FUNCIONES ABIERTAS

POR A. GARCÍA-MÁYNEZ

1. Introducción

El estudio de las funciones continuas y abiertas en espacios topológicos constituye un capítulo de gran interés en la topología. Abordar concretamente este tema se justifica por muchas razones. Por ejemplo, las proyecciones de un producto de espacios topológicos en sus factores son abiertas; toda función $w = f(z)$ analítica en una región R del plano z en el plano w es *fuertemente abierta*, es decir, si V es un subconjunto abierto de R, $f(V)$ es un abierto en el plano w. Otro motivo que acrecienta el interés en este tópico, es un gran número de problemas importantes sin resolver. A la cabeza de la lista se encuentran los siguientes:

1.1 *Sea $f{:}X \Rightarrow Y$ una función continua, abierta y ligera, en donde X es una variedad euclideana de dimensión n y Y es un espacio métrico. ¿Es entonces cada punto inverso $f^{-1}(y)$ discreto?*

1.2 (Conjetura de Whyburn) *Supongamos que f es una función continua, abierta y ligera del n-cubo I^n sobre sí mismo tal que $f^{-1}f(Fr\, I^n) = Fr\, I^n$ y $f \mid Fr\, I^n$ es 1–1. Entonces f es un homeomorfismo.*

Para $n = 1, 2$ ambos problemas han sido resueltos afirmativamente (véase [7] y [8]). Para $n > 2$, se conocen respuestas solamente en casos muy especiales (véase [1], [2] y [3]).

En la sección 2 de este trabajo, se generalizan algunos de los resultados básicos en la materia usando exclusivamente herramientas de topología de conjuntos (teoremas 2.2 a 2.12), y en la sección 3 se ilustran algunas aplicaciones a espacios métricos. Es posible que estos resultados, junto con algunas proposiciones bien conocidas de los espacios euclideanos, lleven a una solución total de 1.1 y 1.2. Para una relación detallada de los avances en la materia referimos al lector a [5].

2. Teoremas generales

Empezaremos esta sección recordando algunas definiciones.

Sea A un subconjunto conexo de un espacio topológico X. A es un *continuo* o una *región* según que A sea compacto o abierto. A es un *semicontinuo* si para cada pareja de puntos p, $q \in A$, existe un continuo C tal que $\{p, q\} \subset C \subset A$. Una función $f{:}X \rightarrow Y$ es *abierta* si para cada abierto V en X, $f(V)$ es un abierto en Y. $f{:}X \rightarrow Y$ es *ligera* si para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo.

Todos los espacios considerados en este trabajo serán espacios de Hausdorff y todas las funciones serán continuas. El simbolismo $f{:}X \Rightarrow Y$ indica una función del espacio X sobre el espacio Y. Si A es un subconjunto de un espacio X, A^0 y A^- denotan, respectivamente, el interior y la cerradura de A en X.

El siguiente teorema es muy conocido y se usará con frecuencia. Su demostración puede hallarse, por ejemplo, en [4], 2.46.

TEOREMA 2.1. *Sea N un subconjunto cerrado de un espacio localmente compacto X. Si E es una componente de N con frontera compacta y U es un abierto en X que contiene a E, existe un abierto V en X tal que $Fr\ V$ es compacta; $N \cap Fr\ V = \Phi$ y $E \subset V \subset V^{-} \subset U$.*

TEOREMA 2.2. *Sea $C_1, C_2, \cdots$ una sucesión de conexos en un espacio X. Sea $C = \lim\inf C_n$ y $C^* = \lim\sup C_n$. Si V es un abierto en X con frontera compacta, entonces $C \cap V = \Phi$ o $V \supset C^*$ o $C^* \cap Fr\ V \neq \Phi$. En particular, si X es localmente compacto y C^* tiene una componente con frontera compacta, entonces C^* es conexo o $C = \Phi$.*

