LA ACCION DEL ALGEBRA DE STEENROD SOBRE LAS VARIEDADES DE STIEFEL PROYECTIVAS

POR ENRIQUE ANTONIANO

1. Introducción

Sea $V_{n,s}$ la variedad de Stiefel de s-marcos ortonormales en R^n. La variedad de Stiefel proyectiva $X_{n,s}$ se obtiene al identificar en $V_{n,s}$ un s-marco $(v_1, \cdots, v_s)$ con su negativo $(-v_1, \cdots, -v_s)$.

Baum y Browder [2] estudiaron la estructura de algebra de Hopf de la cohomología módulo dos de los grupos $PO(2n) = X_{2n,2n-1}$ y determinaron la acción del álgebra de Steenrod sobre ésta. Por otro lado, Gitler y Handel [5] calcularon la acción del algebra de Steenrod sobre $H^*(X_{n,s}; Z_2)$ dejando una pequeña indeterminación.

En este artículo se determina completamente la acción del álgebra de Steenrod sobre las variedades de Stiefel proyectivas (ver Teorema 2.1).

Estos resultados son aplicados para encontrar obstrucciones a la existencia de secciones de múltiplos del haz de Hopf sobre espacios proyectivos reales.

El contenido de este artículo es parte de la tesis [1] escrita bajo la dirección de Samuel Gitler, a quien quiero expresar mi reconocimiento. También quiero dar las gracias a Pedro Armendáriz y a Carlos Rodríguez por su gran ayuda.

2. La acción del algebra de Steenrod

En lo sucesivo los grupos de cohomología serán con coeficientes en Z_2. Sea $s < n$, $N = \min\{j \mid n - s + 1 \leq j \text{ y } \binom{n}{j} \equiv 1(2)\}$. Sea $V(y_{n-s}, \cdots, y_{N-1}, \cdots, y_{n-1})$ el espacio vectorial generado por los monomios $\prod_{k=n-s}^{n-1} y_k^{\epsilon_k}$ con $\epsilon_k = 0, 1$ y $k \neq N - 1$. Recuérdese que de [5] tenemos

$$H^*(X_{n,s}) = Z_2[y]/y^N \otimes V(y_{n-s}, \cdots, \hat{y}_{N-1}, \cdots, y_{n-1}).$$

Con $y = p^*(x)$, donde $p: X_{n,s} \to P^\infty$ clasifica a la doble cubierta $\pi: V_{n,s} \to X_{n,s}$ y $x \in H^1(P^\infty)$ es el generador.

Sea $t = \nu_2(N)$ = exponente de la máxima potencia de 2 que divide a N. Definimos:

$$A_k = A(q, i, k) = \binom{q-1-k}{q-1-i}\binom{n}{k}$$

$$B_{k,j} = B(q, i, k, j) = \binom{n}{q}\binom{N-1-k}{N-1-i}\binom{q-N}{i-j}\binom{n}{k}$$

$$\epsilon = \begin{cases} \binom{n}{q+2^{t-1}-N}\binom{q+2^{t-1}-N}{i-1} & \text{si } t \geq 3 \\ 0 & \text{si } t < 3 \end{cases}$$

Se tiene entonces

TEOREMA 2.1. *La acción del álgebra de Steenrod en $H^*(X_{n,s})$ está determinada por la fórmula.*

$$\mathrm{Sq}^i y_{q-1} = \textstyle\sum_{k=0}^{i} A_k\, y^k\, y_{q+i-1-k} + \Sigma_{0\le k<j\le i} B_{k,j}\, y^{q+k+i-n-j}\, y_{n+j-k-1} + \epsilon y^{q+i-1}$$

Gitler y Handel [5, teorema 2.8] probaron el teorema 2.1 dejando indeterminado el valor de ϵ.

Se demostrará el Teorema 2.1 solo para n par, de donde fácilmente se sigue el resultado general si se toma en cuenta [5, teorema 3.3]. Para esto se estudiará el homomorfismo inducido en cohomología por la acción natural ψ: $PO(2n) \times X_{2n,s} \to X_{2n,s}$ lo que hace necesario ver que la selección de generadores para $H^*(PO(2n))$ hecha por Baum y Browder [2] coincide con la de Gitler y Handel [5]. Esto ha sido probado por Gitler [4, proposición 1.2] cuando n es potencia de dos.

