

# TEOREMA DE PREPARACION $C^K$ Y DESCRIPCION LOCAL DE CEROS DE FUNCIONES

POR J. LUDLOW-WIECHERS\*

## Introducción

En 1880 K. Weierstrass [21], al estudiar las soluciones locales de  $f(z) = 0$ ,  $z \in C^n$  para funciones holomorfas, da un teorema por medio del cual la función queda preparada para el estudio de sus ceros. A éste, se le conoce como el "teorema de preparación".

En 1960 R. Thom observa que, si tuviésemos teoremas análogos para el caso  $C^\infty$ , éstos tendrían fuertes aplicaciones en la teoría de singularidades, y es en 1962 que B. Malgrange [12] da un teorema de preparación para funciones de clase  $C^\infty$ . Motivados por este estudio y siguiendo las ideas de Malgrange, establecemos las dos primeras secciones de este trabajo, para funciones de clase  $C^K$ , un teorema de división (teorema 1.3), un teorema de preparación (corolario 1.12), así como la versión algebraica de estos resultados (teorema 2.10).

En la tercera sección describimos las soluciones locales de  $f(x) = 0$ ,  $x \in R^2$  para funciones que satisfacen las condiciones siguientes:

$$f(0) = 0, \quad Df(0) = 0 \quad \text{y} \quad D^2f(0) \neq 0; \quad f \in C^K, \quad K \geq 2.$$

Los resultados más importantes que se obtienen quedan expresados en los teoremas (3.24) y (3.25), en los que se describe la geometría de los ceros de esta clase de funciones.\*\* Se dan varios ejemplos, los cuales ilustran que estos resultados son óptimos, para toda  $K \geq 2$ .

## 1. Teorema de preparación $C^K$

Vamos a utilizar el siguiente resultado (ver [9], [10]).

**TEOREMA (Lasalle).** *Sea  $U$  un abierto propio de  $R^n$  y  $a_1, \dots, a_r$  funciones  $C^\infty$  definidas en  $U$ . Sea  $B(x, t) = t^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i(x)t^i$ ,  $B \in C^\infty(U \times R)$  dada  $f \in C^K(U \times R)$  entonces existen  $Q \in C^h(U \times R)$  y  $\gamma_0, \dots, \gamma_{r-1} \in C^d(U \times R)$  con  $h = [(K - r)/r]$ ,  $d = [(K + 1)/r] - 1$  que dependen linealmente de  $f$ , tales que en  $U \times R$  tenemos:  $f(x, t) = B(x, t) Q(x, t) + \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i(x)t^i$ , donde  $[a]$  denota la parte entera de  $a$ .*

---

\* Los resultados de este trabajo constituyen esencialmente la tesis doctoral del autor, desarrollada bajo la dirección del Profesor Eugenio Filloy y presentada en 1977 en el Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

\*\* En un trabajo desarrollado recientemente, Luis Moreno establece la validez del recíproco de estos resultados, en el sentido de que, dada la geometría de los ceros, existe la función que localmente los realiza.

Como lo que interesa es obtener un teorema de preparación con funciones de clase  $C^K$ , vamos primero a demostrar:

**LEMA 1.1 (División Polinomial)** Sea  $P(\lambda, t) = t^r + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j t^j$ , dada  $f(x, t)$  de clase  $C^K$ , entonces existen  $q, \gamma_0, \dots, \gamma_{r-1}$  tales que  $f(x, t) = q(x, \lambda, t) \cdot P(\lambda, t) + \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i(x, \lambda) t^i$  en una vecindad del origen en  $R^n \times R^r \times R$ ,  $x \in R^n$ ,  $\lambda \in R^r$ ,  $t \in R$ , donde  $q$  tiene  $[(K - r)/r]$  derivadas continuas, y cada  $\gamma_i$  tiene  $[(K + 1)/r] - 1$  derivadas continuas.

*Demostración.* Sea  $f(x, \lambda, t) = f(x, t)$  y  $a_i(x, \lambda) = \lambda_i$ , dividimos a  $f(x, \lambda, t)$  por  $t^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i(x, \lambda) t^i$  y aplicamos el teorema de Lasalle.

**DEFINICION 1.2.** Sea  $f: R^n \rightarrow R$  decimos que  $f$  es de orden  $r$  en la variable  $x_n$  en cero si y sólo si  $f(0, x_n) = x_n^r g(x_n)$  con  $g$  continua y  $g(0) \neq 0$ .

**TEOREMA 1.3. (División)** Sea  $f(x, t)$  definida en una vecindad del origen en  $R^n \times R$ ,  $f \in C^K$ ,  $f$  de orden  $r$  en cero en  $t$ , dada  $g(x, t)$  definida en una vecindad del origen en  $R^n \times R$ ,  $g \in C^K$ , entonces existe una vecindad del origen en  $R^n \times R$  tal que  $g(x, t) = f(x, t)q(x, t) + \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i(x) t^i$ ;  $q$  de clase  $C^{h_1}$  con  $h_1 = [(K - r)/r]$ , y cada  $\gamma_i$  de clase  $C^{h_2}$ , con  $h_2 = [(K + 1)/r] - 1$ .

*Demostración:* Dividimos ambas funciones como en el lema 1.1 obteniendo

$$1.4. \quad f(x, t) = q_f(x, \lambda, t) [t^r + \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i t^i] + \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i^f(x, \lambda) t^i$$

$$1.5. \quad g(x, t) = q_g(x, \lambda, t) [t^r + \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i t^i] + \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i^g(x, \lambda) t^i.$$

En la relación 1.4 hacemos  $x = \lambda = 0$  y nos queda

$$1.6. \quad t^r h(t) = f(0, t) = q_f(0, 0, t)t^r + \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i^f(0, 0)t^i,$$

dividiendo por  $t^r$  y haciendo  $t \rightarrow 0$  resulta  $0 \neq h(0) = q_f(0, 0, 0) + \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i^f(0, 0)t^{i-r}$ , de donde  $q_f(0, 0, 0) \neq 0$  y  $\gamma_i^f(0, 0) = 0$ ; consideremos la función  $(\gamma_i^f): R^n \times R^r \rightarrow R^r$ ,  $\gamma_i^f(0, 0) = 0$ , definida por  $(x, \lambda) \rightarrow (\gamma_i^f(x, \lambda))_i$ .

La idea detrás de toda la demostración es hacer ver que la curva de nivel  $\gamma(x, \lambda) = 0$  es la gráfica de una función  $\lambda = \lambda(x)$  (para ello se usa el teorema de la función implícita) y después substituir y despejar adecuadamente en las relaciones 1.4 y 1.5.

