UN ESPACIO DE HAUSDORFF NUMERABLE Y CONEXO CUYO PRIMER GRUPO DE COHOMOLOGIA DE ČECH ES ISOMORFO A Z

POR GEORGE J. MICHAELIDES E IGNACIO BELLO

En [4] Michaelides ha demostrado que los grupos de homotopía, homología singular y cohomología de un espacio de Hausdorff numerable y conexo son todos cero. La pregunta natural que se suscita es si estos espacios son acíclicos con respecto a otras teorías homológicas. Bredon en [1] demostró que éste no es el caso mediante la construcción de un espacio cuyo primer grupo de cohomología de Čech no es cero. En este trabajo calcularemos este grupo con coefficientes en Z (el conjunto de números enteros) y demostraremos que es isomorfo a Z.

Notaciones. El conjunto de enteros positivos será denotado por Z^+ y estará equipado con la topología cuyos conjuntos abiertos básicos son las sucesiones $N(a, b) = \{an + b\}_{n=0}^{\infty}$, donde $(a, b) = 1$, es decir, a y b son primos entre si. Z^+ dotado de esta topología es un espacio de Hausdorff numerable y conexo [2].

Las definiciones de cohomología de Čech, recubrimiento abierto, refinamiento de un recubrimiento, nervio de un recubrimiento, etc, pueden ser encontradas en [3]. El método usado en la demostración es el siguiente; primeramente consideramos dos copias de Z^+ e identificamos dos puntos a y b, el espacio X así obtenido posee la propiedad de que $H^1(X) \neq 0$, es decir, la primera cohomología de Čech con coeficientes en Z no es isomorfa a $[X, S^1]$. A continuación demostramos que $H^1(X) \simeq Z$. Para obtener este resultado verificamos que $\tilde{H}^1(Z^+) = 0$ y usamos la sucesión de Mayer-Vietoris para cohomología.

Primeramente establecemos el

LEMA 1.1. *Sea A el mínimo común múltiplo de a y c ($A = [a, c]$). Si $N(a, b) \cap N(c, d) \neq \phi$, $N(a, b) \cap N(c, d) = N(A, B)$ donde B es el entero positivo más pequeño en $N(a, b) \cap N(c, d)$.*

Demostración: Primeramente demostraremos que $N(A, B) \subset N(a, b)$. Si $x \in N(A, B)$, $x = Am + B$, donde m es un entero positivo. Sea $A = ak$, y n_1 un entero con la propiedad de que $an_1 + b = B$. $x = Am + B = (ak)m + (an_1 + b) = a(km + n_1) + b \in N(a, b)$. Usando un argumento similar se verifica que $N(A, B) \subset N(c, d)$ y por lo tanto $N(A, B) \subset N(a, b) \cap N(c, d)$.

Para demostrar que $N(a, b) \cap N(c, d) \subset N(A, B)$ observaremos que si $x \in N(a, b) \cap N(c, d)$, $x = ak + B = cm + B$, lo cual implica que $ak = cm$, esto es, ak es un múltiplo de a y de c, por lo tanto $x \in N(A, B)$, y $N(a, b) \cap N(c, d) \subset N(A, B)$.

Inmediatamente pasaremos a demostrar que $N(A, B)$ es un conjunto abierto básico, o que A y B son primos entre si, es decir, $(A, B) = 1$. Sea $A = p_1 \cdot p_2 \cdots \cdot p_k$, donde p_i es un factor primo de A. Como $(a, b) = (c, d) = 1$ si $p_i \mid a$ entonces $p_i \nmid B = an_1 + b$, y si $p_i \mid c$ entonces $p_i \nmid B = cn_2 + d$. Por lo tanto B no es divisible por ningun factor de A, lo cual indica que $(A, B) = 1$.

Nota 1. Sea $N(a, b)$ un conjunto abierto básico y $a = p_1 \cdot p_2 \cdots \cdot p_r$ la descomposición de a como producto de sus factores primos, entonces $N(a, b) \subset N(p_i, b)$, $i = 1, 2, \cdots r$.

Nota 2. Si $b' = b - ak > 0$, $b > a$ y $N(a, b)$ es un conjunto abierto básico $N(a, b) \subset N(a, b')$. Si $S = \{s_1, s_2, \cdots s_k\}$ (los primeros k elementos de $N(a, b')$), $N(a, b) = N(a, b') - S$.

