QUELQUES PROPRIETES DES FEUILLETAGES POLYNOMIAUX DU PLAN

PAR MARIE-PAULE MULLER

1. Introduction

Nous nous proposons d'exposer quelques résultats concernant l'espace des feuilles et les intégrales premières des feuilletages polynômiaux du plan et des Γ-structures analytiques de la sphère S^m.

On dira qu'un feuilletage du plan est polynômial de degré n s'il peut être défini par une équation de Pfaff sans zéros $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, où P et Q sont des polynômes tels que $P^2 + Q^2$ soit de degré $2n$. Nous allons montrer qu'un tel feuilletage a au plus $2n$ feuilles de branchement, établissant ainsi une majoration plus fine que celle obtenue par L. Markus dans [5].

Les principaux résultats connus sur les intégrales premières des feuilletages du plan sont le théorème de Kaplan [4], qui établit l'existence d'une intégrale première continue globale, et le théorème de Kamke [3], qui assure l'existence, sur tout ouvert relativement compact, d'une intégrale première de même classe de différentiabilité que le feuilletage. D'autre part, nous avons donné un exemple d'un feuilletage analytique du plan sans intégrales premières faibles de classe C^1 [6]. Nous montrerons ici que tout feuilletage polynômial du plan admet une intégrale première faible globale de classe C^∞, et qu'en général il n'a pas d'intégrales premières faibles analytiques, même sur des ouverts relativement compacts. De la même manière, on montre que les Γ-structures analytiques sur la sphère n'ont en général pas d'intégrales premières faibles analytiques, bien qu'elles aient des intégrales premières de classe C^∞ d'après un théorème bien connu de A. Haefliger.

2. Feuilles de branchement des feuilletages polynômiaux du plan

Définitions. Soit $\mathfrak{F}$ un feuilletage du plan. Une *intégrale première faible* de $\mathfrak{F}$ est une fonction définie sur le plan, constante sur chaque feuille et sans extrêma locaux. Une *intégrale première* de $\mathfrak{F}$ est une intégrale première faible de rang non nul en tout point où elle est différentiable.

On dira que deux feuilles de $\mathfrak{F}$ sont *non séparées* si les points correspondants dans l'espace des feuilles sont non séparés. Une *feuille de branchement* est une feuille non séparée d'une autre feuille.

Un *carrefour* est un ensemble non vide, C, de feuilles de branchement, vérifiant les propriétés suivantes:

1) Si $F \in C$ et si F et F' sont non séparées, alors $F' \in C$.
2) Toute partie non vide de C et vérifiant 1) est égale à C.

Soient F, F_1 et F_2 trois feuilles de $\mathfrak{F}$. On dira que F sépare F_1 et F_2 si chacune des deux composantes connexes de $\boldsymbol{R}^2 - F$ contient l'une des feuilles F_j $(j = 1, 2)$ (Cette définition a un sens d'après le théorème de Poincaré-Bendixson).

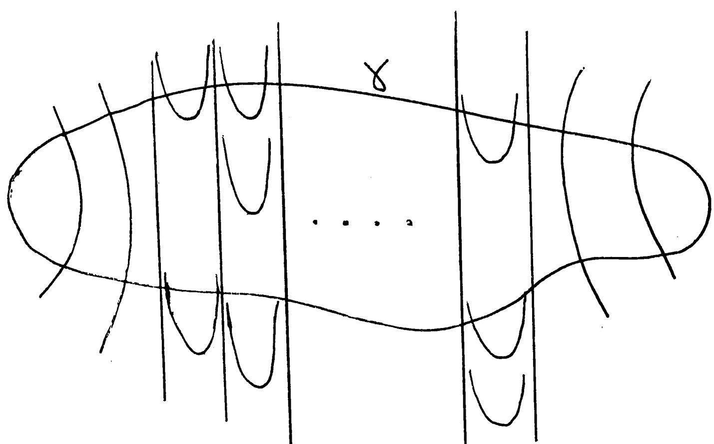
On suppose maintenant que le feuilletage est différentiable. Les deux lemmes suivants établissent des minorations du nombre de points d'un lacet où celui-ci est tangent au feuilletage.