Derivando con respecto a  $\lambda_j$  en 1.4, obtenemos

$$0 = \frac{\partial q_f}{\partial \lambda_j}(x, \lambda, t) [t^r + \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i t^i] + q_f(x, \lambda, t) t^j + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \lambda_j}(x, \lambda) t^i,$$

y haciendo  $x = \lambda = 0$ , tenemos

$$0 = \frac{\partial q_f}{\partial \lambda_j}(0, 0, t) t^r + q_f(0, 0, t) t^j + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \lambda_j}(0) t^i, \text{ de donde}$$

$$\frac{\partial \gamma_0^f}{\partial \lambda_0} = -q(0, 0, 0) \text{ y } \frac{\partial \gamma_0^f}{\partial \lambda_j}(0, 0) = 0 \text{ para } j > 0.$$

Para  $\ell \leq j$ , dividimos por  $t^\ell$ , obteniéndose

$$0 = \frac{\partial q_f}{\partial \lambda_j}(0, 0, 0) t^{r-\ell} + q_f(0, 0, t) t^{j-\ell} + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\partial \gamma_i^f}{\partial \lambda_j}(0, 0) t^{i-\ell}$$

haciendo  $t \rightarrow 0$  resulta  $\partial \gamma_i^f / \partial \lambda_i(0, 0) = -q(0, 0, 0)$  y  $\partial \gamma_i^f / \partial \lambda_j(0, 0) = 0$  para  $j > i$ .

Resumiendo, la derivada de la función  $\gamma(x, \lambda) = (\gamma_i(x, \lambda))$ , es  $D\gamma(x, \lambda) = (\partial \gamma / \partial x(x, \lambda), \partial \gamma / \partial \lambda(x, \lambda))$ , donde la submatriz  $(\partial \gamma / \partial \lambda(0, 0))$  es triangular y det  $(\partial \gamma_i / \partial \lambda_j(0, 0)) = [-q(0)]^r \neq 0$ .

Por lo tanto, existen vecindades en el origen de  $R^n$  y en el origen de  $R^r$  y una función  $\lambda = \lambda(x)$  de clase  $h_2 = [(K + 1)/r] - 1$ , tal que

$$\lambda(0) = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_i(x, \lambda(x)) \equiv 0.$$

Así, substituyendo, las relaciones 1.4 y 1.5 quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= q_f(x, \lambda(x), t) [t^r + \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i(x) t^i] \\ g(x, t) &= q_g(x, \lambda(x), t) [t^r + \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i(x) t^i] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i^g(x, \lambda(x)) t^i. \end{aligned}$$

Nótese que estas dos expresiones solo tienen a  $x$  y  $t$  como variables.

Como  $q_f(0, 0, 0) \neq 0$ , hay una vecindad del origen en la que podemos despejar

$$t^r + \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i(x) t^i = \frac{f(x, t)}{q_f(x, \lambda(x), t)}$$

substituyendo

$$g(x, t) = f(x, t) \left[ \frac{q_g(x, \lambda(x), t)}{q_f(x, \lambda(x), t)} \right] + \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i^g(x, \lambda(x)) t^i.$$

Definimos  $q(x, t) = q_g(x, \lambda(x), t) \cdot q_f^{-1}(x, \lambda(x), t)$  la mínima clase de  $\{q_g, \lambda, q_f\}$  es  $[(K - r)/r]$ , y definimos  $\gamma_i(x) = \gamma_i^g(x, \lambda(x))$ ; cada una de las  $\lambda_i$  es de clase  $[(K + 1)/r] - 1$ .

El siguiente resultado generaliza el teorema de Lasalle.

**COROLARIO 1.7.** (Lasalle  $C^K$ ). Sea  $B(x, t) = t^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i(x) t^i$  donde cada  $a_i$  está definida en una vecindad del origen en  $R^n$  en  $a_i(0) = 0$  para toda  $i$ ,  $a_i \in C^K$ ; dada  $f(x, t)$  definida en una vecindad del origen en  $R^n \times R$ ,  $f \in C^K$ , entonces existe una vecindad del origen en  $R^n \times R$  donde:

$$f(x, t) = g(x, t) B(x, t) + \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i(x) t^i \quad \text{con } q \text{ de clase}$$

$$h_1 = \left[ \frac{K - r}{r} \right] \quad \text{y cada } \gamma_i \text{ de clase } h_2 = \left[ \frac{K + 1}{r} \right] - 1.$$

*Demostración.* Como  $B(x, t)$  es de orden  $r$  en la variable  $t$  en cero aplicamos el resultado anterior.

DEFINICION 1.8. Sea  $B(x, t)$  como en 1.7. A esta función la llamaremos un  $C^K$ -polinomio de Weierstrass.

Sean

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_r \\ \sigma_2 &= a_1 a_2 + \dots + a_{r-1} a_r \\ &\dots \\ \sigma_r &= a_1 a_2 \dots a_r\end{aligned}$$

las funciones simétricas elementales. Definimos  $P(t, a) = t^r - \sigma_1(a)t^{r-1} + \sigma_2(a)t^{r-2} - \dots + (-1)^r \sigma_r(a)$ .

COROLARIO 1.9. (Barbançon). Sea  $f \in C^K$  definida en una vecindad del origen en  $R^n \times R$ , entonces existe una vecindad del origen en  $R^n \times R^r \times R$  donde  $f(x, t) = P(t, a)q(x, a, t) + \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i(x, a)t^i$  donde  $q$  tiene  $[(K - r)/r]$  derivadas continuas y cada  $\gamma_i$  tiene  $[(K + 1)/r] - 1$  derivadas continuas.

*Demostración:* Con abuso de notación, tómesese  $f(x, a, t) = f(x, t)$ ,  $B(a, t) = P(t, a)$  y aplíquese el Corolario 1.7.

COROLARIO 1.10. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- i) Lema 1.1 (División polinomial)
- ii) Teorema 1.3. (División)
- iii) Corolario 1.7. (Lasalle  $C^K$ )
- iv) Corolario 1.9 (Barbançon)

*Demostración:*

- i)  $\Rightarrow$  ii) y ii)  $\Rightarrow$  iii) ya están hechas.
- iii)  $\Rightarrow$  i) la misma que en el Lema 1.1
- iii)  $\Rightarrow$  iv), ya está hecha
- iv)  $\Rightarrow$  iii), ver Barbançon [2], pags. I-22 y II-4.

COROLARIO 1.11. (Whitney  $C^K$ ). Sea  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = f(-x)$ ,  $f \in C^K$  entonces existe  $a$  de clase  $[(K + 1)/2] - 1$ , tal que  $f(x) = a(x^2)$ .

*Demostración.* Dividimos por  $x^2 - y$ , obteniendo  $f(x) = [x^2 - y]q(x, y) + r_1(y) + r_2(y)x$ . Haciendo  $y = x^2$  se obtiene:

$$f(x) = r_1(x^2) + r_2(x^2)x$$

Como  $f$  es par,  $r_2 \equiv 0$ . Así  $f(x) = r_1(x^2)$ , con  $r_1$  de clase  $[(K + 1)/2] - 1$ .

No es posible mejorar el resultado como lo muestra la función;  $x^{2n+4/3} = (x^2)^{n+2/3}$  donde el miembro izquierdo posee  $2n + 1$  derivadas mientras que  $y^{n+2/3}$  tiene  $[(2n + 2)/2] - 1 = n$  derivadas.