TEOREMA 1.2. *Sean p_1 y p_2 dos números primos y $N(p_1, b_1)$, $N(p_2, b_2)$ conjuntos abiertos básicos $b_1 \neq b_2$. $N(p_1, b_1) \cap N(p_2, b_2) \neq \phi$ si y solo si $p_1 \neq p_2$.*

Demostración. De acuerdo con la nota 2 podemos suponer que $b_1 < p_1$ y $b_2 < p_2$. Sea $p_1 \neq p_2$. Debemos hallar dos enteros positivos n_1 y n_2 con la propiedad de que $p_1n_1 + b_1 = p_2n_2 + b_2$, es decir, $p_1n_1 - p_2n_2 = b_2 - b_1$.

Como $(p_1, p_2) = 1$, existen enteros k_1, k_2 tal que $p_1k_1 - p_2k_2 = 1$. Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $b_2 - b_1$ obtenemos $p_1k_1(b_2 - b_1) - p_2k_2(b_2 - b_1) = b_2 - b_1$. Si $n_1 = k_1(b_2 - b_1)$, $n_2 = k_2(b_2 - b_1)$ inmediatamente obtenemos el resultado deseado.

Recíprocamente, si $N(p_1, b_1) \cap N(p_2, b_2) \neq \phi$, $p_1 \neq p_2$ ya que si $p_1 = p_2 = p$, m y n son enteros positivos tal que $pn + b_1 = pm + b_2$, $pk = b_2 - b_1$, donde $k = n - m$, luego $p \mid b_2 - b_1$, una contradicción ya que $b_2 < p$.

TEOREMA 1.3. *Si p_1, p_2 y p_3 son tres números primos diferentes $N(p_1, b_1) \cap N(p_2, b_2) \cap N(p_3, b_3) \neq \phi$.*

Demostración. Como p_1, p_2 y p_3 son diferentes, de acuerdo con el Teorema 1.2 $N(p_1, b_1) \cap N(p_2, b_2) \neq \phi$. Usando el Lema 1.1, $N(p_1, b_1) \cap N(p_2, b_2) = N(p_1p_2, B)$. Como $(p_1p_2, p_3) = 1$, podemos emplear un argumento similar al usado en el teorema 2 y así obtener

$$N(p_1p_2, B) \cap N(p_3, b_3) = N(p_1, b_1) \cap N(p_2, b_2) \cap N(p_3, b_3) \neq \phi.$$

TEOREMA 1.4. *Si $N(a, b)$ y $N(c, d)$ son dos conjuntos abiertos básicos, $N(a, b) \cap N(c, d) \neq \phi$ si y solo si $d - b$ (ó $b - d$) es divisible por q, el máximo común divisor de a y c.*

Demostración. Sea q el máximo común divisor de a y c; $q = (a, c)$. Supongamos que $N(a, b) \cap N(c, d) \neq \phi$. Por esto existen enteros positivos m y n tal que $an + b = cm + d$, o sea, $an - cm = d - b$. Sean $qa' = a$ y $qc' = c$. $d - b = an - cm = qa'm - qc'm = q(a'n - c'm)$, lo cual implica que $q \mid d - b$.

Reciprocamente supongamos que $q \mid d - b$. Como $a = qa'$, $c = qc'$, $(a', c') = 1$ Por tanto $q(a'n - c'm) = d - b$, es decir, $an_1 - cm_1 = d - b$, lo cual implica que $an_1 + b = cm_1 + d$. Por consiguiente $N(a, b) \cap N(c, d) \neq \phi$.

TEOREMA 1.5. *Sean $N(a_1, b_1)$, $N(a_2, b_2)$ y $N(a_3, b_3)$ tres conjuntos abiertos básicos. Si la intersección de cualquier par de estos conjuntos es no vacía $N(a_1, b_1) \cap N(a_2, b_2) \cap N(a_3, b_3) \neq \phi$.*

La demostración de este teorema se encuentra basada en los siguientes lemas.

Lema A. Sea $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ *la descomposición de* a *como producto de sus factores primos,* $N(a, b) = \bigcap_{i=1}^{k} N(p_i^{n_i}, b)$.

Demostración. Primeramente observamos que si $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$, $(p_1^{n_1}, p_2^{n_2}) = 1$ y de acuerdo con el Teorema 1.4 y el Lema 1.1 $N(p_1^{n_1}, b) \cap N(p_2^{n_2}, b) = N(p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}, b) = N(a, b)$. El resto de la demostración puede ser llevada a cabo usando inducción.