Con frecuencia se hará referencia a las transformaciones $\rho: X_{n,s} \to X_{n+m,s}$ inducida por la inclusión de un s-marco de R^n en R^{n+m} y $f: X_{n,s} \to X_{n,s-k}$ inducida por el olvido de k de los vectores de un s-marco en R^n. Se denotará con u_k a los generadores de $H^*(PO(2n))$ seleccionados por Baum y Browder, que están caracterizados por la fórmula

$$\psi^* u_k = 1 \otimes u_k + u_k \otimes 1 + \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j}\, u_{k-j} \otimes y^j \qquad [2, \text{teorema } 8.7].$$

La coincidencia de las selecciones de generadores resulta de los siguientes tres lemas

LEMA 2.2 *Si* $\binom{2n}{k+1} \equiv 0(2)$, *en* $H^*(PO(2n))$ $y_k = u_k + \epsilon y^k$ *con* $\epsilon = 0, 1$.

Demostración. Considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^*(PO(2n)) \arrow[r, "\psi"] \arrow[rrr, bend right, leftarrow, "g"'] & H^*(PO(2n)) \otimes H^*(PO(2n)) \arrow[rr, "1\otimes\bar{\pi}^*"] & & H^*(PO(2n)) \otimes H^*(SO(2n)) \\
H^*(X_{2n,2n-k}) \arrow[r, "\psi^*"] \arrow[u, "f^*"] & H^*(PO(2n)) \otimes H^*(X_{2n,2n-k}) \arrow[rr, "1\otimes\bar{\pi}^*"] \arrow[u, "1\otimes f^*"] & & H^*(PO(2n)) \otimes H^*(V_{2n,2n-k}) \arrow[u, "1\otimes h^*"]
\end{tikzcd}$$

donde h está inducida por el olvido de vectores de un marco en R^{2n}. No es difícil verificar que $g(f^*y_k + u_k) = 0$ pero $\ker g = T = \{y, y^2, \cdots, y^{N-1}\}$ [2, lema 8.2] y $f^*(y_k) = y_k$ [5, lema 2.6], con lo que termina la demostración.

LEMA 2.3. *Sea* $2^{T-1} < 2n < 2^T$, $\binom{2n}{k+1} \equiv 1(2)$ *y* $2^T - 2n + 1 \le k$, *entonces en* $H^*(PO(2n))$ $y_k = u_k + \epsilon y^k$ *con* $\epsilon = 0, 1$.

Demostración. Considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^*(PO(2n)) \arrow[r, "\psi^*"] \arrow[d, "\rho^*"] \arrow[rr, bend left, "\psi'"] & H^*(PO(2n)) \otimes H^*(PO(2n)) \arrow[r, "\pi^* \otimes 1"] & H^*(SO(2n)) \otimes H^*(PO(2n)) \arrow[d, "i^* \otimes \rho^*"] \\
H^*(X_{2^T,2n-1}) \arrow[r, "\psi^*"] \arrow[rr, bend right, "\psi'"'] & H^*(PO(2^T)) \otimes H^*(X_{2^T,2n-1}) \arrow[r, "\pi^* \otimes 1"] & H^*(SO(2^T)) \otimes H^*(X_{2^T,2n-1})
\end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión usual. Entonces $\psi'(\rho^* y_k + u_k) = 1 \otimes (\rho^* y_k + u_k)$, lo cual es posible solo si $\rho^* y_k = u_k$ pero $\rho^* y_k = y_k$ [5, teorema 3.3.], con lo que termina la demostración.

LEMA 2.4. *Sea* $2^{T-1} < 2n < 2^T$, $\binom{2n}{k+1} \equiv 1(2)$ *y* $2^T - 2n + 1 > k$, *entonces en* $H^*(PO(2n))$ $y_k = u_k + \epsilon y^k$ *con* $\epsilon = 0, 1$.

Demostración. Supóngase cierta la afirmación del lema en dimensiones mayores que k y póngase $u_k + y_k = y^s a$, a no divisible por y, entonces

$0 = \mathrm{Sq}^{k-s}(u_k + y_k) = y^s a^2$ + términos que no cancelan al anterior.