COROLARIO 1.12. (Preparación). Sea  $f(x, t)$  definida en una vecindad del origen en  $R^n \times R$ ,  $f \in C^K$  y  $f$  de orden  $r$  en la variable  $t$  en cero, entonces existe una vecindad del origen en  $R^n \times R$ . Donde  $f(x, t) = q(x, t)[t^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i(x)t^i]$  con  $g(0) \neq 0$ ,  $g$  de clase  $[(K - r)/r]$  con  $[t^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i(x)t^i]$  un polinomio de Weierstrass, i.e.,  $a_i(0) = 0$  y cada  $a_i$  de clase  $[(K + 1)/r] - 1$ .

*Demostración.* Sea  $g(x, t) = t^r$  por el teorema de división, tenemos  $t^r = \bar{q}(x, t) f(x, t) + \sum_{i=0}^{r-1} \bar{a}_i(x) t^i$ . Dividiendo por  $t^r$  y haciendo  $x = 0$ ,  $1 = \bar{q}(0, t) \cdot h(t) + \sum a_i(0) t^{i-r}$  haciendo  $t \rightarrow 0$ , vemos que:  $\bar{q}(0) \neq 0$  y  $\bar{a}_i(0) = 0$ .

Tomando  $q(x, t) = \bar{q}(x, t)^{-1}$ ,  $a_i(x) = -\bar{a}_i(x)$ , se obtiene el resultado  $f(x, t) = g(x, t)[t^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i(x)t^i]$ .

**Descripción local de algunos ceros de funciones**

Sea  $f \in C^K$  definida en una vecindad del origen en  $(y_1, \bar{y}) \in R \times R^n$  y tal que  $f(0) = 0, Df(0) = 0, \dots, D^{r-1}f(0) = 0, D^r f(0) \neq 0$ . Aplicando un cambio lineal no-singular (véase [6] pag. 13, lema 2), podemos suponer que  $f$  satisface las condiciones:

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^r}(0) \neq 0 \text{ y } D^\alpha f(0) = 0 \text{ para } 0 \leq \alpha < r,$$

y de ahí concluimos que  $f(x_1, 0, \dots, 0) = x_1^r h(x_1)$  con  $h(0) \neq 0$  y  $h$  continua.

Con esto vemos que  $f$  satisface las hipótesis del teorema de preparación.

Aplicando este último obtenemos una vecindad  $V_0 = V_1 \times V_n$  del origen en  $R^{n+1}$  donde  $f(x_1, \bar{x}) = Q(x_1, \bar{x}) [x_1^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i(\bar{x}) x_1^i]$   $x_1 \in R, \bar{x} \in R^n$ , con  $a_i(0) = 0, Q(0, 0) \neq 0$  y cada  $a_i$  de clase  $[(K + 1)/r] - 1$ ,  $Q$  de clase  $[(K - r)/r]$ .

Nótese que en el caso extremo  $K = r$ ,  $Q$  y cada  $a_i$  son sólo funciones continuas.

DEFINICION.  $\lambda_f^i = \{ \bar{x} \in V_n \mid (x, \bar{x}) \in V_1 \times V_n, \text{ y } P(x, \bar{x}) = 0 \text{ tiene } i \text{ raíces} \}$  donde  $P$  es el polinomio de Weierstrass de  $f$  que se obtiene al preparar la función en la vecindad  $V_1 \times V_n$ .

Vamos a analizar como es  $\lambda_f^r$ . Supongamos que  $\bar{x}_0 \in \lambda_f^r x_1^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i(\bar{x}_0) x_1^i$  tiene  $r$  raíces distintas  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  que están la vecindad  $V_1$  del origen en  $R$ .

LEMA 1.13. *La derivada parcial  $\partial f/\partial x_1(\gamma_i, \bar{x}_0)$  es distinta de cero para toda  $i, 1 \leq i \leq r$ .*

*Demostración.* (Por contradicción). Si en alguna  $\gamma_j$  se tuviera  $\partial f/\partial x_1(\gamma_j, \bar{x}_0) = 0$ , como  $f(\gamma_i, \bar{x}_0) = 0$  para toda  $i$ , definiendo  $g(x_1) = f(x_1, \bar{x}_0)$ , encontramos que hay  $r - 1$  puntos donde  $\partial f/\partial x_1$  se anula.

Junto con la hipótesis, observamos que hay  $r$  puntos donde  $\partial f/\partial x_1$  se anula.

Si definimos ahora  $h(x_1) = \partial f/\partial x_1(x_1, \bar{x}_0)$ , hay  $r - 1$  puntos donde  $\partial^2 f/\partial x_1^2$  se anula.

Prosiguiendo de esta manera vemos que hay  $r - i$  puntos donde  $\partial^{i+1} f/\partial x_1^{i+1}$  se anula.

Al final vemos que hay un punto donde  $\partial^r f/\partial x_1^r$  se anula, contradiciendo la primera hipótesis de que  $\partial^r f/\partial x_1^r(0) \neq 0$ .

Sea  $\Pi: R^n \times R \rightarrow R^n$  la proyección canonica  $(x, \bar{x}) \rightarrow \bar{x}$  y denotemos también por  $\Pi$  su restricción a  $Z[f] \cap V_1 \times V_n$ .

COROLARIO 1.14.  $\Pi: Z[f] \rightarrow \lambda_f^r$  es una función de recubrimiento con  $r$  ramas de clase  $C^K$ .

Sea  $\bar{x} \in \lambda_f^r$ , por el lema  $\partial f/\partial x_1(\gamma_i, \bar{x}) \neq 0$  para  $i = 1, \dots, r$  y por el teorema

de la función implícita existen vecindades de  $\bar{x}$  y de  $\gamma_i$  y funciones de clase  $C^K$   $d_1, \dots, d_r$  tal que  $d_i(\bar{x}_0) = \gamma_i$  y  $f(d_i(\bar{x}), \bar{x}) \equiv 0$  para toda  $\bar{x}$  en la intersección de las vecindades denotada por  $V$ . Así  $\Pi^{-1}(\lambda_f^r)$  tiene  $r$  ramas cada una dada por  $(d_i(x), x)$  para  $x \in V$ .

**COROLARIO 1.15.** En  $\lambda_f^r$

- 1) El discriminante del polinomio de Weierstrass es  $C^K$ .
- 2) Los coeficientes del polinomio de Weierstrass son  $C^K$ .

*Demostración:* Como  $D(x) = \prod_{i < j} (d_i(x) - d_j(x))^2$  es claro que (1), (2) son ciertos ya que cada  $d_i$  es una función simétrica elemental en las  $d_i$ .

## 2. Algebras de funciones $C^K$

Sea  $C^K(R^n)$  el anillo de gérmenes de funciones definidas en una vecindad del origen en  $R^n$  con valores en  $R$ .

**DEFINICION 2.1.** Sea  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $f \in C^K$ ,  $f(0) = 0$  definimos

$$f^*: C^K(R^m) \rightarrow C^K(R^n),$$

su homomorfismo asociado, por medio de  $[g] \rightarrow [g \circ f]$

**LEMA 2.2.** Bajo la hipótesis de la definición, si  $f$  es una inmersión en cero entonces  $f^*$  es un epimorfismo.

*Demostración.* Véase [4; p107].

**DEFINICION 2.3.**  $A$  es una  $C^K$  - álgebra de funciones  $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A} \subset C^K(R^n)$ , donde  $\mathcal{A}$  es un ideal tal que  $A = C^K(R^n)/\mathcal{A}$ .