Lema B. Sean p_1 *y* p_2 *enteros positivos,* $(p_1, p_2) = 1$. *Si* $N(p_1, b) \cap N(A, B) \neq \phi$, $N(p_2, b) \cap N(A, B) \neq \phi$ *entonces* $N(p_1, b) \cap N(p_2, b) \cap N(A, B) \neq \phi$.

Demostración. $N(p_1, b) \cap N(p_2, b) = N(p_1 p_2, b)$ de acuerdo con el Lema 1.1. Usando el Teorema 1.4 si $N(A, B) \cap N(p_1 p_2, b) \neq \phi$ es necesario que $(p_1 p_2, A) \mid B - b$.

Si resulta que $(p_1 p_2, A) = 1$ la proposición es obviamente verdadera. Quedan tres casos por considerar en los cuales $(p_1 p_2, A)$ es igual a p_1, p_2, ó $p_1 p_2$. Como $p_1 \mid B - b$ y $p_2 \mid B - b$, de acuerdo con el Teorema 1.4, $(p_1, p_2) = 1$ y p_1, p_2 son factores de $B - b$, se verifica que $p_1 p_2 \mid B - b$ lo cual concluye la demostración.

Demostración del Teorema 1.5. Sea $N(a_1, b_1) \cap N(a_2, b_2) = N(A, B)$, donde $A = [a_1, a_2]$ (el m.c.m. de a_1 y a_2) y $B = an_1 + b_1 = a_2 n_2 + b_2$ el primer elemento de la intersección. Es suficiente demostrar que $N(A, B) \cap N(a_3, b_3) \neq \phi$.

Sea $A = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ la descomposición de A como producto de sus factores primos. De acuerdo con el Lema A, $N(A, B) = N(p_1^{n_1}, B) \cap \cdots \cap N(p_k^{n_k}, B)$ donde cada $p_i^{n_i}$ es un factor de a_1, a_2 ó ambos.

$N(p_i^{n_i}, B) = N(p_i^{n_i}, a_1 k + b_1) = N(p_i^{n_i}, klp_i^{n_i} + b_1)$, k y l enteros positivos y $i = 1, 2, 3, \cdots, k$, contiene todos los elementos de $N(a_1, b_1)$ exceptuando un número finito de estos (Véase las Notas 1 y 2). Como, de acuerdo con la hipótesis, $N(a_1, b_1) \cap N(a_3, b_3) \neq \phi$, $N(p_1^{n_1}, B) \cap N(a_3, b_3) \neq \phi$.

De la misma manera deducimos que $N(p_2^{n_2}, B) \cap N(a_3, b_3) \neq \phi$. De acuerdo con el Lema B, $N(p_1^{n_1}, B) \cap N(p_2^{n_2}, B) \cap N(a_3, b_3) \neq \phi$. Como $N(p_1^{n_1}, B) \cap N(p_2^{n_2}, B) = N(p_1^{n_1} p_2^{n_2}, B)$; $N(p_1^{n_1} p_2^{n_2}, B) \cap N(p_3^{n_3}, B) \neq \phi$ y $N(a_3, b_3) \cap N(p_3^{n_3}, B) \neq \phi$ se verifica que $N(p_1^{n_1} p_2^{n_2}, B) \cap N(p_3^{n_3}, B) \cap N(a_3, b_3) \neq \phi$. Repitiendo el proceso k veces obtenemos $N(p_1^{n_1}, B) \cap \cdots \cap N(p_k^{n_k}, B) \cap N(a_3, b_2) \neq \phi$ ó $N(A, B) \cap N(a_3, b_3) \neq \phi$.

El teorema 1.5 puede ser extendido para cubrir la intersección de n conjuntos básicos. La demostración de este teorema no será dada ya que no es necesaria para el resto de este trabajo.

Nuestro objetivo es calcular $H^1(Z^+)$. Con este objetivo en mente consideraremos el conjunto de recubrimientos abiertos de Z^+ (Rec Z^+) y veremos que es suficiente considerar un subconjunto cofinal de Z^+. Este subconjunto debe tener la propiedad de que cada recubrimiento abierto consiste de conjuntos abiertos básicos y contiene un subconjunto cofinal, que denotaremos $\text{Rec}_c\, Z^+$, y que es cofinal en Rec Z^+. Mas tarde describiremos Rec Z^+ y lo emplearemos en el calculo de $H^1(Z^+)$. En este proceso necesitaremos el