LEMME 1. *Soit C un carrefour de $\mathfrak{F}$. Soient $F_1, \cdots, F_p$, p feuilles de C coupées par un lacet différentiable γ. Alors il y a sur γ au moins $2p$ points où γ est tangent au feuilletage.*

Démonstration. Soit q le nombre de feuilles parmi $F_1, \cdots, F_p$ qui ne sont pas transverses à γ. Les feuilles transverses à γ coupent γ en deux points au moins, les autres le coupent en un point au moins. Le nombre de points d'intersection de $F_1 \cup \cdots \cup F_p$ avec γ est donc supérieur ou égal à $q + 2\ (p - q)$, et ces points déterminent autant d'intervalles sur γ. Soit $[a, b]$ un tel intervalle, et supposons que γ est transverse à $\mathfrak{F}$ sur tout $]a, b[$. Alors, quelle que soit la feuille F coupant $]a, b[$, a et b sont dans deux composantes connexes distinctes de $\boldsymbol{R}^2 - F$. Comme toute feuille de la composante contenant a est séparée de toute feuille de la composante contenant b, F partage C en deux carrefours strictement contenus dans C, ce qui est impossible. Il y a donc dans chaque intervalle ouvert défini par $(F_1 \cup \cdots \cup F_p) \cap \gamma$ au moins un point où γ est tangent à $\mathfrak{F}$. Les q feuilles non transverses à γ fournissent d'autre part q points supplémentaires.

On peut remarquer que $2p$ est la meilleure minoration possible, comme le montre le feuilletage à un seul carrefour de p feuilles d'équation:

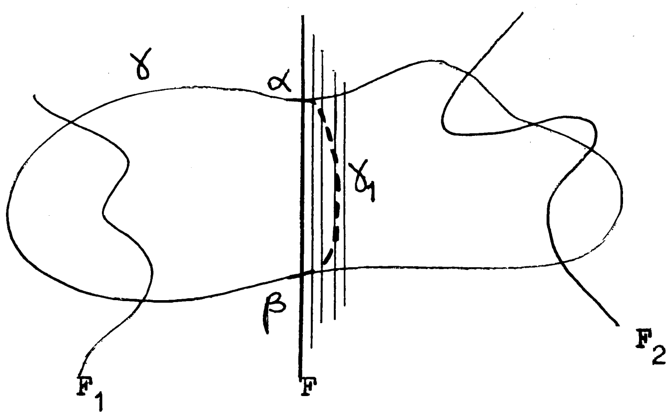
$$(x - \tfrac{3}{2}) \cdots (x - p + \tfrac{1}{2})dx + (x - 1) \cdots (x - p)dy = 0$$



LEMME 2. *Soient $F_1, \cdots, F_p$, p feuilles de branchement telles que pour tout i, il exists $j \neq i$ tel que F_i et F_j soient non séparées. Sur tout lacet différentiable γ sans points doubles et coupant $F_1, \cdots, F_p$, il y a au moins $p + 2$ points si p est pair, et $p + 3$ points si p est impair, où γ est tangent au feuilletage.*

Démonstration: par récurrence sur p. Supposons que $F_1, \cdots, F_p$ n'appartiennent pas au même carrefour (dans le cas contraire, on est ramené au lemme précédent, qui permet de conclure). On peut donc supposer que F_1 et F_2 appartiennent à deux carrefours distincts C_1 et C_2. Il existe alors une feuille F n' appartenant pas à $\{F_1, \cdots, F_p\}$ qui sépare F_1 et F_2: en effet, toute feuille $F_i \in C_1$ est séparée de toute feuille $F_j \notin C_1$. Pour toute $F_i \in C_1$, il existe donc un voisinage ouvert saturé ne contenant aucune feuille $F_j \notin C_1$ dans son adhérence. La réunion de ces voisinages ouverts est un ouvert saturé dont la frontière ne contient aucune feuille F_j $(j = 1, \cdots, p)$. Cet ouvert contient F_1 et ne contient pas F_2. L'une des feuilles de la frontière sépare donc F_1 et F_2.