**DEFINICION 2.4.** Sea  $f^*: C^K(R^m) \rightarrow C^K(R^n)$  un homomorfismo y  $A$  una  $C^K$  - álgebra de funciones sobre  $C^K(R^n)$ , definimos para  $a \in A$  y  $p \in C^K(R^m)$  como  $p \cdot a = f^*(p) \cdot a$ .

De esta manera  $A$  es una  $C^K$  - álgebra de funciones sobre  $C^K(R^m)$ .

**LEMA 2.5.** Sea  $K \rightarrow K_1$  un homomorfismo de anillos y  $E$  un  $K_1$  - módulo, entonces  $K_1 \otimes_K E$  es un  $K$  - módulo.

*Demostración.* Véase [8; p418].

Si  $A$  es  $C^K(R^{n-1})$  - módulo, como  $C^h(R^{n-1})$  es  $C^K(R^{n-1})$  - módulo ( $h \leq K$ ), tenemos que  $A \otimes_{C^K(R^{n-1})} C^h(R^{n-1})$  es  $C^K(R^{n-1})$  - módulo y también es  $C^h(R^{n-1})$  - módulo con la siguiente operación:

$$g \cdot (a \otimes f) = a \otimes fg \quad f, g \in C^h(R^{n-1}).$$

**LEMA 2.6.** Sea  $\mathcal{R}$  un anillo local y  $M$  su ideal máximo, si  $A$  es un  $\mathcal{R}$  - módulo finito entonces  $A/MA$  es un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo  $\mathcal{R}/M$ .

Si  $\Phi: A \rightarrow A/MA$  es la proyección natural y  $e_1, \dots, e_m$  son tales que  $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_m)$  son generadores del espacio vectorial, entonces  $e_1, \dots, e_m$  son generadores en  $A$ .

*Demostración.* Véase [4; p105].

LEMA 2.7. Sea  $\pi: R^n \rightarrow R^{n-1}$ ,  $\pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n) = x$

$$\pi^*: C^K(R^{n-1}) \rightarrow C^K(R^n)$$

$$[f] \rightarrow [f \circ \pi].$$

Si  $A$  es  $C^K(R^n)$  - álgebra finita tenemos que  $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$  donde  $i) A/\pi^*(M(R^{n-1}))A$  es un espacio vectorial de dimensión  $\ell < \infty$  sobre  $C^K(R^n)/M(R^n) \approx \mathbb{R}$ . ( $M(R^n)$  es el ideal máximo del anillo local  $C^K(R^n)$ );  $ii)$  existe un aniquilador de  $A$  de la forma

$$B(x_1, x) = x_1^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i(x) x_1^i$$

con  $a_i$  de clase  $[(K+1)/\ell] - 1$ , con  $a_i(0) = 0$ ;  $iii)$   $\tilde{A} = A \otimes_{C^K(R^{n-1})} C^h(R^{n-1})$  es una  $C^h(R^{n-1})$  - álgebra finita y con  $\ell^2 + \ell$  elementos en la base, donde  $h = [(K+1)/\ell] - 1$ .

*Demostración.*  $i) \Rightarrow ii)$ . Si  $A/\pi^*(M(R^{n-1}))A$  es de dimensión finita, consideremos  $\Phi: A \rightarrow A/\pi^*(M(R^{n-1}))A$  y  $e_1, \dots, e_\ell$  en  $A$  tales que  $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_\ell)$ , sea una base en el cociente. Como

$$\pi^*(M(R^{n-1})) \subset M(R^n),$$

$$M(R^n) \cdot B = \{ \sum_{i=1}^n f_i g_i \mid f_i \in M(R^n) g_i \in B \}$$

tenemos que

$$A/\pi^*(M(R^{n-1}))A \xrightarrow{\eta} A/M(R^n)A$$

es sobre. Luego en

$$A \xrightarrow{\eta \circ \Phi} A/M(R^n)A$$

observamos que  $\eta \circ \Phi(e_1), \dots, \eta \circ \Phi(e_\ell)$  son generadores en el cociente, y aplicando el Lema 2.6, verificamos que  $e_1, \dots, e_\ell$  son generadores de  $A$ .

Si  $a \in A$  tenemos que es de la forma  $a = \sum c_i e_i + \bar{e}$  con  $\bar{e} \in \pi^*(M(R^{n-1}))A$ . Luego,

$$\begin{aligned} a &= \sum c_i e_i + \bar{e} \\ &= \sum c_i e_i + \sum_j f_j a_j \\ &= \sum c_i e_i + \sum_j f_j [\sum_i h_{ij} e_i] \\ &= \sum_i c_i + \sum_i [\sum_j f_j h_{ij}] e_i. \end{aligned}$$

Definiendo  $g_i$  por  $\sum_j f_j h_{ij} = g_i \in \pi^*(M(R^{n-1})) \cdot C^K(R^n)$ , resulta

$$a = \sum c_i e_i + g_i e_i, \text{ con } g_i \in \pi^*(M(R^{n-1}))C^K(R^n).$$

Como  $x_1 e_j \in A$ , obtenemos:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} x_1 e_j &= \sum_i c_{ij} e_i + g_{ij} e_i \\ 0 &= \sum_i (x_1 \delta_{ij} - (C_{ij} - g_{ij})) e_i. \end{aligned}$$

Sea  $P$  el determinante de este sistema de ecuaciones. Por la regla de Cramer tenemos:  $P e_j = 0$ , para toda  $j$ , y como  $g_{ij}(x_1, 0, \dots, 0) \equiv 0$ , entonces

$$P(x_1, 0, \dots, 0) = \det (x_1 \delta_{ij} - c_{ij}).$$

En las relaciones 2.8 hacemos  $x_j = 0$ , para toda  $j$  y obtenemos  $0 = \sum_i c_{ij} e_i$ . Aplicando  $\Phi$  se tiene  $0 = \sum c_{ij} \Phi(e_i)$  y como  $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_\ell)$  es una base,  $c_{ij} = 0$  para toda  $i, j$ . Por ello  $P(x_1, 0) = x_1^\ell$ .

A continuación le aplicamos a  $P$  el teorema de preparación y tenemos:  $P = q \cdot B$  con  $q$  invertible y  $B$  polinomio de Weierstrass. Como  $P e_j = 0$ ,  $g^{-1} P e_j = 0$ .

Así  $B(x_1, x) = x_1^\ell + \sum_{i=1}^{\ell-1} a_i(x) x_1^i$  resulta ser un aniquilador de  $A$ .