LEMA 1.6. *Sea α un recubrimiento (de conjuntos abiertos básicos) de Z^+ y $A_1, A_2, \cdots, A_k \cdots$ una sucesión de elementos de α tal que $A_1 \subset A_2 \subset A_3, \cdots$, entonces existe una n tal que $A_m = A_n$ para $m > n$.*

Demostración. Sea $A_1 = N(a_1, b_1)$, $A_2 = N(a_2, b_2) \cdots A_i = N(a_i, b_i) \cdots$ una sucesión ascendente de conjuntos abiertos básicos. $A_i \subset A_{i+1}$ implica que a_i es un múltiplo de a_{i+1} y por lo tanto a_1 es un múltiplo de todo a_i, $i > 1$. Como $a_1 = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$ donde los p_i son factores primos de a_i dispuestos en orden creciente podemos concluir (ver la Nota 1) que la sucesión mas larga posible es la cual en que $n = n_1 + n_2 \cdots + n_r$, por lo tanto cuando $m > n$, $A_m = A_n$.

En vista de este Lema si α es un recubrimiento dado de Z^+ cuyos elementos son conjuntos abiertos básicos retendremos aquellos elementos de α que son cotas superiores de las sucesiones descritas en el Lema y descartaremos el resto; el resultado será un nuevo recubrimiento α' que es un refinamiento de α y con la propiedad de que ningun subconjunto de α' esta contenido en otro subconjunto.

Si ahora consideramos el conjunto de recubrimientos abiertos de Z^+ en el cual todos los elementos son de la forma α' obtendremos un subconjunto de Rec Z^+. (Este conjunto es el que denotamos previamente por $\text{Rec}_c\ Z^+$). El argumento aquí presentado demuestra el

TEOREMA 1.7. *$\text{Rec}_c\ Z^+$ es un subconjunto cofinal de* Rec Z^+.

De aquí en adelante cuando usemos el término "recubrimiento" se entenderá que nos referimos a un elemento de $\text{Rec}_c\ Z^+$.

Lema C. Sea $b \in Z^+$ y $N(p, b)$ un conjunto abierto básico. $\{pn\} \subset F[N(p, b)]$ (la frontera de $N(p, b)$).

Demostración. Sea k un entero positivo. $pk \notin N(p, b)$. Si $N(q, pk)$ es un conjunto abierto conteniendo a pk, mediante el Teorema 1.4 obtenemos que $N(p, b) \cap N(q, pk) \neq \phi$ ya que $(q, pk) = 1$ y por lo tanto $(p, q) = 1$

Lema 1.8. Sean $p_1, p_2, \cdots, p_k$ numeros primos (diferentes) y $N(p_1, b_1)$, $N(p_2, b_2), \cdots, N(p_k, b_k)$ conjuntos abiertos básicos; entonces $p_1 p_2 \cdots p_k$ no pertenece a la unión de estos conjuntos.

Demostración. Primeramente observaremos que los p_i no tienen que ser necesariamente diferentes. La demostración se lleva a cabo usando inducción. De acuerdo con el Lema C, $p_1 p_2 \notin N(p_1, b_1) \cup N(p_2, b_2)$. Procediendo por inducción se obtiene la demostración.

TEOREMA 1.9. *Si Z^+ tiene una topología dada, Z^+ no posee ningún recubrimiento de conjuntos abiertos excepto aquellos que contienen un conjunto de la forma $N(1, k)$.*

Demostración. Si α es un recubrimiento que contiene a $N(1, k)$ este conjunto contiene a todos los números naturales excepto $1, 2, \cdots, k - 1$. Como $\alpha \in \text{Rec}_c\ Z^+$ el número de conjuntos abiertos de α será menor que $k + 1$.

Si $N(a_1, b_1), \cdots, N(a_k, b_k) a_i \neq 1, i = 1, 2, \cdots k$, es un recubrimiento finito, entonces cada $N(a_i, b_i)$ está contenido en $N(p_i, b_i)$ donde p_i es un factor primo de a_i. Por tanto $N(p_{j_1}, b_1), \cdots, N(p_{j_k}, b_k)$, p_{j_i} un factor primo de a_i, es también un recubrimiento de Z^+. Pero de acuerdo con el Lema 1.8 $p_{j_1}p_{j_2} \cdots p_{j_k}$ no pertenece a la unión de $N(p_{j_i}, b_i)$. Esta contradicción establece el Teorema.