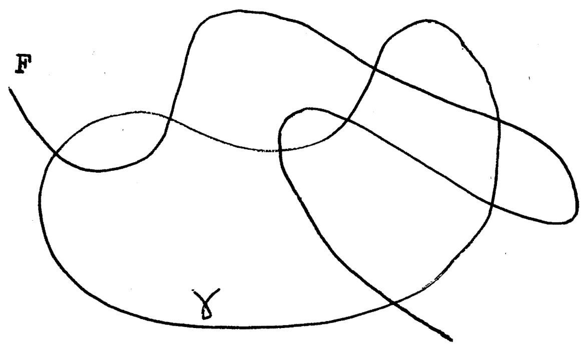
1) Supposons d'abord que F ne coupe γ qu'en deux points α et β. Nous allons construire deux lacets γ_1, γ_2 à l'aide de F et de γ: γ_1 est égal à γ le long de l'arc $[\alpha, \beta]$ qui coupe F_1, et γ_1 longe F dans la composante connexe de $\boldsymbol{R}^2 - F$ qui contient F_2:



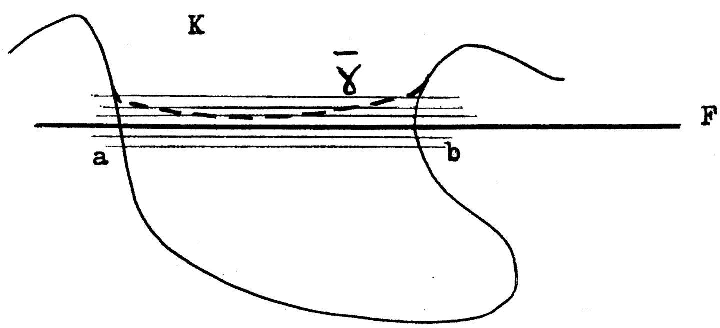
Sur sa partie distincte de γ, γ_1 est tangent à $\mathfrak{F}$ en un seul point. On construit γ_2 de la même manière (γ_2 est égal à γ sur l'arc $[\alpha, \beta]$ coupant F_2).

Soit q le nombre de feuilles de $F_1, \cdots, F_p$ qui sont dans la même composante connexe de $\boldsymbol{R}^2 - F$ que F_1. Si p est pair, par récurrence, γ_1 (resp. γ_2) est tangent à $\mathfrak{F}$ en au moins $q + 2$ points (resp. $p - q + 2$ points), donc en au moins $q + 1$ (resp. $p - q + 1$) points sur sa partie commune avec γ. Si p est impair, on peut supposer que q est impair (et $p - q$ pair). Alors γ_1 (resp. γ_2) est tangent à $\mathfrak{F}$ en au moins $q + 3 - 1$ (resp. $p - q + 2 - 1$) points sur sa partie commune avec γ. D'où le résultat.

2) Si F coupe γ en plus de deux points, nous allons modifier le lacet γ, afin d'obtenir un lacet $\bar{\gamma}$ qui ne coupe F qu'en deux points, tout en contrôlant les points où $\bar{\gamma}$ est tangent à $\mathfrak{F}$. $\boldsymbol{R}^2 - (F \cup \gamma)$ contient deux composantes connexes non bornées: soit K l'adhérence de leur réunion.



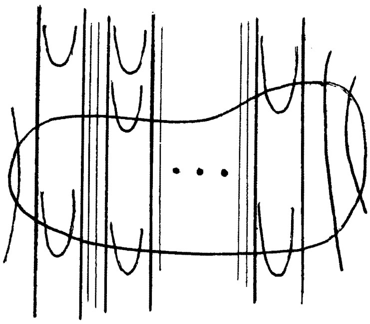
Si $F \cap \gamma$ contient une infinité de points, γ est tangent en une infinité de points à $\mathfrak{F}$ et la démonstration est achevée. Supposons donc que les points de $F \cap \gamma$ sont en nombre fini. La frontière de K est alors un lacet, différentiable par morceaux, formé d'un nombre fini d'arcs de F et d'arcs de γ, leurs extrémités sont les points de $F \cap \gamma$ situés sur la frontière de K. Le long de chaque arc $[a, b]$ composant la frontière de K et faisant partie de F, on modifie γ de la manière suivante:



