# SOBRE LA COMPACIDAD EN PROBLEMAS DE CONTROL

POR DAVID A. SÁNCHEZ

## Introducción

En problemas de control óptimo de tipo Lagrange o Mayer, cuando se investiga la existencia del mínimo de la funcional de costo, es usual suponer que el espacio de tiempo-fase $A = \{(t, x)\} \subset R^1 \times R^n$ es compacto. Además, si $U(t, x) \subset R^m$ es el espacio de control, también se supone que el conjunto $M = \{(t, x, u) \mid (t, x) \in A, u \in U(t, x)\}$ es compacto.

Si $A$ no es compacto, sino solamente cerrado, entonces es necesario dar condiciones que aseguren que las trayectorias $\{x_k(t)\}$ que corresponden a una sucesión de pares admisibles minimizantes $\{(x_k(t), u_k(t))\}$ permanecen en un subconjunto compacto $A_0 \subset A$, y entonces que el conjunto correspondiente $M_0 = \{(t, x, u) \mid (t, x) \in A_0, u \in U(t, x)\}$ es compacto. En el caso más común, el cual consideramos en este trabajo, el conjunto $A$ es contenido en un cilindro $\{(t, x) \mid a \leq t \leq b, x \in R^n\}$ y se supone que

(a) para cualquier número $N \geq 0$ el conjunto $M_N = \{(t, x, u) \mid \cdot (t, x, u) \in M, |x| \leq N\}$ es compacto, y

(b) existe un conjunto compacto $P \subset A$ tal que cualquiera trayectoria admisible $x(t)$ tiene a lo menos un punto $(t_0, x(t_0)) \in P$.

En el caso frecuente, donde $A$ es un cilindro y $U(t, x) = \{u \| |u| \leq k\}$, la condición (a) vale y la condición (b) se verifica si se impone que todas las trayectorias tengan su origen en un punto fijo o un conjunto inicial compacto fijo.

En el problema de control óptimo de tipo Mayer se supone también que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que gobiernan el sistema, satisfacen una condicion de Lyapunov que asegura que cada trayectoria (solución) se queda en un conjunto compacto. Para el problema de tipo Lagrange con funcional de costo $I[x, u]$ se supone lo mismo o se asegura que dado un conjunto $K$ de pares admisibles $\{(x_\alpha, u_\alpha)\}$ para el cual $I[x_\alpha, u_\alpha] \leq L$ entonces $|x_\alpha| \leq N$. Por ejemplo si $K$ es una sucesión minimizante tal que $\lim I[x_\alpha, u_\alpha] = i = \inf I[x, u]$, entonces se podría escoger $L = i + 1$. Ejemplos de varias condiciones que garantizan compacidad se encuentran en estas memorias: L. Cesari [1], [2], A. F. Filippov, [4], y E. J. McShane [6].

En la literatura pasada sobre el cálculo variacional tambien fue estudiado el caso donde el espacio de tiempo-fase no es compacto: en particular véase L. Tonelli [7; Vol. II, p. 307–312], E. J. McShane [5, p. 302–304], y S. Cinquini [3, p. 184–190]. En el caso donde $A$ está contenido en un sector rectangular $(n = 1)$ y la condicion (b) vale, Tonelli dió condiciones sobre la funcional de costo $I[x]$ que aseguran que $I[x] \to \infty$ cuando $x_{\max} \to \infty$ or $x_{\max} - x_{\min} \to \infty$ donde $x_{\max} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ y $x_{\min} = \min_{c \leq t \leq b} |x(t)|$. Seguramente en vista de la hipótesis (b) cualquier conjunto de trayectorias tales que $I[x] \leq L$ debe ser uniformemente acotado. Cinquini modificó y extendió los resultados de Tonelli al caso donde $I[x]$ depende de derivadas de orden mayor que uno, y son estos resultados que deseamos mostrar que son aplicables al problema de control óptimo de tipo Lagrange.

## Hipótesis y Resultados Principales

Consideramos aquí el problema general de control óptimo de tipo Lagrange que se describe brevemente de esta manera: se trate de minimizar la funcional de costo

$$I[x, u] = \int_a^b f_0(t, x(t), u(t))dt$$

en el conjunto $\Omega$ de pares admisibles $\{(x, u)\}$, donde se demanda que $x = x(t)$ sea absolutamente contínua y que $u = u(t)$ sea medible, $a \leq t \leq b$, que $(t, x(t)) \in A$, un conjunto dado en $R^1 \times R^n$, $u(t) \in U(t, x(t))$ p.p. donde $U(t, x)$ es un conjunto dado en $R^m$ y $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ p.p. Sea $M = \{(t, x, u) \mid (t, x) \in A,\ u \in U(t, x)\}$ y supongamos entonces que las funciones $f{:}M \to R^n$ y $f_0{:}M \to R^1$ son contínuas. Pueden darse también condiciones en la frontera de la forma $(a, x(a); b, x(b)) \in B$, un conjunto dado en $R^{2n+2}$.