Demostraremos ahora que ii)  $\Rightarrow$  iii). Como cada elemento de  $A$  es de la forma  $a = \sum c_i e_i + f_i e_i$ , dividimos cada  $f_i$  por el aniquilador  $B$  y obtenemos

$$f_i(x_1, x) = q_i(x_1, x) B(x_1, x) + \sum_{j=0}^{\ell-1} \gamma_{ij}(x) x_1^j,$$

multiplicado por  $e_i$ , resulta

$$f_i e_i = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} r_{ij}(x) x_1^j e_i.$$

Para  $\hat{a} \in \hat{A}$ ,  $\hat{a} = a \otimes f$ , se tiene  $\hat{a} = a \otimes f = [\sum_i c_i e_i + \sum_{j,i} r_{ij}(x) x_1^j e_i] \otimes f$ . Luego,

$$\hat{a} = \sum_i e_i \otimes c_{if} + \sum_{i,j} x_1^j e_i \otimes f(x) r_{ij}(x)$$

y  $\hat{A}$  está generado por los  $(\ell + \ell^2)$  elementos  $(e_i \otimes 1, x_1^j e_i \otimes 1)$ . Esto termina la demostración del lema 2.7.

**LEMA 2.9.** Sea  $\pi^*: C^K(R^{n-1}) \rightarrow C^K(R^n)$  el homomorfismo asociado a la proyección canónica y denotemos con  $A$  un  $C^K(R^n)$  - módulo. Si  $B$  es un aniquilador de  $A$  como  $C^K(R^{n-1})$  - módulo, entonces  $B \circ \pi$  es un aniquilador de  $A$  como  $C^K(R^n)$  - módulo.

La demostración es trivial.

**TEOREMA 2.10.** Sea  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f \in C^K$  y sea  $A$  una  $C^K(R^n)$  - álgebra finita. Si existe  $B \in C^K(R \times R^m)$  de la forma  $B(x_n, y) = x_n^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i(y) x_n^i$  con  $a_i$  de clase  $C^K$ ,  $a_i(0) = 0$  y  $B$  es un aniquilador de  $A$  como  $C^K(R \times R^m)$  - módulo, entonces existen  $h = h_n \leq \dots \leq h_2 \leq h_1 \leq h_0 = K$  tales que  $\hat{A}$  es una  $C_h(R^m)$  - álgebra finita, donde

$$\hat{A} = A \otimes_{Q_0} C^{h_1}(R^{n-1} \times R^m) \otimes_{Q_1} C^{h_2}(R^{n-2} \times R^m) \otimes \dots \otimes_{Q_{n-1}} C^{h_n}(R^m),$$

donde

$$Q_i = C^{h_i}(R^{n-i-1} \times R^m) \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n-1.$$



*Demostración.* Sea  $\phi(x) = (x, f(x)) = (x, y)$  y  $\pi_i(x_i, x_i + 1, \dots, x_n) = (x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Resulta  $f = \pi_n \circ \pi_{n-1} \dots \Phi$ . Si  $f^*: C^K(R^m) \rightarrow C^K(R^n)$  es el homomorfismo asociado, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 C^K(R^m) & \xrightarrow{f^*} & C^K(R^n) \\
 \pi_n^* \downarrow & & \swarrow \Phi^* \\
 C^K(R \times R^m) & \xrightarrow{\pi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\pi_2^*} & C^K(R^{n-1} \times R^m) \xrightarrow{\pi_1^*} C^K(R^n \times R^m)
 \end{array}$$

Como  $A$  es  $C^K(R^n)$  – álgebra finita y  $\Phi^*$  es sobre, se sigue que  $A$  es una  $C^K(R^n \times R^m)$  – álgebra finita. Por el Lema 2.9 y las propiedades del producto tensorial,  $B$  es aniquilador en cada  $C^K(R^i \times R^m)$ . Si se aplica el Lema 2.7 repetidamente, se obtiene el resultado.

*Observación.* Como  $h = h_n = [(h_{n-1} + 1 - r)/r] \leq h_{n-1} + (1 - r)/r$ . Por lo tanto,  $rh + r - 1 \leq (h_{n-1} \leq h_{n-2} + 1 - r)/r$ . Iterando este procedimiento se obtiene finalmente  $r^n h + r^n - 1 \leq K$ . Esta es una relación que existe entre la  $h$  y la  $K$  del Teorema 2.10.

### 3. Ceros de funciones

**LEMA 3.1.** *Sea  $f: R^2 \rightarrow R, f(0) = 0, D_0 f = 0, D_0^2 f \neq 0, f \in C^K, K \geq 2$  entonces existe un cambio lineal no-singular de coordenadas donde  $D_0^2 f$ , es tal que*

$$D_0^2 f(y_1, y_2) = \pm \delta y_1^2 \pm y_2^2 \quad \delta = \begin{cases} 0, & \text{si } H_0^2 f = 0 \\ 1, & \text{si } H_0^2 f \neq 0. \end{cases}$$

con  $\partial^2 f / \partial y^2(0) = \pm 1$ , donde  $H_0^2 f = \det D_0^2 f$ .

*Demostración.* Como  $D_0^2 f \neq 0$  podemos aplicar un cambio lineal no-singular de coordenadas como lo indica [6; p13] así  $D_0^2 f(h_1, h_2)^2 = Ah_1^2 + 2B h_1 h_2 + Ch_2^2$  donde  $C \neq 0$ . Siguiendo el proceso de diagonalización de formas cuadráticas obtenemos al completar cuadrados y luego aplicar una homotecia que  $D_0^2 f(y_1, y_2)^2 = \pm \delta y_1^2 \pm y_2^2$ . Esto termina la demostración.

Para proseguir con nuestros análisis vamos a introducir la noción de gérmenes de conjuntos.

**DEFINICION.** Sean  $X, Y \subset R^2$ . Diremos que  $X \sim Y$  en cero si existe una vecindad del origen  $W$ , tal que  $X \cap W = Y \cap W$ . A cada clase de equivalencia la llamaremos un germen de conjuntos.

Como  $\partial^2 f / \partial y^2(0) \neq 0$  aplicando dos veces la relación  $\Phi(1) - \Phi(0) = \int_0^1 \Phi'(s) ds$  a la función  $\Phi(t) = f(tx, ty)$  obtenemos  $f(0, y) = y^2 h(y)$  con  $h(0) \neq 0$  y  $h$  continua en una vecindad del cero.

Por el teorema de preparación existe una vecindad del origen en  $R^2$ , tal que

$$f(x, y) = Q(x, y)[y^2 + a_1(x)y + a_2(x)]$$

donde  $Q$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  satisfacen  $Q(0, 0) \neq 0$ ,  $a_i(0) = 0$ ,

$Q$  de clase  $[(K - 2)/2]$ ,

$a_i$  de clase  $[(K + 1)/2] - 1$ ,

$[n]$  denota la parte entera de  $n$ .

Nótese que para  $K = 2$  solo podemos asegurar que  $Q$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  son funciones continuas.

Vamos a denotar por  $Z[f]$ , germen de los ceros de  $f$ , a la clase de equivalencia del conjunto  $f^{-1}(0)$ .

Así,

$$Z[f] = \{(x, y) \mid y^2 + a_1(x)y + a_2(x) = 0\}$$

si nos permitimos un abuso de notación.