Demostración. Supongamos, contrariamente al teorema, que $C \cap V \neq \Phi$; $C^* \cap (X - V) \neq \Phi$ y $C^* \cap Fr\ V = \Phi$. De $C \cap V \neq \Phi$ se deduce que $C_n \cap V \neq \Phi$ para n suficientemente grande. Las dos últimas condiciones implican

$$C^* \cap (X - V^{-}) \neq \Phi$$

y, por tanto, $C_n \cap (X - V^{-}) \neq \Phi$ para n arbitrariamente grande. Como cada C_n es conexa, tenemos $C_n \cap Fr\ V \neq \Phi$ para n arbitrariamente grande. Por ser $Fr\ V$ compacta, concluimos que $C^* \cap Fr\ V \neq \Phi$, una contradicción. Para probar la última parte, sea L una componente de C^* con frontera compacta y supongamos que $L \neq C^*$. Según 2.1, existe un abierto V, con frontera compacta, tal que $L \subset V$; $C^* \cap (X - V) \neq \Phi$ y $C^* \cap Fr\ V = \Phi$. Usando la primera parte del teorema con V y $X - V^{-}$, deducimos que $C = \Phi$.

TEOREMA 2.3. *Sea $f: X \Rightarrow Y$ una función abierta del espacio localmente compacto X sobre el espacio Y. Si C es un continuo en Y y K es una componente compacta de $f^{-1}(C)$, entonces $f(K) = C$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que tenemos un punto y en $C - f(K)$. Por 2.1, existe un abierto U en X tal que:

i) $K \subset U \subset U^{-} \subset X - f^{-1}(y)$
ii) U^{-} es compacta
iii) $\mathrm{Fr}\ U \cap f^{-1}(C) = \Phi$.

Por tanto, $W = U \cap f^{-1}(C)$ es compacto y abierto en $f^{-1}(C)$. Como f es abierta y continua, $f(W)$ es compacto y abierto en C. Como Y es de Hausdorff, $f(W)$ es cerrado. Por tanto, por la conexidad de C tenemos $f(W) = C$, contradiciendo el hecho de que $y \in C - f(W)$.

2.3 puede generalizarse fácilmente a:

TEOREMA 2.4. *Sean f, X, Y como en 2.3. Si C es un semicontinuo en Y y K es una componente de $f^{-1}(C)$ con cerradura compacta, entonces $f(K) = C$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un punto $b \in C - f(K)$. Sea N un continuo en Y tal que $b \in N \subset C$ y $N \cap f(K) \neq \Phi$. Escojamos $z \in K$ tal que $f(z) \in N$. Si T es la componente de $f^{-1}(N)$ que contiene a z, entonces $f(T) = N$ (teorema 2.3). Pero $T \subset K$, de manera que $b \in N = f(T) \subset f(K)$, una contradicción.

Los dos teoremas que siguen limitan el número de componentes de la imagen inversa de un semicontinuo bajo una función continua y abierta.

TEOREMA 2.5. *Sean f, X, Y como en 2.3. Supongamos que existe un abierto denso V en Y tal que $f^{-1}(V)$ es localmente conexo. Si C es un semicontinuo en Y con interior no vacío; H es un subconjunto compacto de X, y $\mathcal{G}$ es la familia de componentes de $f^{-1}(C)$ contenidas en H, entonces $\mathcal{G}$ es finita.*

Demostración. Como $C^0 \neq \Phi$ y V es denso en Y, existe un punto $y \in Y$ y una región R en Y tales que $y \in R \subset V \cap C$ (por hipótesis V es también localmente conexo). Sea $K = H \cap f^{-1}(y)$. Como K es compacto y las componentes de $f^{-1}(R)$ forman una cubierta abierta de K, existen $L_1, L_2, \cdots, L_n$, componentes distintas de $f^{-1}(R)$, tales que:

$$\text{i) } K \subset L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n;$$

$$\text{ii) } K \cap L_i \neq \Phi, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Por otra parte, si L es una componente de $f^{-1}(R)$ contenida en H, necesariamente $L = L_i$ para alguna i, pues $f(L) = R$ (teorema 2.4). Por tanto, $\mathcal{G}$ es finita, pues cada elemento de $\mathcal{G}$ contiene una componente de $f^{-1}(R)$ y, por ende, contiene alguna L_i.