TEOREMA 1.10. *Si α es un recubrimiento dado y $N(a_1, b_1)$, $N(a_2, b_2)$, $N(a_3, b_3)$ y $N(a_4, b_4)$ son elementos de α y $N(a_i, b_i)$ se cortan en cadena, es decir, $N(a_i, b_i) \cap N(a_{i+1}, b_{i+1}) \neq \phi$ pero $N(a_i, b_i) \cap N(a_{i+2}, b_{i+2}) = \phi$ y $N(a_4, b_1) \cap N(a_i, b_i) \neq \phi$ entonces existe un elemento $B \in \alpha$ que corta a todos los $N(a_i, b_i)$.*

Demostración. Sea $N(a_i, b_i) = A_i$. Si el recubrimiento α contiene un conjunto de la forma $N(1, k)$ la demostración es obvia, ya que este conjunto corta a todos los otros conjuntos del recubrimiento. Por tanto consideraremos el caso en que α no contiene ningun conjunto de la forma antes mencionada. Si admitimos que la conclusión es falsa

$$A_1 = N(a_1, b_1) = N(p_1 \cdots p_k, b_1) = N(p_1, b_1) \cap \cdots \cap N(p_{k_1}, b_1) \subset N(p_i, b_1) \qquad 1 < i < k_1$$

$$A_2 = N(a_2, b_2) = N(q_1, b_2) \cap \cdots \cap N(q_{k_2}, b_2) \subset N(q_i, b_2) \qquad 1 < i < k_2$$

$$A_3 = N(r_1, b_3) \cap N(r_2, b_3) \cap \cdots \cap N(r_{k_3}, b_3) \subset N(r_i, b_3) \qquad 1 < i < k_3$$

$$A_4 = N(s_1, b_4) \cap N(s_2, b_4) \cap \cdots \cap N(s_{k_4}, b_4) \subset N(s_{k_i}, b_4) \qquad 1 < i < k_4$$

donde p_i, q_i, r_i, s_i son los factores primos de a_1, a_2, a_3, y a_4 respectivamente.

Si B es un elemento de α que no corta a todos los A_i admitamos que B no corta a, por lo menos, A_1.

$B = N(a, b) = N(t_1, b) \cap \cdots \cap N(t_l, b)$, por tanto si $A_1 \cap B = \phi$ existen p_i y t_j tal que $N(p_i, b_1) \cap N(t_j, b) = \phi$, lo cual implica que $p_j = t_j$ y $b_1 \neq b$. Es facil observar que este conjunto B de α que no corta a A_1 está contenido en alguno de los conjuntos $N(p_1, b)$, $N(p_2, b)$, $\cdots$, $N(p_k, b)$. De una manera similar deducimos que cada $B \in \alpha$ que no corte a A_2 está contenida en uno de los conjuntos $N(q_1, b)$, $\cdots$, $N(q_{k_2}, b)$. Procediendo de ésta manera puede verse que existe un número finito m_1 de subconjuntos que contienen estas B y no cortan a A_1, m_2 subconjuntos que contienen estas B y no cortan a A_2, m_3 y m_4 subconjuntos que contienen estas B y no cortan a A_3 y A_4 respectivamente. Por consiguiente α está contenido en un recubrimiento β que consiste de un número finito de subconjuntos ninguno de los cuales es de la forma $N(1, k)$, ya que p_i, q_i, s_i, y r_i son todos mayores que 1. De acuerdo con el Teorema 1.9 β no es un recubrimiento y por tanto α no es un recubrimiento, lo cual contradice la hipótesis. Luego tiene que existir un conjunto B que corte a A_1, A_2, A_3 y A_4.

COROLARIO 1.11. *Si α es un recubrimiento de Z^+, n un entero positivo mayor que 3, y $A_1, A_2, \cdots, A_k$ $A_i \in \alpha$, se cortan en cadena, entonces existe un conjunto $B \in \alpha$ tal que $A_i \cap B \neq \phi$, $i = 1, 2, \cdots, n$.*

Demostración. La demostración es similar a la dada en el Teorema 1.11. Si se reemplaza 4 por n en 1.11 se puede obtener una contradicción similar.

