INVARIANTS D'UN FEUILLETAGE ET CHAMPS DE VECTEURS FEUILLETÉS

PAR ALBERTO MEDINA

On étudie ici certaines relations entre les invariants du fibré transverse à un feuilletage et les champs de vecteurs qui invarient le feuilletage. En particulier on généralise un résultat présenté en [5].

La différentiabilité est entendue au sens C^∞. V sera une variété différentiable compacte de dimension n, munie d'un feuilletage différentiable $\mathfrak{F}$ de codimension p. Soient Q le fibré vectoriel quotient du fibré tangent $T(V)$ par le sous-fibré tangent aux feuilles et $(E, V, p_T, GL(p, \mathbf{R}))$ le fibré principal des repères de Q. E est muni d'un feuilletage $\mathfrak{F}_E$ relevé de $\mathfrak{F}$, invariant à droite. Une connexion infinitésimale sur le fibré feuilleté E sera basique (ou transverse) si les feuilles du feuilletage relevé sont horizontales pour la connexion.

Un automorphisme infinitésimal de $(V, \mathfrak{F})$, ou champ de vecteurs feuilleté sera un champ de vecteurs X différentiable sur V, dont les groupes locaux à un paramètre invarient le feuilletage. Un tel champ de vecteurs se relève dans E en un champ de vecteurs invariant à droite X_E. X est dit transversalement singulier en un point de V s'il est tangent en ce point à la feuille correspondante. Il est clair que l'ensemble $S(X)$ des points transversalement singuliers d'un champ de vecteurs feuilleté est un compact réunion de feuilles de $\mathfrak{F}$.

Soit X un champ de vecteurs feuilleté sans singularités transverses. En chaque point $z \in E$ l'espace h_z tangent au feuilletage relevé $\mathfrak{F}_E$ et le vecteur $X_E(z)$ engendrent un sous-espace de dimension $q + 1$ où $q = n - p$. De plus, la distribution ainsi définie est complètement intégrable et détermine dans E un feuilletage invariant à droite $\mathfrak{F}_E^1$ de dimension de feuilles $q + 1$. On peut toujours construire une connexion basique sur E pour laquelle les feuilles de $\mathfrak{F}_E^1$ soient horizontales. Dans ces conditions la courbure Ω de cette connexion s'annulera sur les feuilles de $\mathfrak{F}_E^1$. On en déduit immédiatement que $\varphi(\Omega) = 0$ pour tout polynôme invariant φ de degré supérieur à $p - 1$ et nous avons:

PROPOSITION 1: *Si $(V, \mathfrak{F})$ admet un automorphisme infinitésimal sans singularités transverses, alors*

$$Pont^{(i)}(Q) = 0 \quad pour \quad i > 2(p-1)$$

Considérons maintenant le cas où $S(X)$ n'est pas vide. On s'intéressera plus particulièrement au cas où $S(X)$ est réunion de feuilles isolées, c'est-à-dire où les singularités transverses sont transversalement isolées. Dans ces conditions $S(X)$ sera réunion d'un nombre fini de feuilles compactes $F_0(X), F_1(X), \cdots, F_r(X)$ qui seront dites feuilles singulières pour X. Il s'agit de démontrer:

THÉORÈME 1: *Si les feuilles singulières $F_0(X), F_1(X), \cdots, F_r(X)$ sont à holonomie finie, alors:*

$$Pont^{(i)}(Q) = 0 \quad pour \quad i > 2(p-1)$$

Pour la démonstration on va exploiter l'idée présentée en [5]. A ce propos, considérons sur le fibré E au dessus du complémentaire des feuilles singulières une connexion basique ω pour laquelle le champ de vecteurs X_E est horizontal. On essaie de construire autour de chaque feuille singulière $F_i(X)$ une connexion ω_i transverse projetable dans le sens de Molino (voir [3]) et des intégrales premières f_i qui permettent de recoller toutes ces connexions en une connexion globale. Pour ceci, considérons pour chaque feuille singulière $F_i(X)$ un voisinage tubulaire ouvert U_i réunion de feuilles compactes et tel que chaque fibre est transverse à $\mathfrak{F}$. Si

$$\Phi_i: \Pi_1(F_i(X), x) \to G^0$$

est une représentation d'holonomie et G_i dénote le groupe d'holonomie correspondant, on peut réaliser G_i comme étant un groupe fini de difféomorphismes de la fibre en x, notée W^i qui laissent invariant le point x. Ceci dit, prenons une fonction différentiable F^i,

$$F^i: W^i \to \mathbf{R}$$

invariante par G_i, valant 1 sur un compact qui contient x et de valeurs comprises entre 0 et 1. Si on définit,

$$f_i: U_i \to \mathbf{R}$$

par

$$f_i(u) = F^i(y)$$

où $y \in F_u \cap W^i$, F_u étant la feuille qui passe par u, on obtient une intégrale première différentiable sur U_i comprise entre 0 et 1 et qui vaut 1 autour d'un voisinage compact de $F_i(X)$.