Entre a et b, il y a sur γ au moins un point où γ est tangent à $\mathfrak{F}$. Or, $\bar{\gamma}$ est construit de manière à n'être tangent qu'en un seul point à $\mathfrak{F}$ sur la partie modifiée. On supprime de la même manière les points où γ est tangent à F (cas où a et b sont confondus). Le lacet $\bar{\gamma}$ ainsi obtenu est tangent à $\mathfrak{F}$ en autant ou moins de points que γ, il ne coupe F qu'en deux points, et il coupe encore $F_1, \cdots, F_p$; on est ainsi ramené au point 1).

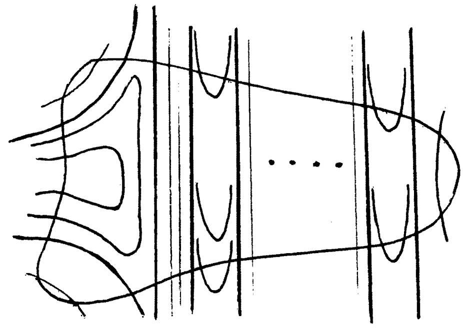
Si $p = 2$ ou $p = 3$, les p feuilles appartiennent à un même carrefour, et le lemme 1 assure l'existence de quatre points si $p = 2$, de six points si $p = 3$, où γ est tangent au feuilletage.

On peut remarquer que cette minoration est la meilleure possible, comme le montrent les exemples suivants:



Si p est pair

($\frac{p}{2}$ carrefours de deux feuilles)



Si p est impair

($\frac{p-1}{2}$ carrefours, dont l'un a trois feuilles)

THEOREME. *Tout feuilletage polynômial de degré n du plan a au plus 2n feuilles de branchement. Chaque carrefour a au plus n + 1 feuilles, et il y a au plus n carrefours.*

Démonstration: soit S_r le cercle $x^2 + y^2 = r^2$. S_r est tangent au feuilletage aux points $(x, y) \in S_r$ vérifiant:

$$(Pdx + Qdy) \wedge (xdx + ydy) = 0$$

c'est-à-dire:

$$yP(x, y) - xQ(x, y) = 0.$$

Comme L. Markus le fait remarquer dans [5], le nombre de racines du polynôme de degré $n + 1$, $yp - xQ$, situées sur la courbe algébrique de degré 2 S_r, est inférieur ou égal à $2(n + 1)$. Les deux lemmes précédents nous donnent les majorations du nombre de feuilles par carrefour et du nombre de feuilles de branchement. La majoration du nombre de carrefours est alors évidente.

3. Intégrales premières faibles des feuilletages polynômiaux du plan

PROPOSITION. *Soit $\mathfrak{F}$ un feuilletage du plan, de classe C^r ($r = 1, 2, \cdots, \infty$), n'ayant qu'un nombre fini de feuilles de branchement. Alors $\mathfrak{F}$ a une intégrale première faible de classe C^r.*

Démonstration: soient E l'espace des feuilles de $\mathfrak{F}$ et $C_1, \cdots, C_p$ les carrefours du feuilletage. D'après [2], E est une variété, non séparée en général, de dimension un, simplement connexe. Comme le nombre de points de branchement est fini, il existe un recouvrement fini de E par des ouverts connexes V_i ($i = 1, \cdots, p$) tels que V_i contienne tous les points de C_i et ne contienne aucun point de C_j si $j \neq i$. On choisit une orientation de E. Il suffit de montrer qu'il existe sur chacun des ouverts V_i une fonction f_i strictement croissante et de classe C^r: comme E est simplement connexe, on peut alors trouver des constantes λ_i $(i = 1, \cdots, p)$ et une partition de l'unité subordonnée au recouvrement, telles que la fonction de classe C^r, construite à l'aide des $f_i + \lambda_i$ et de la partition de l'unité, soit strictement croissante sur E.