Definimos:

$$D(x) = a_1^2(x) - 4 a_2(x)$$

$$R_1(x) = -\frac{a_1(x)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{D(x)}$$

$$R_2(x) = -\frac{a_1(x)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{D(x)}$$

$$H_2 = \{x \mid D(x) > 0\},$$

$$H_1 = \{x \mid D(x) = 0\},$$

$$H_0 = \{x \mid D(x) < 0\},$$

$$\hat{H}_1 = \{(x, y) \mid (x, y) \in Z[f], x \in H_1\} = \left\{ \left( x, \frac{-a_1}{2}(x) \right) \mid x \in H_1 \right\},$$

$$\hat{H}_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in Z[f], x \in H_2\}.$$

Nótese que  $D$  está definida continuamente en un intervalo abierto  $W$  que contiene al origen.

Sean

$$\hat{R}_1 = \{(x, R_1(x)) \mid x \in H_2\} \text{ y } \hat{R}_2 = \{(x, R_2(x)) \mid x \in H_2\}.$$

DEFINICION 3.2. Llamaremos a  $\hat{R}_1$  y  $\hat{R}_2$  las ramas de  $\hat{H}_2$ . Nótese que  $\hat{H}_2 = \hat{R}_1 \cup \hat{R}_2$ .

Hay varias propiedades que son evidentes:

$\exists \epsilon > 0$ , tal que si  $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\pi^{-1}(x) \cap Z[f]$  tiene a lo sumo dos puntos, donde  $\pi(x, y) = x$ .

$R_1$  y  $R_2$  se pueden extender a  $H_2 \cup H_1$  como funciones continuas.

$H_1$  es un cerrado en  $W$ ;  $\hat{H}_1$  es un cerrado en  $Z[f]$ .

$H_2$  es un abierto en  $W$ ;  $\hat{H}_2$  es un abierto en  $Z[f]$ ;  $H_0$  es un abierto en  $W$ .

Si  $R$  es una de las ramas  $f(x, R(x)) = 0$ .

$\partial H_0 \subset H_1$ ,  $\partial H_2 \subset H_1$ , donde  $\partial$  denota la frontera.

PROPOSICION 3.3. Si  $x \in H_2$ ,  $\exists y_0$  tal que

$$R_1(x) < y_0 < R_2(x) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) = 0.$$

*Demostración.* Como  $x \in H_2$ , tenemos dos ramas  $R_1(x), R_2(x)$ ; consideramos la recta  $\ell(t) = (1-t)R_1(x) + tR_2(x)$  que es paralela al eje  $Y$ ; como

$$f(x, \ell(0)) = f(x, R_1(x)) = 0$$

$$f(x, \ell(1)) = f(x, R_2(x)) = 0$$

por el Teorema de Rolle, existe  $y_0$  tal que

$$R_1(x) < y_0 < R_2(x) \text{ y } \partial f/\partial y(x, y_0) = 0.$$

PROPOSICION 3.4. Si  $(x_0, y_0) \in Z[f]$  y  $(x_0, y_0) \in \partial \hat{H}_2$ , entonces  $\partial f/\partial y(x_0, y_0) = 0$ .

*Demostración.* Sea  $x_n \in H_2$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ ; por la Proposición 3.3, existe  $y_n$  tal que

$$y_n \rightarrow y_0 \quad (\text{ya que } R_1(x_n) < y_n < R_2(x_n))$$

con  $\partial f/\partial y(x_n, y_n) \rightarrow \partial f/\partial y(x_0, y_0)$  y con  $\partial f/\partial y(x_n, y_n) = 0, \forall n$ . Por lo tanto,  $\partial f/\partial y(x_0, y_0) = 0$ .

PROPOSICION 3.5. Si  $(x_0, y_0) \in \hat{H}_2$ , entonces  $\partial f/\partial y(x_0, y_0) \neq 0$ .

*Demostración.* Si  $\partial f/\partial y(x_0, y_0) = 0$ , usando la Proposición 3.4 existe  $y_1$  tal que

$$R_1(x_0) < y_1 < R_2(x_0) \text{ y } \partial f/\partial y(x_0, y_1) = 0.$$

Luego, por el Teorema de Rolle existe  $y$  tal que

$$y_1 < y < y_0, \partial^2 f/\partial y^2(x_0, y) = 0.$$

Esta contradicción establece el resultado.

PROPOSICION 3.6.  $\hat{R}_1$  y  $\hat{R}_2$  son subvariedades de dimensión 1 y clase  $C^K$ .

*Demostración.* Sea  $(x, y) \in \hat{R}_i$ , como  $\partial f/\partial y(x, y) \neq 0$ , por el teorema de la función implícita, existe  $\Phi$  única tal que  $\Phi(x) = y$ ,  $\Phi$  es  $C^K$  y  $f(x, \Phi(x)) \equiv 0$ ; como  $f(x, R_i(x)) \equiv 0$ , entonces  $\Phi \equiv R_i$ .

PROPOSICION 3.7. En  $H_2$ ,  $a_1, a_2$  son de clase  $C^K$ .

*Demostración:* Como  $R_i = -a_i/2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{D}$ , es fácil deducir que  $a_1, a_2$  son de clase  $C^K$ .

PROPOSICION 3.8. Si  $(x_0, y_0) \in \hat{H}_2$  y  $y_1 < y_0 < y_2$ , tenemos  $f(x_0, y_1) \cdot f(x_0, y_2) < 0$ .

*Demostración:* Si  $f(x_0, y_1), f(x_0, y_2)$  tienen el mismo signo,  $f(x_0, y_0)$  es un máximo o un mínimo de la función  $g(y) = f(x_0, y)$ , y por ello  $\partial f/\partial y(x_0, y_0) = 0$ , contradiciendo la Proposición 3.5.

PROPOSICION 3.9.  $Z[\partial f/\partial y]$  es una subvariedad de dimensión 1 de clase  $C^{K-1}$ , tangente al origen.

*Demostración.* Como  $\partial^2 f/\partial y^2(0, 0) \neq 0$ , por el teorema de la función implícita, existe  $\Phi$  de clase  $C^{K-1}$  tal que  $\Phi(0) = 0$  y  $\partial f/\partial y(x, \Phi(x)) \equiv 0$ ; además, derivando se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Phi' = 0. \quad \text{Así, } \Phi'(0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \right]^{-1} = 0.$$

Note que  $\hat{H}_1$  tiene solo una componente conexa o tiene una infinidad. Así también, si  $M$  es la componente conexa del origen en  $\hat{H}_1$ , entonces se tienen dos casos:

- i) el origen es punto frontera de  $M$ ,
- ii) el origen es punto interior de  $M$ .

PROPOSICION 3.10. Si el origen en punto interior de  $M$ , entonces  $Z[f] = \hat{H}_1 = Z[\partial f/\partial y]$ . Además,  $\hat{H}_1$  es una variedad de clase  $C^{K-1}$ .

*Demostración.* Es claro que  $Z[f] = \hat{H}_1$ . Tomamos el desarrollo de Taylor en el origen y si  $\Phi$  es una curva cuya imagen coincide con el eje  $y$ , vemos que  $f(0, y) = y^2 + o(|y|^2)$ ; así  $f$  no cambia de signo; luego  $f$  tiene el mismo signo en  $W - \hat{H}_1$ , por lo tanto, todos los puntos de  $Z[f]$  son máximos o mínimos  $y$ , por ello,  $\hat{H}_1 \subset Z[\partial f/\partial y]$ .

Aplicando el lema 3.9, se termina la demostración.