TEOREMA 2.6. *Sean f, X, Y como en 2.3. Supongamos que para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es discreto (es decir, carece de puntos de acumulación). Si C es un semicontinuo en Y, H es un subconjunto compacto de X y $\mathcal{G}$ es la familia de componentes de $f^{-1}(C)$ contenidas en H, entonces $\mathcal{G}$ es finita.*

Demostración. Fijemos $y \in C$ y definamos $K = H \cap f^{-1}(y)$. Por ser un subconjunto compacto de un conjunto discreto, K es finito. Por tanto, existen $L_1, L_2, \cdots, L_n$, componentes distintas de $f^{-1}(C)$, tales que

$$\text{i) } K \subset L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n;$$

$$\text{ii) } K \cap L_i \neq \Phi, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Como en 2.5 se deduce que si $L \in \mathcal{G}$, necesariamente $L = L_i$ para alguna i. Por tanto, $\mathcal{G}$ es finita.

El lema que sigue se usará en la demostración de 2.8.

LEMA 2.7. *Sea $f: X \Rightarrow Y$ una función continua del espacio localmente compacto y débilmente separable X sobre el espacio débilmente separable Y. Sea U un abierto en X, H un subconjunto compacto de U y $y \in Y$ un punto tal que toda componente* *de $f^{-1}(y)$ que intersecta a H es compacta y está contenida en U. Entonces existe un abierto W en Y tal que $y \in W$ y si $R \subset W$, toda componente de $f^{-1}(R)$ que intersecta a H está contenida en U.*

Demostración. Sea $W_1 \supset W_2 \supset \cdots$ una base local en y. Probaremos que para alguna n, $W = W_n$ satisface la propiedad descrita en el enunciado. Si no, para cada n existe $R_n \subset W_n$ y una componente C_n de $f^{-1}(R_n)$ tal que $C_n \cap H \neq \Phi \neq C_n \cap (X - U)$. Como H es compacto y X es débilmente separable, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $C = \lim\inf C_n$ intersecta a H. Para cada abierto V con cerradura compacta tal que $H \subset V \subset V^- \subset U$, se tiene $C_n \cap \operatorname{Fr} V \neq \Phi$, pues cada C_n es conexa y $C_n \cap V \neq \Phi \neq C_n \cap (X - V)$. Por tanto, $C^* = \lim\sup C_n$ es no degenerado. Sea A una componente de C^* que intersecte a H. Si C^* no es conexo, entonces A no es compacta (teorema 2.1) y, por hipótesis, $C^* - f^{-1}(y) \neq \Phi$. Si C^* es conexo, también $C^* - f^{-1}(y) \neq \Phi$, pues si $C^* \subset f^{-1}(y)$, existiría un abierto D con cerradura compacta tal que $C^* \subset D \subset D^- \subset U$ y, como antes, tendríamos $C^* \cap \operatorname{Fr} D \neq \Phi$, una contradicción. Por tanto, en cualquier caso, $C^* - f^{-1}(y) \neq \Phi$. Pero la continuidad de f implica que $f(C^*) \subset \lim\sup f(C_n) \subset \lim\sup R_n \subset \{y\}$ y $C^* \subset f^{-1}(y)$, una contradicción.

Podemos ahora demostrar los teoremas principales de esta sección.

TEOREMA 2.8. *Sea $f: X \Rightarrow Y$ una función abierta y ligera, en donde X y Y son localmente compactos y débilmente separables. Supongamos, también, que Y es localmente conexo y que existe un abierto denso V en Y tal que $f^{-1}(V)$ es localmente conexo. Entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sea $x \in X$ y U una vecindad arbitraria de x. Sean V_1, V_2 abiertos en X, con cerradura compacta, tales que $x \in V_1 \subset V_1^- \subset V_2 \subset V_2^- \subset U^0$. Por el teorema 2.7, existe un abierto W en Y tal que $y = f(x) \in W$ y si $R \subset W$, toda componente de $f^{-1}(R)$ que intersecte a V_1^- está contenida en V_2. Como Y es localmente conexo, podemos tomar R como una región tal que $y \in R \subset W$. Por 2.5, a lo más un número finito de componentes de $f^{-1}(R)$ están contenidas en V_2^-. Sean $C_1, C_2, \cdots, C_n$ las componentes de $f^{-1}(R)$ que intersectan a V_1^-, en donde $x \in C_1$, y sea T un abierto tal que $x \in T \subset V_1$ y $T \cap C_j = \Phi$ para $j = 2, 3, \cdots, n$. El abierto $T \cap f^{-1}(R)$ está entonces totalmente contenido en C_1. Por tanto, C_1 es una vecindad conexa de x contenida en U y X es localmente conexo.