Supongamos que el conjunto $A$ está contenido en un cilindro $\{(t, x) \mid a \leq t \leq b, x \in R^n\}$ y que las hipótesis (a) y (b) de la seccion previa valen. Puesto que el conjunto $P$ es compacto se puede suponer que existe un numero $p \geq 0$ tal que $(t, x) \in P$ implica que $|x| \leq p$.

TEOREMA 1: *Supongamos que para* $(t, x, u) \in M$

$$f_0(t, x, u) \geq \Psi_1(h\,|f|) - \Psi_2(|x|)$$

*donde* $\Psi_1(z)$ *y* $\Psi_2(z)$ *son funciones, continuas y no decrecientes en* $0 \leq z \leq \infty$, $\Psi_1(z)$ *es convexa,* $h > b - a$ *es un numero dado y* $\Psi_1(z) - \Psi_2(z + p) \to \infty$ cuando $z \to \infty$. *Entonces para cualquier conjunto de pares admisibles* $\{(x, u)\}$ *tales que* $I[x, u] \leq L$, *para algún número L, las trayectorias correspondientes* $x = x(t)$ *son uniformemente acotadas.*

*Demostración.* Dado cualquier par admisible $(x(t), u(t))$, $a \leq t \leq b$, sea $x_{\min} = \min_{[a,\, b]} |x(t)| = |x(a^*)|$, $x_{\max} = \max_{[a,\, b]} |x(t)| = |x(b^*)|$ y supongamos que $a^* \leq b^*$. Por hipótesis obtenemos

$$\begin{aligned} I[x, u] &= \int_a^b f_0(t, x(t), u(t))dt \\ &\geq \int_a^b \Psi_1(h\,|f(t, x(t), u(t))|)dt - \int_a^b \Psi_2(x|x(t)|)dt. \end{aligned}$$

Para la primera integral usamos la desigualdad de Jensen y tomando en cuenta que $\Psi_1(z)$ es no decreciente y que $\dfrac{h}{b-a} > 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b \Psi_1(h\,|f(t, x(t), u(t))|)\, dt &\geq (b - a)\Psi_1\left(\frac{h}{b-a} \int_a^b |f(t, x(t), u(t))|\, dt\right) \\ &\geq (b - a)\Psi_1(|\textstyle\int_{a^*}^{b^*} \dot{x}(t)\, dt|) \geq (b - a)\Psi_1(x_{\max} - x_{\min}). \end{aligned}$$

En cuanto a la segunda integral

$$-\int_a^b \Psi_2(|x(t)|)\,dt \geq -(b-a)\Psi_2(x_{\max})$$
$$\geq -(b-a)\Psi_2(x_{\max}-x_{\min}+p)$$

y entonces

$$I[x,u] \geq (b-a)[\Psi_1(x_{\max}-x_{\min})-\Psi_2(x_{\max}-x_{\min}+p)]$$

y el lado derecho $\to \infty$ cuando $x_{\max}-x_{\min}\to\infty$. Pero cada trayectoria tiene por lo menos un punto que satisface $|x(t)| \leq p$ y entonces $I[x,u]\to\infty$ cuando $x_{\max}\to\infty$ lo cual implica la conclusión.

Un ejemplo en el que se cumplen las hipótesis previas es

$$f_0(t,x,u) \geq |f|^2 - (|x|^{1+\alpha}+1)$$

con $0<\alpha<1$, $h=1$ y entonces $b-a<1$, y aquí es $\Psi_1(z)=z^2$ y $\Psi_2(z)=z^{1+\alpha}+1$. Por ejemplo si $m=n=1$ entonces $f_0(t,x,u)=x^2+u^2$ y $f(t,x,u)=\sqrt{1+u^2}$ satisfacen las condiciones requeridas.

Teorema 2: *Supongamos que*

1) *Existe un número $N \geq 0$ tal que $f_0(t,x,u) \geq N$ para todo $(t,x,u)\in M$*
2) *Existe un numero positivo $\lambda$ y una funcion real y diferenciable $\Phi(x)$* tal que
   a) $|\Phi(x)|\to\infty$ *cuando* $x\to\infty$, *y*
   b) *si $(t,x)\in A$ con $|x|\geq\lambda$ entonces $f_0(t,x,u)\geq|\operatorname{grad}\Phi\cdot f|$ cuando $f(t,x,u)$ satisface $|\operatorname{grad}\Phi\cdot f|\geq 1$.*

