refina a $\mathcal{U}$, existe $S \in \mathcal{U}$ tal que $St(T, \mathcal{V}) \subset S$. Pero $\{y, z\} \subset St(T, \mathcal{V})$. Por tanto, $(y, z) \in S \times S \subset U$ y $W^- \subset U$.

Corolario 2.7.1. *Supongamos que X es paracompacto, T_2 y que $\Delta(X)$ es un G_δ en $X \times X$. Entonces $\Delta(X)$ es un G_δ fuerte en $X \times X$.*

Los espacios paracompactos, T_2 y con diagonal G_δ en $X \times X$, son de particular interés debido a los siguientes resultados:

Teorema 2.8. ([4]). *La topología de un espacio paracompacto y T_2 X está generada por una familia de métricas continuas si y sólo si $\Delta(X)$ es un G_δ en $X \times X$.*

Teorema 2.9. ([1]). *Supongamos que existe una función perfecta f de un espacio topológico X sobre el espacio metrizable Y. Entonces X es metrizable si y sólo si $\Delta(X)$ es un G_δ en $X \times X$.*

Es bien sabido que un espacio X es metrizable si y sólo si es paracompacto, T_2 y desarrollable. Aprovechamos este resultado para probar:

Teorema 2.10. *Sea (X, τ) paracompacto y T_2. Entonces X es metrizable si y sólo si τ está generada por una familia numerable de métricas continuas.*

Demostración. Si X es metrizable, es obvio que τ está generada por una sólo métrica. Recíprocamente, si $d_1, d_2, \cdots$ es una sucesión de métricas continuas en X que genera a τ, entonces X es desarrollable. En efecto, si definimos, para cada pareja (m, n) de enteros positivos,

$$\mathfrak{U}_{m,n} = \{V_{1/n}{}^m(x) \mid x \in X\},$$

en donde $V_{1/n}{}^m(x) = \{y \in X \mid d_m(x, y) < 1/n\}$, es claro que la familia $\{\mathfrak{U}_{m,n} \mid m, n = 1, 2, \cdots\}$ es un desarrollo de X.

3. Lema Principal

El siguiente teorema será de vital importancia en la demostración del lema 3.2.

TEOREMA 3.1. ([6]). *Sea X un espacio T_2. Entonces X es paracompacto si y sólo si su producto con cada espacio compacto y T_2 es normal.* (Para una demostración de este teorema, véase, por ejemplo, Nagata [5], p. 180.)

Tendremos también ocasión de usar el siguiente resultado:

TEOREMA 3.2. *Todo espacio T_2, paracompacto y perfectamente normal es hereditariamente paracompacto.* (Véase Dugundji [3], Cap. VIII, teorema 2.5.)

LEMA 3.3. *Sea Z compacto y T_2 y X, Y subespacios de Z, en donde $X \subset Y$. Sean también $U_1, U_2, \cdots$; $W_1, W_2, \cdots$ abiertos en $X \times Z$ y $Y \times Z$, respectivamente, tales que:*

1) $\Delta(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} Cl_{X \times Z}(U_n)$; $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$
2) $W_n \cap (X \times Z) = U_n$, $n = 1, 2, \cdots$
3) *Cada* $X_n = Y \sim Pr_Y(\Delta(Y) \sim W_n)$ *es paracompacto.* [(1)]

Entonces existe una pseudo-métrica continua d_n en X_n (para cada n) y un homeomorfismo $h: L \to X^*$, en donde

$$L = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \text{ y } X^* = \prod_{n=1}^{\infty} (X_n, d_n).$$

Demostración. Observemos primero que cada $X_n \times Z$ es un subespacio normal de $Z \times Z$ que contiene a $X \times Z$ (teorema 3.1). Además, $\Delta(X_n)$ y $X_n \times Z \sim W_n$ son cerrados ajenos en $X_n \times Z$. Por tanto, por el lema de Urysohn, existe una función continua $F_n: X_n \times Z \to I$ tal que $F_n = 0$ en $\Delta(X_n)$ y $F_n = 1$ en $X_n \times Z \sim W_n$. Definamos $d_n: X_n \times X_n \to I$ por medio de la fórmula

$$d_n(x, y) = \sup_{p \in Z} |F_n(x, p) - F_n(y, p)|.$$

Es claro que d_n es una pseudo-métrica continua en X_n y, por tanto, la inclusión $j_n: L \subset (X_n, \tau_{d_n})$ es continua. La función evaluatoria J de la familia $\{j_n\}$ es entonces una función continua y biunívoca de L en X^*. Por otra parte, la familia $\{j_n\}$ distingue puntos de cerrados. Para probarlo, tomemos un cerrado A en L y un punto $x \in L \sim A$. Como $\{Cl_{X \times Z}(U_n) \cap (\{x\} \times Cl_Z(A)) \mid n = 1, 2, \cdots\}$ es una sucesión decreciente de compactos en $X \times Z$ con intersección vacía (condición

(1) Observemos que X_n y $\Delta(Y) \cap W_n$ son homeomorfos.