Así $a^2 = 0$ pero $2(k-s) < 2k \leq 2n-1$ por lo que $a = 0$.

3. La acción de $PO(2n)$ en $X_{2n,s}$

Sea $2^{T-1} < 2n \leq 2^T$ y $\binom{2n}{k+1} \equiv 0(2)$, entonces

TEOREMA 3.1. *Para alguna selección de* $y_k \in H^*(X_{2n,2n-k})$, *módulo* y^k

$$\psi^*(y_k) = 1 \otimes y_k + u_k \otimes 1 + \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k+2^T-2n}{j} u_{k-j} \otimes y^j.$$

El Teorema es cierto si $k < 2^{\nu_2(2n)}$ y por tanto cuando n es potencia de dos, puesto que en ese caso

$$f^* : H^*(X_{2n,2n-k}) \to H^*(PO(2n))$$

es un monomorfismo. Obsérvese que ψ^* tiene la siguiente forma genérica:

$$\psi^*(y_k) = 1 \otimes y_k + u_k \otimes 1 + \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} a_i \otimes y^{k-i} + \sum_{i=1}^{N-1} (y^i \otimes 1)$$
$$[\textstyle\sum_{j=1}^{k-i-1} b_j^i \otimes y^{k-i-j}] + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i y^i \otimes y^{k-i},$$

donde a_i, b_j^i son sumas de monomios en las u_s con dimensión el índice inferior y $\alpha_i = 0, 1$. El Teorema 3.1 es consecuencia de los siguientes tres lemas:

LEMA 3.2. *Con la notación anterior* $b_j^i = 0$ *para toda* i, j.

Demostración. Sea i_0 el máximo valor de i tal que $b_j^{i_0} \neq 0$ para algúna j y sea j_0 el máximo de tales valores de j. De la ecuación $(\psi^* \otimes 1)\psi^* \, y_k = (1 \otimes \psi^*)\psi^* \, y_k$ reténganse los términos que contienen a la clase proyectiva "y" a la máxima potencia en la primera entrada y no son de la forma $y^i \otimes y^j \otimes y^{k-i-j}$; se tiene

$$(y^{i_0} \otimes 1 \otimes 1)\left(\textstyle\sum_{j=1}^{k-i_0-1} \psi(b_j^{i_0}) \otimes y^{k-i_0-j}\right)$$
$$= (y^{i_0} \otimes 1 \otimes 1)\left(\textstyle\sum_{j=1}^{k-i_0-1} b_j^{i_0} \otimes \psi(y^{k-i_0-j})\right)$$

pero el sumando $y^{i_0} \otimes b_{j_0}{}^{i_0} \otimes y^{k-i_0-j_0}$ no se cancela con ningún otro de dicha expresión, por lo que $b_{j_0}{}^{i_0} = 0$.

Lema 3.3. *Para alguna selección de y_k (módulo y^k), $\alpha_i = 0$ para toda i.*

Demostración. Ya que $\bar{\psi}^*(y^k) = \sum_{i=1}^{N-1} \binom{k}{i} y^i \otimes y^{k-i}$, basta probar que:

$$\text{a) } \alpha_i = 0 \text{ si } \binom{k}{i} = 0$$

$$\text{b) } \alpha_i = \alpha_j \text{ si } \binom{k}{i} = \binom{k}{j} = 1.$$

De la igualdad $(\psi^* \otimes 1)\psi^* y_k = (1 \otimes \psi^*)\psi^* y_k$ reténganse los términos que solo contienen a la clase proyectiva. De la ecuación resultante puede extraerse el siguiente sistema de ecuaciones lineales del que resulta el lema

$$\alpha_i \binom{k-i}{j} + \alpha_{i+j} \binom{i+j}{j} = 0 \qquad \forall i, j \in [1, N-1].$$

Lema 3.4 *Con la notación anterior $a_i = \binom{k + 2^T - 2n}{k - i} u_i$*

Demostración. Escójase $y_k \in H^*(X_{2n,2n-k})$ para que valga el lema anterior. Simplifíquese la ecuación $(\psi^* \otimes 1)\psi^* y_k = (1 \otimes \psi^*)\psi^* y_k$ hasta obtener