TEOREMA 1.12. *Si $\alpha \in \mathrm{Rec}_c\, Z^+$ y $Z_\alpha{}^+$ es el nervio de α entonces* $H_1(Z_\alpha{}^+; Z) = 0$

Demostración. Usando el Corolario 1.11, si α es un recubrimiento dado y $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $A_i \in \alpha$, se cortan en cadena, sabemos que existe un conjunto abierto $B \in \alpha$ tal que $A_i \cap B \neq \phi$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Las vertices v_{Ai}, correspondientes a A_i forman un camino cerrado (circuito) en el nervio de $Z_\alpha{}^+$. Como $B \cap A_i \cap A_{i+1} \neq \phi$ (de acuerdo con el Teorema 1.5) las vertices v_{A_i}, $v_{A_{i+1}}$ y v_B determinan un 2-simplejo, lo cual implica que el cono del circuito $v_{A_1}v_{A_2} \cdots v_{A_n}v_{A_1}$ esta en $Z_\alpha{}^+$, por lo tanto $v_{A_1}v_{A_2} \cdots v_{A_n}v_{A_1}$ es una cota y obtenemos $H_1(Z_\alpha{}^+; Z) = 0$.

A continuación pasaremos a calcular $\check{H}^1(Z_\alpha{}^+; Z)$, lo cual llevaremos a cabo mediante el uso del Teorema 1.12 y el Teorema de los coeficientes universales para cohomología.

Primeramente notaremos que $H^1(Z_\alpha{}^+; Z) \simeq \mathrm{Hom}\ (H_1(Z_\alpha{}^+; Z), Z) \oplus \mathrm{Ext}\ (H_0(Z_\alpha{}^+; Z), Z)$ de acuerdo con el Teorema de los coefficientes universales. Usando el Teorema 1.12 obtenemos $H_1(Z_\alpha{}^+; Z) = 0$ y por consiguiente $\mathrm{Hom}\ (0; Z) = 0$.

$H_0(Z_\alpha{}^+; Z) \simeq Z$ ya que $Z_\alpha{}^+$ es conexo, luego $\mathrm{Ext}\ (Z, Z) = 0$ y por lo tanto $H^1(Z_\alpha{}^+; Z) = H^1(Z_\alpha{}^+) = 0$.

TEOREMA 1.13. $\check{H}^1(Z^+, Z) = H^1(Z^+) = 0$.

Demostración. De acuerdo con la definición $\check{H}^1(Z^+; Z) = \varinjlim \{H^1(Z_\alpha{}^+; Z), \pi_\alpha{}^\beta\}$ tomado sobre un conjunto cofinal de recubrimientos.

Para cada $\alpha \in \mathrm{Rec}_c\, Z^+$, $H^1(Z_\alpha{}^+; Z) = 0$, por lo tanto los $\pi_\alpha{}^\beta$ son los homomorfismos triviales y por consiguiente $\varinjlim \{H^1(Z_\alpha{}^+; Z), \pi_\alpha{}^\beta\} = \check{H}^1(Z_\alpha{}^+; Z) = \check{H}^1(Z^+) = 0$.

Existen espacios de Hausdorff numerables y conexos cuyo primer grupo de cohomología de Čech no es cero (véase, por ejemplo, la nota 2 en [1]).

Si obtenemos dos copias de Z^+ e identificamos dos puntos a y b el espacio X así construido será de Hausdorff, numerable y conexo

TEOREMA 1.14. $\check{H}^1(X) \simeq Z$

Demostración. $X = Z^+ \cup Z^+$, $A = Z^+ \cap Z^+ = \{a, b\}$ usando la sucesión reducida de Mayer-Vietoris, que es exacta, obtenemos

$$\tilde{H}^0(Z^+) \oplus \tilde{H}^0(Z^+) \to \tilde{H}^0(A) \to \check{H}^1(X) \to \check{H}^1(Z^+) + \check{H}^1(Z^+) \to \cdots$$

De acuerdo con el Teorema 1.13 $\check{H}^1(Z^+) = 0$ y como Z^+ es conexo $\check{H}^0(Z^+) \simeq Z$ por lo tanto $\tilde{\check{H}}^0(Z^+) = 0$ y $\tilde{H}^0(A) \simeq Z$ obteniendo $0 \to Z \to \check{H}^1(X) \to 0$. Como la sucesión dada es exacta $\check{H}^1(X) \simeq Z$

UNIVERSIDAD DEL SUR DE LA FLORIDA

REFERENCIAS

[1] G. E. BREDON, *A space for which $H^1(X; Z) \not\approx [X, S^1]$*, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 396–8.

[2] M. BROWN, *A countable connected Hausdorff space*. Bull. Amer. Math. Soc. **59** (1953), 367.

[3] S. EILENBERG and N. E. STEENROD. Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952.

[4] G. J. MICHAELIDES, *On countable connected Hausdorff spaces* (to appear).