1), necesariamente $U_{n'} \cap (\{x\} \times A) = \Phi$ para algún entero n'. Si $a \in A$ es arbitrario, entonces $(x, a) \notin W_{n'}$, pues $W_{n'} \cap (X \times Z) = U_{n'}$ (condición 2). Por tanto:

$$d_{n'}(x, a) \geq |F_{n'}(x, a) - F_{n'}(a, a)| = F_{n'}(x, a) = 1$$

y $d_{n'}(x, A) = 1$, es decir, la familia $\{j_n\}$ distingue puntos de cerrados. Por tanto, J es un homeomorfismo de L en X^* y la demostración está completa.

Corolario 3.3.1. *Sea X un espacio de Tychonoff y Z cualquier compactificación T_2 de X. Entonces X es metrizable si y sólo si $X \times Z$ es normal y $\Delta(X)$ es un G_δ en $X \times Z$.*

Demostración de la suficiencia. Por hipótesis, existen abiertos $U_1, U_2, \cdots$ en $X \times Z$ tales que la condición 1) en el lema es satisfecha. Tomando $Y = X$ y $W_n = U_n$, obtenemos $X_n = X$ para toda n. Por 3.1, la condición 3) en el lema se cumple. Por tanto, $L = X$ es homeomorfo a un subespacio de X^* y, por ende, X es metrizable.

Demostración de la necesidad. Las hipótesis implican ahora que X es paracompacto y, por 3.1, $X \times Z$ es normal. Es claro, además, que $\Delta(X)$ es un cerrado en $X \times Z$. Sea $V_1, V_2, \cdots$ una familia de vecindades abiertas de $\Delta(X)$ que refina a la familia $\mathcal{G}$ definida en el enunciado de 2.6 y sea

$$V_n^* = X \times Z \sim Cl_{X \times Z}(X \times X \sim V_n).$$

Probaremos que $\Delta(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n^*$. Es inmediato que $\Delta(X) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n^*$. Tomemos ahora $(x, z) \in X \times Z \sim \Delta(X)$ y un abierto M en Z tal que $z \in M \subset Cl_Z(M) \subset Z \sim \{x\}$. Por 2.6, existe un entero $n > 0$ tal que $(\{x\} \times Cl_Z(M)) \cap V_n = \Phi$. Entonces $(x, z) \in Cl_{X \times Z}(X \times X \sim V_n)$. Para probarlo, sea L un abierto en $X \times Z$ que contiene a (x, z). Como $Cl_Z(X) = Z$, existe $y \in X$ tal que $y \in M$ y $(x, y) \in L$. Por tanto, $(x, y) \in L \cap (X \times X \sim V_n)$ y

$$(x, z) \in Cl_{X \times Z}(X \times X \sim V_n) = X \times Z \sim V_n^*.$$

Esto completa la demostración.

Corolario 3.3.2. *Sea X paracompacto, T_2 y topológicamente completo. Entonces X es metrizable si y sólo si $\Delta(X)$ es un G_δ en $X \times X$.*

Demostración. Por hipótesis existe un espacio compacto y T_2 Z tal que X es un G_δ denso en Z. Por tanto, $X \times X$ es un G_δ en $X \times Z$. $\Delta(X)$ es entonces un G_δ en $X \times Z$. Por 3.1, $X \times Z$ es normal.

En este momento es conveniente proponer las siguientes definiciones:

Un espacio X es T_6 si es perfectamente normal y T_1. X es T_7 si es T_6 y paracompacto. Finalmente, si n es un entero positivo, diremos que X es $T_{7,n}$ si X^n es T_7.

Corolario 3.3.3. *Sea X paracompacto, T_2 y localmente compacto. Entonces X*

es metrizable si y sólo si $\Delta(X)$ *es un* G_δ *en* $X \times X$. *En particular, todo espacio* $T_{7,2}$ *y localmente compacto es metrizable.* (Compárese con el teorema 5.6 en [2].)

COROLARIO 3.3.4. *Sea* X *compacto y* T_2. *Entonces* X *es metrizable si y sólo si* $\Delta(X)$ *es un* G_δ *en* $X \times X$.