COROLARIO 2.9. *Sea $f: X \Rightarrow Y$ una función abierta y ligera, en donde X y Y son localmente compactos, localmente conexos y débilmente separables. Sea A un subconjunto localmente compacto y localmente conexo de Y tal que $A \subset A^{0-}$. Entonces $f^{-1}(A)$ es localmente conexo.*

La misma demostración que en 2.8, pero usando 2.6 en lugar de 2.5, nos dá el siguiente teorema:

TEOREMA 2.10. *Sea $f: X \Rightarrow Y$ una función abierta, en donde X y Y son como en*

2.9. *Si para cada* $y \in Y, f^{-1}(y)$ *es discreto, entonces, si* $A \subset Y$ *es localmente compacto y localmente conexo,* $f^{-1}(A)$ *es localmente conexo.*

Los dos últimos teoremas de esta sección pueden aplicarse, con éxito, en el caso métrico.

TEOREMA 2.11. *Sea* $f:X \Rightarrow Y$ *una función abierta del espacio localmente compacto y localmente conexo* X *sobre el espacio* Y. *Sea* $K \subset X$ *un continuo abierto en* $f^{-1}f(K)$ *cuya imagen* $f(K)$ *es un* G_δ *en* Y. *Si* L *es una vecindad de* K, *existe una región* U *en* X *tal que*:
1) $K \subset U \subset U^- \subset L^0$
2) U^- es compacta
3) $K = U \cap f^{-1}f(K)$
4) $\operatorname{Fr} U \cap f^{-1}f(U) = \Phi$.

Demostración. Sean $W_1, W_2, \cdots$ abiertos en Y, con cerradura compacta, tales que

$$f(K) = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n ; \qquad W_{n+1}^- \subset W_n .$$

Sean $V_1, V_2, \cdots$ regiones en X, con cerradura compacta, tales que:
a) $K = V_n^- \cap f^{-1}f(K)$
b) $f(V_n) \subset W_n, n = 1, 2, \cdots$
c) $V_{n+1}^- \subset V_n, n = 0, 1, 2, \cdots$, en donde $V_0 = L^0$.

Sea C_n la componente de $f^{-1}f(V_n)$ que contiene a V_n y $C^* = \limsup C_n$. Por tanto, $f(K) \subset f(C^*) \subset \limsup f(C_n) \subset \limsup f(V_n) \subset \limsup W_n = f(K)$. De aquí se deduce que $f(C^*) = f(K)$. Por tanto, para alguna n, $C_n \cap \operatorname{Fr} V_1 = \Phi$ (pues de lo contrario, $C^* \cap \operatorname{Fr} V_1 \neq \Phi$ y $f(C^*) \neq f(K)$). Pero $C_n \cap \operatorname{Fr} V_1 = \Phi$ implica que $C_n \subset V_1$. Tomando $U = C_n$ tal que $U \subset V_1$, es claro que U satisface las propiedades 1) a 4).

TEOREMA 2.12. *Sea* $f:X \Rightarrow Y$ *una función abierta del espacio localmente compacto y localmente conexo* X *sobre el espacio* Y. *Sea* U *un abierto en* X *con cerradura compacta y* $K \subset U$ *un continuo tales que* $U \cap f^{-1}f(K) = K; f(U) \cap f(\operatorname{Fr} U) = \Phi$ *y en donde* $f(K)$ *es un subconjunto* G_δ *de* Y. *Entonces, si* W *es un abierto en* X *que contiene a* K, *existe una región* V *en* X *tal que*:
1) $K \subset V \subset W$
2) $V = U \cap f^{-1}f(V)$.