PROPOSICION 3.11. En general se tiene  $\hat{H}_1 \subset Z[\partial f/\partial y]$ .

*Demostración.* Tomamos el desarrollo de Taylor en el origen y vemos que  $f(0, y) = y^2 + o(|y|^2)$ ; luego  $f$  no cambia de signo en el eje  $Y$ . Sea  $y_1 < y_0 < y_2$ ,  $(x_0, y_0) \in \hat{H}_1$  y  $P$  una poligonal, que se inicia en  $(x_0, y_1)$  y termina en  $(x_0, y_2)$  tal que  $P \cap Z[f] = \{(0, 0)\}$ .

Nótese que la existencia de  $P$  queda asegurada porque  $a_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2$ ; por lo tanto,  $D(x) \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow 0$ , luego si  $x \in H_2$ ,  $x \rightarrow 0$  entonces  $\sqrt{D(x)} \rightarrow 0$ . Con ello concluimos que existe una vecindad del origen donde  $Z[f] = \hat{H}_1 \cup \hat{R}_1 \cup \hat{R}_2$  y la poligonal están contenidos en su interior.

Sea  $g(y) = f(x_0, y)$ ; para  $y \in (y_1, y_2)$ , por la existencia de la  $P$ ,  $g$  no cambia de signo; luego,  $(x_0, y_0)$  es un máximo o un mínimo de  $g$ ; luego,  $\partial f/\partial y(x_0, y_0) = 0$ , o sea  $(x_0, y_0) \in Z[\partial f/\partial y]$ .

PROPOSICION 3.12. Sea  $x \in H_1$  y  $x \in \partial H_2 \cap \partial H_0$ , entonces, si  $(x, y) \in \hat{H}_1$ , se obtiene  $Df(x, y) = 0$ .

*Demostración.* Si  $(x, y) \in \hat{H}_1$  es punto interior de una componente conexa  $C$  de  $\hat{H}_1$ , por la proposición 3.11 y los argumentos de la 3.10, concluimos que, en  $\pi^{-1}(C)$ ,  $Z[f] = \hat{H}_1$  es una subvariedad de dimensión 1 y clase  $C^p$  y que  $f$  no cambia de signo en  $\pi^{-1}(C) - \hat{H}_1$ , por lo que todos los puntos de  $\hat{H}_1$  son máximos o mínimos y por ello  $Df(y) = 0 \forall y \in \pi^{-1}(C) \cap \hat{H}_1$ . Ahora, sea  $(x, y)$

$\in \hat{H}_1$  donde  $x$  no es un punto interior de  $H_1$ , si tuvieramos  $\partial f/\partial x(x, y) \neq 0$ , por el teorema de la función implícita,  $Z[f]$  sería una subvariedad de dimensión 1 y clase  $C^p$  cuya tangente sería paralela al eje de las  $Y$ , por lo que  $x \in \partial H_0 \cap \partial H_2$ , contradiciendo la hipótesis.

**PROPOSICION 3.13**  $\hat{H}_1$  está contenido en una subvariedad de dimensión 1 de clase  $C^{p-1}$ .

*Demostración.* Se tiene  $\hat{H}_1 \subset Z[\partial f/\partial y]$  y aplicamos la Proposición 3.9 para completar la demostración.

Whitney, en su libro [22; cap 7], ha dado diversas definiciones de tangentes. Adoptaremos una de sus definiciones de cono tangente.

**DEFINICION.** Sea  $A \subseteq R^2$ . El cono tangente de  $A$  en  $x_0 \in A$ , denotado  $Ctg_{x_0} A$ , consiste de todas las rectas  $\ell$  que satisfacen la propiedad  $\ell \in Ctg_{x_0} A \Leftrightarrow$  existe  $v_n \in A$ ,  $v_n \neq x_0$ ,  $v_n \rightarrow x_0$  y si  $\ell_n = (1-t)v_n + tx_0$ ,  $\ell_n \rightarrow \ell$ .

**PROPOSICION 3.14.** Sea  $f \in C^K$ ,  $x_0 \in Z[f]$  y  $D_{x_0}^i f = 0$  para  $0 \leq i < j \leq K$ ; si  $v \in \ell \in Ctg_{x_0} Z[f]$ , entonces  $D_{x_0}^j f(v^j) = 0$ .

*Demostración.* Sea  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in Z[f]$  y  $\ell_n \rightarrow \ell$  con  $\ell_n = tx_n + (1-t)x_0$ . Sean  $v_n \in \ell_n$  y  $v \in \ell$  tales que  $v_n \rightarrow v$ ,  $|v_n| = |v| = 1$ ; por teorema de Taylor:

$$f(x_n) = f(x_0) + Df(x_0)(x_n - x_0) + \dots + \frac{D^j f(x_0)}{j!} (x_n - x_0)^j + o(|x_n - x_0|^j).$$

Por lo tanto,

$$0 = D^j f(x_0) [(x_n - x_0)^j] + o(|x_n - x_0|^j).$$

$$0 = D^j f(x_0) \left[ \frac{x_n - x_0}{|x_n - x_0|} \right]^j + \frac{o(|x_n - x_0|^j)}{|x_n - x_0|^j},$$

y haciendo  $x_n \rightarrow x_0$  se obtiene  $0 = D^j f(x_0)(v^j)$ . Como todo vector de  $\ell$  es un múltiplo de  $v$ , el resultado se sigue.

**PROPOSICION 3.15.** Sean  $v_1, \dots, v_{n+1}$  vectores en  $R^2$  tales que dos a dos son linealmente independientes. Si  $L \in L_s^n(R^2, R)$  es tal que  $L(v_i^n) = 0$  para toda  $i$ , entonces  $L \equiv 0$ .

*Demostración.* El caso  $n = 1$  es trivial. En el caso general, para  $j \geq 3$ , escribimos  $v_j = \alpha_{j1}v_1 + \alpha_{j2}v_2$ , donde  $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}$  son ambos distintos de cero. Consideremos el sistema homogéneo

$$L(v_j^n) = L(v_j, \dots, v_j) = 0 \quad j = 3, \dots, n + 1.$$

Desarrollando tenemos.

$$\left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_{j1}^k \alpha_{j2}^{n-k} L(v_1^k, v_2^{n-k}) = 0 \right\}_{j=3}^{n+1}.$$

Se tienen  $n - 1$  renglones con  $n + 1$  incógnitas. Como  $L(v_i^n) = 0$  para

$i = 1, \dots, n + 1$ , obtenemos un sistema en  $n - 1$  incógnitas con  $n - 1$  renglones

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha_{j_1}^k \alpha_{j_2}^{n-k} L(v_1^k, v_2^{n-k}) = 0 \right\}_{j=3}^{n+1}.$$

El determinante del sistema es:

$$\begin{aligned} & \left| \binom{n}{k} \alpha_{j_1}^k \alpha_{j_2}^{n-k} \right| = \prod_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left| \alpha_{j_1}^k \alpha_{j_2}^{n-k} \right| \\ & = \prod_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \prod_{j=3}^{n+1} (\alpha_{j_2}^{n-1} \alpha_{j_1}) \left| \begin{pmatrix} \alpha_{j_1} \\ \alpha_{j_2} \end{pmatrix} \right|^{k-1} \\ & = \prod_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \prod_{j=3}^{n+1} (\alpha_{j_2}^{n-1} \alpha_{j_1}) \prod_{i < j} \left( \frac{\alpha_{j_1}}{\alpha_{j_2}} - \frac{\alpha_{i_1}}{\alpha_{i_2}} \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Así, la única solución del sistema es  $L(v_1^k, v_2^{n-k}) = 0$ , lo que implica  $L \equiv 0$ .