D'autre part, munissons W^i d'une métrique de Riemann invariante par G_i. A partir de cette métrique et compte tenu du fait que le fibré tangent à chaque fibre du voisinage tubulaire, s'identifie à la restriction de Q à cette fibre on peut construire par glissement à l'aide de l'holonomie, une métrique sur $Q\,|_{U_i}$ invariante le long des feuilles. Il existe donc une métrique g_i sur U_i transverse projetable dans le sens de Reinhart ([4]). Soit ω_i la connexion transverse projetable à torsion nulle déduite de g_i. Alors la forme: $\tilde{\omega} = [1 - (f_1 o p_T) - (f_2 o p_T) - \cdots - (f_r o p_T)]\omega + (f_1 o p_T)\omega_1 + \cdots + (f_r o p_T)\omega_r$ définit une connexion globale sur E et on peut vérifier aisément que sa courbure $\tilde{\Omega}$ s'annule encore sur les feuilles de $\mathfrak{F}_E^{\,1}$ au dessus du complémentaire des feuilles singulières. Donc pour tout polynôme φ de degré supérieur à $p - 1$, $\varphi(\tilde{\Omega}) = 0$ au dessus du complémentaire des feuilles singulières. La démonstration s'achève en remarquant que pour un feuilletage à connexion transverse projetable $\varphi(\Omega) = 0$ pour tout polynôme de degré supérieur à $[p/2]$ où Ω est la forme de courbure d'une connexion transverse projetable ([3]).

Dans le cas où V est une variété orientable de dimension $4k$ et $\mathfrak{F}$ est de codimension $2k$ nous obtenons en particulier:

THÉORÈME 2: *Si les feuilles singulières sont à holonomie finie, les nombres caractéristiques du fibré transverse sont nuls* (*voir* [5]).

Par ailleurs, si on remarque qu'en fait, le Théorème 1 montre la nullité des formes différentielles qui représentent les classes de Pontrjagin en dimension supérieure à $2(p-1)$, pour tout triplet α, β, γ d'éléments de Pont (Q) tels que:

$$\text{degré}\ \alpha + \text{degré}\ \beta > 2(p-1)$$

$$\text{degré}\ \beta + \text{degré}\ \gamma > 2(p-1)$$

le produit triple de Massey est défini (voir [2]) et dans ce cas on *a*:

THÉORÈME 3: *Si les feuilles singulières sont à holonomie finie, alors*

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle = 0$$

Soulignons finalement que du point de vue des classes de Bott et Haefliger ([2]), l'existence d'un automorphisme infinitésimal de la structure feuilletée détermine aussi la nullité de certaines de ces classes. En effet, si λ^* est l'homomorphisme exotique et $T: WO_p \to WO_{p-1}$ est l'application naturelle, de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} H^*(W\,O_p) \arrow[d, "T^*"] \arrow[dr, "\lambda^*"] & \\ H^*(W\,O_{p-1}) \arrow[r] & H^*(M; R) \end{tikzcd}$$

on suit:

PROPOSITION 2: *Si les feuilles singulières sont à holonomie finie, les classes exotiques $\lambda^*(\alpha)$ sont nulles pour toute α dans le noyau de T^*.*

Remarque: Les feuilletages transverses aux fibres d'un fibré compact à groupe structural fini fournissent des exemples de la situation étudiée ici (voir [1]).

UNIVERSITÉ DES SCIENCES, MONTPELLIER

RÉFÉRENCES

[1] A. HAEFLIGER, *Variétés feuilletées*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **16** (1962) 367–97.

[2] R. BOTT, *Lectures on characteristic classes and foliations*. Lecture Notes in Mathematics, **279** Springer Verlag, 1972.

[3] P. MOLINO, *Feuilletages et classes caractéristiques*. Sym. Math. Vol. X, Bologne (1972).

[4] B. REINHART, *Foliated manifolds with bundle-like metrics*. Ann. of Math .**69** (1959), 119–31.

[5] A. MEDINA. *Nombres caractéristiques du fibré transverse à un feuilletage et champs de vecteurs feuilletés*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. T. **276** (1973) 863–65.