Demostración. De acuerdo con 2.11, existe una región V, con cerradura compacta, tal que $K \subset V \subset V^- \subset U \cap W$ y tal que V es componente de $f^{-1}f(V)$. Supongamos que la propiedad 2) del enunciado es falsa. Existe entonces un punto $x \in (U - V) \cap f^{-1}f(V)$. Si V_x es la componente de $f^{-1}f(V)$ que contiene a x, necesariamente $V_x \subset U$, pues por hipótesis $\operatorname{Fr} U \cap f^{-1}f(U) = \Phi$. Según 2.4, $f(V_x) = f(V)$, de manera que $f(V_x) \supset f(K)$. Por tanto $K \subset V_x$, pues $V_x \cap K = V_x \cap U \cap f^{-1}f(K) = V_x \cap f^{-1}f(K) \neq \Phi$. Esto contradice el hecho de que $V_x \cap V = \Phi$.

3. Aplicaciones métricas

El siguiente teorema aparece, sin demostrar, en [6]:

TEOREMA 3.1. *Sea $f: X \Rightarrow Y$ una función continua y ligera del espacio métrico y localmente compacto X sobre el espacio métrico Y. Si $H \subset X$ y $K \subset Y$ son compactos y $\epsilon > 0$ es arbitraria, existe $\delta > 0$ tal que para cada $R \subset Y$ que intersecte a K y de diámetro $< \delta$, toda componente de $f^{-1}(R)$ que intersecte a H tiene diámetro $< \epsilon$.*

Con la ayuda de 2.2, presentamos la siguiente demostración:

Supongamos el teorema falso. Existen entonces $R_1, R_2, \cdots$ en 2^Y y $C_1, C_2, \cdots$ en 2^X tales que:

1) C_n es componente de $f^{-1}(R_n)$
2) $R_n \cap K \neq \Phi$, $C_n \cap H \neq \Phi$
3) $\delta(R_n) < 1/n$, $\delta(C_n) \geq \epsilon$.

Como H y K son compactos, podemos suponer, sin perder generalidad, que $K \cap \liminf R_n \neq \Phi$ y $H \cap \liminf C_n \neq \Phi$. Por la condición 3), $R_1, R_2, \cdots$ converge a un punto $y \in K$. Sea $C^* = \limsup C_n$. Por la continuidad de f tenemos $f(C^*) \subset \limsup f(C_n) = \{y\}$. Como f es ligera, cualquier componente de C^* debe reducirse a un punto. Por tanto, por 2.2, C^* es conexo. Pero entonces C^* debe reducirse a un punto $x \in H$, contradiciendo el hecho de que $\delta(C^*) > 0$ (condición 3).

Con la ayuda de 3.1 y el material de la sección anterior, podemos demostrar los siguientes resultados (compárese con [6]):

TEOREMA 3.2. *Sea $f: X \Rightarrow Y$ abierta y ligera, en donde los espacios X, Y son son métricos, localmente compactos y localmente conexos. Si $N \subset Y$ tiene cerradura compacta, es localmente compacto, tiene la propiedad S y $N \subset N^{0-}$, entonces, para cada compacto H en X, la unión de componentes de $f^{-1}(N)$ contenidas en H tiene la propiedad S.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ arbitraria. Por 3.1, existe $\delta > 0$ tal que si $R \subset N^-$ tiene diámetro $< \delta$, entonces toda componente de $f^{-1}(R)$ contenida en H tiene diámetro $< \epsilon$. Como N tiene la propiedad S, existen regiones $N_1, N_2, \cdots, N_k$ en N, de diámetro $< \delta$, tales que $N = N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_k$. Por 2.5, la colección $\{N_{ij}\}$ de componentes de $f^{-1}(N_i)$ contenidas en H es finita. Por tanto, si Q es la unión de componentes de $f^{-1}(N)$ contenidas en H, cada componente de Q es unión de componentes N_{ij}. Como sólo hay una cantidad finita de N_{ij}'s y cada una de ellas tiene diámetro $< \epsilon$, Q tiene la propiedad S.