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} \bar{\psi}^*(a_i) \otimes y^{k-i} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \otimes \bar{\psi}^*(y^{k-i}),$$

de donde es claro que $\bar{\psi}^*(a_i) \in H^*(PO(2n)) \otimes T$, $T = \{y, \cdots, y^{N-1}\}$, entonces $a_i = \epsilon_i u_i$ con $\epsilon_i = 0, 1$ [2, sección 2] además resulta

$$(*)\ \epsilon_i \binom{k-i}{j} + \epsilon_{i+j} \binom{i+j}{i}$$
$$\equiv O(2),\ i \in [1, k-1], j \in [1, k-i-1] \cap \ [1, N-1].$$

Ahora basta estudiar ψ' definido por

$$\begin{tikzcd}
H^*(X_{2n,2n-k}) \arrow[r, "\psi'"] \arrow[dr, "\psi^*"'] & H^*(SO(2n)) \otimes H^*(X_{2n,2n-k}) \\
& H^*(PO(2n)) \otimes H^*(X_{2n,2n-k}) \arrow[u, "\pi^* \otimes 1"']
\end{tikzcd}$$

Primero se demuestra el lema para los valores pares de k. Suponiendo cierto el lema en $H^*(X_{2n+2,2n-k})$ y en dimensiones mayores que k, basta escoger y_k de suerte que bajo

$$\rho^*: H^*(X_{2n+2,2n-k}) \to H^*(X_{2n,2n-k}), \qquad \rho^*(y_{k+2}) = y_{k+2} + y^2 y_k$$

[5, Teorema 3.3] y comprobar lo que este resultado afirma analizando la ecuación $\psi'\rho^* y_{k+2} = (1 \otimes \rho^*)\, \psi' y_{k+2}$.

Para los valores impares de k, escójase $y_k \in H^*(X_{2n,2n-k})$ de suerte que $\mathrm{Sq}^1 y_k = y_{k+1}$ [5, Teorema 2.8]. De la ecuación $\psi' \, \mathrm{Sq}^1 y_k = \mathrm{Sq}^1 \psi' y_k$ y (*) no es difícil terminar la demostración.

4. Demostración del Teorema 2.1

Obsérvese primero que el Teorema 2.1 es cierto cuando n es una potencia de dos ya que en ese caso f^* es un monomorfismo. En lo sucesivo,

$$2^{T-1} < 2n < 2^T \text{ y } R = \nu_2(2n).$$

El Teorema 2.1 es consecuencia inmediata de los siguientes dos lemas.

Sea N tal que $\binom{2n}{N} \equiv 1$ (2), $t = \nu_2(N)$ y $M = \max \{ j \mid j < N \text{ y} \binom{2n}{j} \equiv 1 \ (2)\}$.

Lema 4.1. *Si $N - M = 2^R$, la conclusión del Teorema 2.1 es vàlida en $H^*(X_{2n,2n-M})$.*

Demostración. Nótese que $f^*: H^*(X_{2n,2n-(M+S)}) \to H^*(X_{2n,2n-M})$ es monomorfismo si $S \in [0, 2^R - 2]$. En ese rango, tómese $y_{M+S} \in H^*(X_{2n,2n-(M+S)})$ como en el Teorema 3.1 y

$$y_{M+S} = f^*(y_{M+S}) \ \in H^*(X_{2n,2n-M}).$$

De la ecuación $\mathrm{Sq}^i \psi^* y_{q-1} = \psi^* \, \mathrm{Sq}^i y_{q-1}$ no es difícil verificar la afirmación del lema.

Lema 4.2. *Si $N - M > 2^R$, la conclusión del Teorema 2.1 es vàlida en $H^*(X_{2n,2n-M})$.*

Demostración. Sea $2m = 2n + N - M - 2^t$. Escójanse los generadores de $H^*(X_{2m,2n-M})$ como en el lema 4.1 y escojanse los generadores de $H^*(X_{2n,2n-M})$ de suerte que si $M < q < N$ bajo

$$\rho^*: H^*(X_{2n,2n-M}) \to H^*(X_{2m,2n-M}),$$

$$\rho^* y_{q-1} = \textstyle\sum_{\ell=q-2n+2m}^{q} \binom{2n-2m}{q-\ell} y^{q-\ell} y_{\ell-1} \quad [5, \text{Teorema } 3.3].$$