*Entonces vale la conclusión del teorema previo.*

*Demostración.* Supongamos que todos los puntos $(t,x)$ en el conjunto compacto $P$ dado tambien satisfacen $|x|\leq\lambda$ y que $(x_0(t),u_0(t))$, $a\leq t\leq b$, es una pareja admisible tal que $|x_0(\bar t)|\geq\Lambda$ para algún número $\Lambda\geq\lambda$ donde $a\leq\bar t\leq b$. Se pueden encontrar dos números $a'$ y $b'$ en $[a,b]$ tal que $|x_0(a')|=\lambda$, $|x_0(b')|=\Lambda$ y $\lambda\leq|x_0(t)|\leq\Lambda$ por $a'\leq t\leq b'$ donde suponemos que $a'<b'$. Entonces

$$I[x_0,u_0)] \geq \int_{a'}^{b'} f_0(t,x_0(t),u_0(t))\,dt$$
$$\geq \int_{a'}^{b'} |\operatorname{grad}\Phi(x_0(t))\cdot f(t,x_0(t),u_0(t))|\,dt + (N-1)(b'-a')$$
$$\geq \left|\int_{a'}^{b'} \frac{d\Phi(x_0(t))}{dt}\,dt\right| + (N-1)(b'-a')$$
$$\geq |\Phi(\Lambda)-\Phi(\lambda)| - (|N|+1)(b-a)$$

donde $\Phi(\Lambda)$ es un valor de $\Phi$ tal que $|x|=\Lambda$, e igualmente para $\Phi(\lambda)$. Pero $\Phi(\lambda)$ es un numero fijo y como $|\Phi(\Lambda)|\to\infty$ cuando $\Lambda\to\infty$ entonces $\Lambda$ no puede exceder un número fijo para cualquier conjunto de pares admisibles, por lo cual $I[x,u]\leq L$; lo que se quería demostrar.

Un ejemplo simple que satisface la hipótesis del Teorema es

$$f_0 = |x|^{1+\alpha}+u^2, f=u, |u|\leq 1.$$

con $0<\alpha<1$, $m=n=1$, y entonces $N=0$, $\Phi(x)=x^{1+\alpha}$, y $\lambda=1+\alpha$.

## Observaciones y un Corolario

Una hipótesis mas fuerte que la 2) del Teorema 2 se obtiene substituyendo la función $\Phi$ por una función definida en $R^1+$ en vez de $R^n$ de esta manera

2′) *Existe un número positivo* $\lambda$ *y una función real diferenciable* $\Phi(z)$ *tal que*

a) $|\Phi(z)| \to \infty$ *cuando* $z \to \infty$, *y*

b) *Si* $(t, x) \in A$ con $|x| \geq \lambda$, *entonces*

$$f_0(t, x, u) \geq \frac{x \cdot f}{|x|} \Phi'(|x|)$$

*cuando* $f(t, x, u)$ *satisface* $x \cdot f \geq |x| \Phi'(|x|)^{-1}$.

*Per se*, esto no es interesante, pero nos dirige al siguiente resultado en control óptimo análogo a un resultado conocido de Cinquini.

Corolario. *La conclusión del Teorema 2 es válida si se substituye la siguiente hipótesis por la 2):*

$2_s$) *Existe un número positivo* $\lambda$ *y una función positiva y contínua* $\Psi(z)$, $\lambda \leq z < \infty$ *tal que* $\int_\lambda^\infty z\Psi(z)\,dz = +\infty$ *y tal que para* $|x| \geq \lambda$

$$f_0(t, x, u) \geq (x \cdot f)\Psi(|x|)$$

*cuando* $|x \cdot f| \geq \Psi(|x|)^{-1}$.

*Demostración.* Sea $\Phi(z)$ cualquier primitiva de $z\Psi(z)$. Entonces, para $|x| \geq \lambda$ se ve que

$$\int_{a'}^{b'} \frac{d\Phi(|x(t)|)}{dt}\,dt = \int_{a'}^{b'} \left(\frac{(x \cdot f)(t)}{|x(t)|}\right) |x(t)|\, \Psi(|x(t)|)\,dt$$
$$= \int_{|x(a')|}^{|x(b')|} z\Psi(z)\,dz,$$

y ahora se continúa como antes.

Como demostró Cinquini [3, p. 188], el siguiente ejemplo satisface la hipótesis del Corolario:

$$n = 2, m = 1: f_0(t, x_1, x_2, u) = \left(\frac{x_1^2 + u^2}{1 + x_1^2 + x_2^2}\right)^\mu, \qquad \mu > \frac{1}{2},$$

$f(t, x_1, x_2, u) = (x_2, u)$, y $\lambda = 1$, $\Psi(z) = 2^{2\mu}/z^2$.

Este trabajo fue parcialmente auspiciado por la beca NSF Grant No. GP-27973.

Universidad de California, Los Angeles.

### Referencias


[1] L. Cesari, *Existence theorems for optimal solutions in Pontryagin and Lagrange problems*, SIAM J. Control, **3** (1966), 475–98.

[2] ———, *Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints*, I., Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966), 369–412.

[3] S. Cinquini, *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di calcolo delle variazioni di ordine* n. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa(2), **5**(1936), 169–90.
[4] A. F. Filippov, *On certain questions in the theory of optimal control*, SIAM J. Control **1**(1962), 76–84.
[5] E. J. McShane, *Existence theorems for ordinary problems of the calculus of variations*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2), **3**(1934), 181–211, 287–315.
[6] ———, *Relaxed controls and variational problem*, SIAM J. Control **5**(1967), 438–85.
[7] L. Tonelli, Fondamenti di Calcolo delle Variazioni, (2 vols), Zanichelli, Bologna, Vol. **1**, 1921, Vol. **2**, 1923.