TEOREMA 3.3 *Sean f, X, Y como en 3.2 y sea K un continuo en Y. Entonces toda componente compacta H de $f^{-1}(K)$ tiene una vecindad compacta, conexa y localmente conexa N tal que $f \mid N$ es abierta.*

Demostración. Sea T una región en X, cerradura compacta, tal que $H \subset T$ y tal que $Fr \cap f^{-1}(K) = \Phi$. Como K es compacto, existen regiones $R_1 \supset R_2 \supset \cdots$ con la propiedad S tales que

$$K = \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k^-$$

Si N_k es la componente de $f^{-1}(R_k^-)$ que contiene a H, entonces, según 2.9, tanto $f^{-1}(R_k^-)$ como N_k son localmente conexos. Además, para k suficientemente grande, $N_k \cap Fr\ T = \Phi$, pues lim sup $N_k \subset f^{-1}(K)$ y $Fr\ T \cap f^{-1}(K) = \Phi$. Por tanto, para k suficientemente grande, $N_k \subset T$ y cualquier N_k con esta propiedad satisface todos los requisitos del enunciado.

TEOREMA 3.4. *Sean f, X, Y, H, K como en 3.3. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe una región Q tal que $H \subset Q \subset V_\epsilon(H)$ y con la propiedad $Fr\ Q \cap f^{-1}f(Q) = \Phi$.*

Demostración. Por 3.3, K tiene una vecindad compacta, conexa y localmente conexa N tal que $f \mid N$ es abierta. Además, N se construyó de tal forma que N es componente de $f^{-1}f(N)$ y puede elegirse de manera que $N \subset V_\epsilon(H)$. Finalmente, por 2.11, existe una región Q tal que $N \subset Q \subset V_\epsilon(H)$ y con $Fr\ Q \cap f^{-1}f(Q) = \Phi$.

TEOREMA 3.5. *Sea $f: I \Rightarrow Y$ una función abierta del intervalo cerrado $I = [0, 1]$ sobre un espacio no degenerado Y. Entonces Y es homeomorfo a I.*

Demostración. Por 5.26 y 5.16 de [4], bastará probar que Y tiene exactamente dos puntos que no lo cortan. Supongamos, por el contrario, que existen por lo menos tres puntos que no cortan a Y. Por tanto, para dos de ellos, digamos p, q, se tiene

$$0 \notin f^{-1}(p) \text{ y } 0 \notin f^{-1}(q).$$

Sea $\alpha = \inf f^{-1}(p)$ y $\beta = \inf f^{-1}(q)$ y supongamos que $\alpha < \beta$. $[0, \alpha)$ es entonces una componente de $I - f^{-1}(p) = f^{-1}(Y - \{p\})$. Por 2.4, $f([0, \alpha)) = Y - \{p\}$. Por tanto, existe $\delta \in [0, \alpha)$ tal que $f(\delta) = q$, contradiciendo el hecho de que $f^{-1}(q) \cap [0, \alpha) = \Phi$.

Finalizamos este trabajo con el siguiente teorema:

TEOREMA 3.6. *Sean f, I, Y como en 3.5. Si f es ligera, entonces, para cada $y \in Y$,* $f^{-1}(y)$ es finito.

Demostración. Supongamos, contrariamente al teorema, que existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ es infinito. Por. 3.5, existe un homeomorfismo $h: Y \Rightarrow I$. Si $g = h \circ f$, entonces g es una función abierta y ligera de I sobre I y $g^{-1}(z)$ es infinito, en donde $z = h(y)$. Pero por 2.5, $g^{-1}(z)$ debe ser finito, pues $I - g^{-1}(z) = g^{-1}(I - \{z\})$ tiene solamente un número finito de componentes. Esta contradicción demuestra el teorema.

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL IPN, MÉXICO.

REFERENCIAS

[1] P. T. CHURCH & E. HEMMINGSEN, *Light open maps on n-manifolds*, Duke Math. J. **27** (1960), 527–36.

[2] ———, *Light open maps on n-manifolds* II, Duke Math. J. **28** (1961), 607–24.
[3] ———, *Light open maps on n-manifolds* III, Duke Math. J. **30** (1963), 379–90.
[4] A. García-Máynez, *Introducción a la Topología de Conjuntos*, Trillas, México, 1971.
[5] L. F. McAuley, *Open mappings and open problems*, Topology Conference, Arizona State Univ. (1967), 184–202.
[6] G. T. Whyburn, *Open mappings on locally compact spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., **1** (1950).
[7] ———, *An open mapping approach to Hurwitz's theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., **71** (1951), 113–19.
[8] ———, *Open mappings on 2-dimensional manifolds*, J. Math. Mech. **10** (1961), 181–98.