Soit $V \in \{V_1, \cdots, V_p\}$ l'un des ouverts considérés. Si V contient q points de branchement, la structure C^r sur V peut être décrite à l'aide de q cartes $(U_i, \varphi_i)_{i=1,\dots,q}$ telles que φ_i soit croissante pour tout i, et si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ $(i \neq j)$, le changement de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ soit une bijection strictement croissante, de classe C^r, de $]-\infty, 0[$ sur lui-même ou bien de $]0, +\infty[$ sur lui-même.

Soit $\theta: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ une bijection, strictement croissante, de classe C^r, et r-plate en 0, telle que, quels que soient i, j:

$$| \theta(x) | \leq | \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x) | \text{ pour tout } x \in \varphi_i(\mathsf{U}_i \cap U_j).$$

Nous allons définir une fonction $H: V \to \boldsymbol{R}$, strictement croissante, de classe C^r, de la manière suivante: si $x \in U_1$, soit $H(x) = \theta \circ \theta \circ \varphi_1(x)$. Soit $i \neq 1$ tel que $U_i \cap U_1 \neq \emptyset$. L'expression locale de H dans la carte (U_i, φ_i) est définie sur $\varphi_i(U_i \cap U_1)$ et égale à $\theta \circ \theta \circ \varphi_1 \circ \varphi_i^{-1}$. Or, pour tout $x \in \varphi_i(U_i \cap U_1)$:

$$| \theta \circ \theta \circ \varphi_1 \circ \varphi_i^{-1}(x) | \leq | \theta \circ (\varphi_i \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_1 \circ \varphi_i^{-1}(x) | = | \theta(x) |$$

Donc cette expression locale est r-plate en 0. En la prolongeant sur $\varphi_i(U_i - U_1)$ par $\theta \circ \theta$, on obtient ainsi une fonction strictement croissante, de classe C^r, sur $\boldsymbol{R}$, permettant de définir H sur U_i par:

$$H \circ \varphi_i^{-1}(x) = \begin{cases} \theta \circ \theta \circ \varphi_1 \circ \varphi_i^{-1}(x) & \text{si } x \in \varphi_i(U_i \cap U_1) \\ \theta \circ \theta(x) & \text{si } x \in \varphi_i(U_i - U_1) \end{cases}$$

Ceci définit bien H sur la réunion des U_i tels que $U_i \cap U_1 \neq \emptyset$, car les ensembles $U_i - U_1$ (où i est tel que $U_i \cap U_1 \neq \emptyset$) sont deux à deux disjoints. Cette fonction prolongée est encore strictement croissante et de classe C^r. Il suffit maintenant d'itérer ce procédé: après un nombre fini de prolongements, on obtient une fonction ayant les propriétés voulues et définie sur tout E.

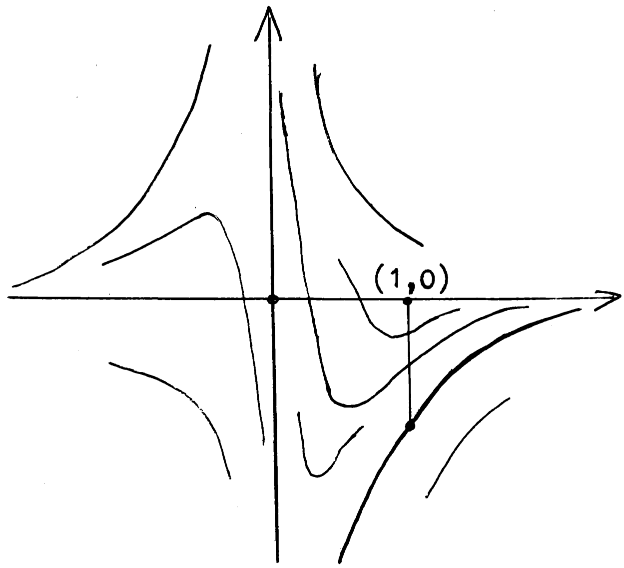
COROLLAIRE. *Tout feuilletage polynômial du plan a une intégrale première faible de classe C^∞.*

C'est une conséquence directe du théorème et de la proposition précédente.