COROLARIO 3.3.5. *Sea* X *un espacio de Tychonoff y* Z *una compactificación perfectamente normal y* T_2 *de* X. *Si* $\Delta(X)$ *es un* G_δ *en* $X \times Z$, *entonces* X *es completamente separable.*

Demostración. Por 3.2, la propiedad de ser T_7 es hereditaria. Por tanto, X es paracompacto y, por 3.1, $X \times Z$ es normal. Existen entonces abiertos $U_1, U_2, \cdots$ en $X \times Z$ que cumplen la condición 1) del lema. Tomando $Y = Z$, sea W_n un abierto en $Z \times Z$ tal que $W_n \cap (X \times Z) = U_n$. Es claro que cada conjunto $X_n = Z \sim Pr_Z(\Delta(Z) \sim W_n)$ es abierto en Z. Como Z es perfectamente normal, cada X_n y cada $X_n \times Z$ es σ-compacto. Por tanto, X_n y $X_n \times Z$ son paracompactos y de Lindelöf para cada n. De la continuidad de d_n se deduce que (X_n, d_n) es de Lindelöf y, por tanto, es completamente separable. El espacio X^*, así como todos sus subespacios, son entonces completamente separables.

COROLARIO 3.3.6. *Un espacio topológico* X *es metrizable y separable si y sólo si existe una compactificación* T_2 Z *de* X *tal que* $X \times Z$ *es perfectamente normal. Un espacio metrizable* X *es separable si y sólo si* X *tiene una compactificación* T_6.

Demostración. Si X es metrizable y separable, X es homeomorfo a un subespacio A del cubo de Hilbert I^ω. Si Z es la cerradura de A en I^ω, entonces $X \times Z$ es metrizable por ser el producto de dos espacios metrizables. Por tanto, $X \times Z$ es perfectamente normal.

La suficiencia de la primera condición es una consecuencia directa de 3.3.5. La segunda parte del corolario se desprende de 3.3.1 y 3.3.5.

COROLARIO 3.3.7. *Sea* X *un espacio metrizable y* Z *una compactificación* T_2 *de* X. *Entonces* Z *contiene una completación métrica de* X *si y sólo si* Z *contiene un* G_δ *hereditariamente paracompacto que contiene a* X. *En particular, éste es el caso si* Z *es hereditariamente paracompacto.*

Demostración. Si existe una completación métrica Y de X tal que $Y \subset Z$, entonces Y es un G_δ en Z (véase [5], teorema VI. 7, p. 205). Por ser métrico, Y es hereditariamente paracompacto. Recíprocamente, si Y es un G_δ hereditariamente paracompacto tal que $X \subset Y \subset Z$, entonces existen abiertos $U_1, U_2, \cdots; W_1, W_2, \cdots$ en $X \times Z$ y $Y \times Z$, respectivamente, tales que las tres condiciones en el lema son satisfechas. Entonces $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es un G_δ metrizable en Z (pues L es un G_δ en Y y Y es un G_δ en Z). Por tanto, L es una completación métrica de X en Z.

Las compactificaciones T_2 de un espacio metrizable X pueden distar mucho de ser hereditariamente paracompactas. El siguiente ejemplo exhibe un espacio discreto X y una compactificación T_2 de X que no es hereditariamente normal.

Ejemplo 3.4. Sea Ω el primer ordinal no numerable y sea A el conjunto de ordinales límites $\leq \Omega$. El espacio

$$X = [0, \Omega] \sim A$$

es entonces discreto y denso en $[0, \Omega]$. En consecuencia, el producto

$$Z = [0, \Omega] \times [0, \Omega]$$

es una compactificación T_2 de $X \times X$. Sin embargo, Z no es hereditariamente normal, pues el subespacio $[0, \Omega) \times [0, \Omega]$ no es normal.

El autor desconoce si toda compactificación T_2 de un espacio metrizable satisface la condición del corolario 3.3.7. En particular, se propone el siguiente problema:

¿Existe una compactificación T_2 de los racionales Q que no contenga ninguna completación métrica de Q?

Centro de Investigación del IPN

Referencias

[1] C. J. R. Borges, *On stratifiable spaces*, J. Math. **17** (1966), 1–16.
[2] J. G. Ceder, *Some generalizations of metric spaces*, Pacific J. Math. **11** (1961), 105–25.
[3] J. Dugundji, Topology, Allyn & Bacon, Boston, 1966.
[4] J. Mack, *Metric generated topologies*, Proc. Wash. St. Univ. Conf. Gen. Topology, 1970, 111–15.
[5] J. I. Nagata, Modern General Topology, John Wiley & Sons, New York, 1968.
[6] H. Tamano, *On compactifications*, J. Math. Kyoto Univ. **1** (1962) 161–93.