No es difícil verificar la afirmación del lema de la ecuación

$$\rho^* \, \mathrm{Sq}^i y_{q-1} = \mathrm{Sq}^i \rho^* Y_{q-1}.$$

5. Secciones sobre espacios proyectivos

Sea ξ_k el haz de lineas de Hopf sobre el espacio proyectivo real P^k; $n\xi_k$ tiene s secciones linealmente independientes si y solo si la fibración $V_{n,s} \to X_{n,s} \to$

P^∞ tiene una sección sobre el k-esqueleto de la base, P^k. Esto es, si existe una transformación q haciendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X_{n,s} \arrow[d, "p"] \\ P^k \arrow[ur, "q"] \arrow[r, hook] & P^\infty \end{tikzcd}$$

El conocimiento de la acción del álgebra de Steenrod sobre $X_{n,s}$ (Teorema 2.1) mide algunas obstrucciones a la existencia de tal q. Los resultados que se obtienen son como sigue.

Sea $s(n, k)$ el máximo número de secciones linealmente independientes que admite $n\xi_k$. La codimensión geométrica de $n\xi_k$ se define por $cg(n, k) = s(n, k) - n + k$. Sea $n = 8\ell$ y $k = 8m$, entonces

Teorema 5.1. *Si* $\binom{\ell}{m} \equiv 2(4)$ *y* $m > 1$, $cg(n+p, k+q) \leq j$, j *dependiendo solo de* p *y* q *según la siguiente tabla*:

$q \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
1	3	4	3	3	4	3	3
2	3	5	4	4	5	4	3
3	4	6	5	5	6	5	4
4	5	4	3	5	5	4	3
5	6	5	4	3	5	4	3
6	7	6	5	4	6	5	4
7	8	7	6	5	4	3	3

Demostración. Véase la demostración del Teorema 5.2 en seguida.

Teorema 5.2. *Si* $\binom{\ell}{m-1} \equiv 2(4)$ *entonces* $cg(8\ell + 6, 8m) < 4$.

Demostración. Según el Teorema 2.1, en $H^*(X_{8\ell+6, 8(\ell-m)+10})$

$$\mathrm{Sq}^4\, y_{8m-4} = y_{8m} + y^2 y_{8m-2} + y^4 y_{8m-4}$$

$$\mathrm{Sq}^3\, y_{8m-3} = y^2 y_{8m-2} + \underline{y}^{8m}$$

$$\mathrm{Sq}^2\, y_{8m-2} = y_{8m} + y^2 y_{8m-2}$$

lo que hace imposible la existencia de un diagrama conmutativo como el antes mencionado.

El Teorema 5.1 coincide con [6, Teorema 3.1 (B)] de K. Lam, pero la demostración aquí presentada, además de ser homogénea, es conceptualmente más elemental.

W. Iberkleid [3] me ha comunicado haber obtenido también el teorema 5.2, aunque con técnicas mucho más complicadas que involucran operaciones funcionales en MU.

Centro de Investigacion del IPN, Mexico, D. F.

REFERENCIAS

[1] E. ANTONIANO, Sobre las variedades de Stiefel proyectivas, Tesis, Centro de Investigación del IPN, México, D.F. (1976).

[2] P. BAUM AND W. BROWDER, *The cohomology of quotients of classical groups,* Topology **3** (1965), 305-306.

[3] S. FEDER AND W. IBERKLEID, MU-*operations and the generalized vector field problem.* To appear.

[4] S. GITLER, *The projective Stiefel manifolds,* II. *Applications,* Topology **7** (1968), 47-53, *Corrections,* Topology **8** (1969), 93.

[5] ——— AND D. HANDEL, *The projective Stiefel manifolds,* I, Topology **7** (1968), 39-46.

[6] K. Y. LAM, *Sectioning vector bundles over real projective spaces,* Quart. J. Math. Oxford (2) **23** (1972), 97-106.

[7] J. MILNOR AND J. MOORE, *On the structure of Hopf algebras,* Ann. of Math. **81** (1965), 211-264.

[8] N. E. STEENROD, *Cohomology operations,* Princeton Univ. Press, Study **50** (1962).