Remarque. L'exemple suivant montre qu' en général, les feuilletages polynômiaux n'ont pas d'intégrales premières faibles analytiques, même sur les ouverts relativement compacts. L'équation de Pfaff:

$$[2(xy + 1) + x^3 y]\, dx + x^4 dy = 0$$

définit un feuilletage polynômial dont les feuilles sont les composantes connexes des courbes de niveau de la fonction $(x, y) \to (xy + 1)e^{-1/x^2}$. Elles se presentent de la manière suivante:



Les feuilles $xy + 1 = 0$ $(x > 0)$ et $x = 0$ ne sont pas séparées, et les autres feuilles "approchent beaucoup plus vite" la première que la deuxième: si f est une intégrale première faible du feuilletage induit sur un disque centré en $(1, 0)$ et de rayon supérieur à un, comme les points $(x, 0)$ et $(1, \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-(1/x^2)} - 1)$ appartiennent à la même feuille pour $x > 0$, il faut donc que:

$$f(x, 0) = f(1, \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-(1/x^2)} - 1)$$

pour tout $x \leq 1$ voisin de 1. Si f est analytique, par prolongement analytique, la restriction de $f - f(0)$ à l'axe des x doit donc être infiniment plate en 0, donc f est constante.

4. Γ-structures analytiques sur la sphère

Une Γ-structure est un feuilletage "avec singularités" dans le sens que donne A. Haefliger dans [1].

Il est bien connu que les Γ-structures (de codimension un) de classe C^∞ sur la sphère S^m $(m \geq 2)$ n'ont en général pas d'intégrales premières, alors que les Γ-structures (de codimension un) analytiques sur S^m ont des intégrales premières de classes C^∞. L'exemple suivant montre qu'en général, ces dernières n'ont pas d'intégrales premières faibles analytiques.

Soit $S^m \subset \boldsymbol{R}^{m+1}$ d'équation $x^2 + y^2 + z_1^2 + \cdots + z_{m-1}^2 = 1$. Soient $i: S^m \to \boldsymbol{R}^{m+1}$ l'inclusion et $p: \boldsymbol{R}^{m+1} \to \boldsymbol{R}^2$ la projection $p(x, y, \cdots, z_{m-1}) = (x, y)$. La forme $\omega = (y - 1)dx - (x - 1)^2 dy$ définit un feuilletage analytique du plan privé du point $(1, 1)$. La forme $\Omega = (p \circ i)^* \omega$ définit une Γ-structure analytique sur S^m. Les points singuliers de Ω sont les solutions sur S^m de:

$$p^*\omega \wedge (xdx + ydy + z_1 dz_1 + \cdots + z_{m-1} dz_{m-1}) = 0$$

ce qui équivaut sur la sphère à:

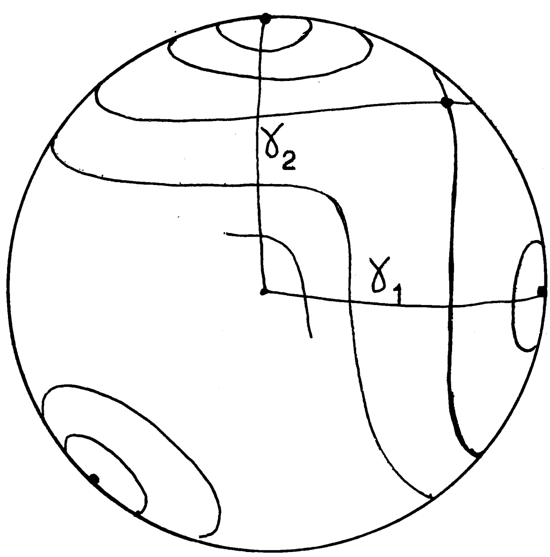
$$\begin{cases} z_1 = \cdots = z_{m-1} = 0 \\ x(x-1)^2 + y(y-1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Sur S^m, (1) implique:

$$x(x-1)(x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 2x - 2) = 0$$

Ce polynôme a quatre racines sur $[-1, 1]$: 0, 1, x_0, x_1, avec $-1 < x_0 < 0 < x_1 < 1$, et Ω s'annule donc en quatre points: on vérifie facilement que $(1, 0, \cdots, 0)$, $(0, 1, \cdots, 0)$, et $(x_0, y_0, 0, \cdots, 0)$ sont des centres non dégénérés, alors que $(x_1, y_1, 0, \cdots, 0)$ est un col non dégénéré.

Considérons sur S^m deux chemins analytiques γ_1 et γ_2, de même origine, et tels que γ_1 passe par $(1, 0, \cdots, 0)$ et γ_2 par $(0, 1, 0, \cdots, 0)$. On étudie la fonction qui, a un point de γ_1, associe le point de γ_2 situé sur la même feuille.



$$\gamma_j : [-1, \epsilon[\to S^m \ (j = 1, 2; \epsilon > 0)$$

$$\gamma_i(t) = (\sqrt{1 - t^2}, 0, t, 0, \cdots, 0)$$

$$\gamma_2(t) = (0, \sqrt{1 - t^2}, t, 0, \cdots, 0)$$

La fonction $F(x, y, z_1, \cdots, z_{m-1}) = (y-1)e^{1/x-1}$ est C^∞ sur S^m, constante sur les feuilles de la Γ-structure, et $F\circ\gamma_j$ est monotone sur $[-1, 0]$. La fonction $u = (F\circ\gamma_2)^{-1}\circ(F\circ\gamma_1) : [-1, 0] \to [-1, 0]$ est donc bien définie, continue en 0, analytique sur $]-1, 0[$, et il est facile de voir qu'elle est infiniment plate en 0; donc si $G : S^m \to \boldsymbol{R}$ est une fonction analytique constante sur les feuilles, comme $G\circ\gamma_1(t) = G\circ\gamma_2(u(t))$ pour t voisin de -1, par prolongement analytique,

$G\circ\gamma_1 = G\circ\gamma_2\circ u$ sur tout $[-1, 0[$. Comme $G\circ\gamma_2$ est analytique au voisinage de 0 et que u est infiniment plate en 0, $G\circ\gamma_1$ doit l'être aussi, d'où G est constante.

Remarque. Il est facile de voir que sur S^m, les Γ-structures analytiques de codimension un qui n'ont que des centres ont des intégrales premières analytiques: en effet, elles n'ont alors que deux centres, et on sait d'autre part qu'elles sont induites sur S^m par un feuilletage défini sur un voisinage V de S^m dans $\boldsymbol{R}^{m+1}$. Il suffit de choisir un chemin sur S^m, joignent les deux centres et transverse à la Γ-structure; on le modifie alors au voisinage des centres pour obtenir un chemin dans V, transverse au feuilletage de V, passant par les deux points où les feuilles de V sont tangentes à S^m et se prolongeant un peu au-delà. On approche ce chemin, pour la topologie C^1, par un chemin analytique. Une fonction analytique convenable définie sur ce dernier chemin fournit l'intégrale première cherchée.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG, FRANCE

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, MÉXICO

REFERENCES

[1] A. HAEFLIGER, *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes.* Comment. Math. Helv. **32** (1957–58), 248–329.

[2] A. HAEFLIGER ET G. REEB, *Varietés (non séparées) à une dimension et structures feuiletées du plan.* Ens. Math. **3** (1957), 107–25.

[3] KAMKE, *Über die partielle Differentialgleichung* $fz_x + gz_y = h$. Math. Zeitschr. **4** (1936).

[4] W. KAPLAN, *Regular curve families filling the plane I, II.* Duke Math. J. **7** (1940), **8** (1941).

[5] L. MARKUS, *Topological types of polynomial differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972), 157–78.

[6] M. P. MULLER, *An Analytic foliation of the plane without weak prime integrals of class* C^1. A paraitre.