**PROPOSICION 3.16.** *Sea  $f \in C^K$ ,  $x_0 \in Z[f]$ . Si  $\text{Ctg}_{x_0} Z[f]$  tiene  $i$  direcciones distintas  $i \leq K$ , entonces  $D^j f(x_0) = 0$  para  $j < i$ , y si  $v \in \ell \in \text{Ctg}_{x_0} Z[f]$ ,  $D^i f(x_0)(v^i) = 0$ .*

*Demostración.* (Por inducción). Si  $i = 0$ ,  $Z[f] = \{x_0\}$  y no hay nada que demostrar. Si  $i_0 = 1$ , es claro que  $f(x_0) = 0$  y  $Df(x_0)(h) = 0$  para  $h \in \ell \in \text{Ctg}_{x_0} Z[f]$ , ya que si  $Df(x_0) \neq 0$ , entonces existe  $V_{x_0}$  donde  $V_{x_0} \cap Z[f]$  es una variedad  $C^K$ , así  $\text{Ctg}_{x_0} Z[f] = T_{x_0}(Z[f] \cap V)$  y si  $h \in T_{x_0}(Z[f] \cap V)$ , entonces  $Df(x_0)(h) = 0$ , ya que  $\nabla f(x_0)$  es perpendicular a  $Z[f]$  en  $x_0$ .

Si  $Df(x_0) = 0$  es claro que se obtiene la conclusión de la proposición.

Supongamos ahora que la proposición es cierta para  $1 \leq j \leq i$ . Sabemos que para  $j < i - 1$ ,  $D^j f(x_0) = 0$  y si  $v \in \ell \in \text{Ctg}_{x_0} Z[f]$ ,  $D_{x_0}^{i-1} f(v^{i-1}) = 0$ . Como hay  $i$  direcciones distintas, por la Proposición 3.15,  $D^{i-1} f(x_0) = 0$ . Así  $D^i f(x_0) = 0$  para  $j < i$  y, aplicando la Proposición 3.14, obtenemos que  $D^i f(x_0)(h)^i = 0$ , para  $h \in \ell \in \text{Ctg}_{x_0} Z[f]$ .

*Observación.* En nuestro caso,  $f(0) = 0$ ,  $Df(0) = 0$  y

$$D^2 f(0) = \begin{pmatrix} \pm\delta & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \delta = \begin{cases} 0 & \text{si } H_0^2 f = 0 \\ 1 & \text{si } H_0^2 f \neq 0 \end{cases}$$

$$H_0^2 = \det(D^2 f(0)).$$

La Proposición 3.16 nos dice que  $\text{Ctg}_0 Z[f]$  tiene a lo sumo 2 direcciones distintas.

Ahora, las direcciones del cono y  $D^2 f(0)$  están relacionadas del siguiente modo:

- $H_0^2 f > 0 \Leftrightarrow \text{Ctg}_0 Z[f] = \emptyset$
- $H_0^2 f < 0 \Leftrightarrow \text{Ctg}_0 Z[f]$  consta de las rectas  $h_1 = \pm h_2$ .
- $H_0^2 f = 0$  y  $Z[f] \neq \{(0, 0)\} \Leftrightarrow \text{Ctg}_0 Z[f]$  es el eje  $X$ .

**PROPOSICION 3.17.** *Si  $\{0\} \neq \hat{H}_1$ , entonces  $H_0^2 f = 0$ .*

*Demostración.* Si  $\{0\} \neq \hat{H}_1$ , como  $\hat{H}_1 \subset Z[\partial f / \partial y]$  y  $\text{Ctg}_0 Z[\partial f / \partial y]$  es el eje  $X$ , entonces existe  $x_n \in \hat{H}_1$ ,  $x_n \rightarrow 0$  y  $\ell_n \rightarrow \ell$  donde  $\ell$  es el eje  $X$ .

Por lo tanto  $\text{Ctg}_0 Z[f]$  contiene el eje  $X$ . Si  $H_0^2 f \neq 0$ ,  $D^2 f(0)$  tendría por direcciones isotrópicas a las dos diagonales y al eje de las  $X$  (Proposición 3.14); por ello,  $D^2 f(0)$  sería idénticamente nula, contradiciendo la hipótesis.

PROPOSICION 3.18. Si  $\{0\} \neq \hat{H}_1$ , entonces  $\text{Ctg}_0 Z[f]$  contiene una sola recta.

*Demostración.* Por hipótesis  $\text{Ctg}_0 Z[f] \neq 0$  y por la proposición anterior, solamente puede tener una dirección.

PROPOSICION 3.19. Si  $x_0 \in \partial H_2 \cap \partial H_0$  y  $(x_0, y_0) \in \hat{H}_1$ , entonces  $\hat{R}_1, \hat{R}_2$  son tangentes en  $(x_0, y_0)$ . Es decir,  $\lim R_1'(x) = \lim R_2'(x)$  cuando  $x \rightarrow x_0$  con  $x \in H_2$ .

*Demostración. Caso a)*  $Df(x_0, y_0) = 0$ ; en tal caso, si  $\hat{R}_1$  y  $\hat{R}_2$  no fuesen tangentes, el  $\text{Ctg}_{(x_0, y_0)} Z[f]$  tendría dos direcciones linealmente independientes. Ahora, tomemos  $v$ , dirección distinta de las del cono, y  $\Phi$  una curva diferenciable con  $\Phi(0) = (x_0, y_0)$  y  $\Phi'(0) = v$ .

El desarrollo de Taylor de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  es:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + D_{(x_0, y_0)} f(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2} D_{(x_0, y_0)}^2 f(x - x_0, y - y_0)^2 + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$$

Ahora, componiendo con  $\Phi$ :

$$(f \circ \Phi)(t) = (f \circ \Phi)(0) + D_0(f \circ \Phi)(t) + \frac{1}{2} D_0^2(f \circ \Phi)(t, t) + o(|t^2|), \text{ luego}$$

$$(f \circ \Phi)(t) = \frac{1}{2} D_0^2(f \circ \Phi)(t, t) + o(|t^2|).$$

De esto se concluye que existe  $\epsilon > 0$ , tal que si  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $f \circ \Phi(t)$  no cambia de signo. Esto implica que  $\partial f / \partial y$  es cero en los puntos de  $\hat{R}_i$ , pero la Proposición 3.5 nos asegura lo contrario y se obtiene así una contradicción.

*Caso b)*  $Df(x_0, y_0) \neq 0$ ; en tal caso  $\partial f / \partial x(x_0, y_0) \neq 0$  y  $\partial f / \partial y(x_0, y_0) = 0$ , debido a la Proposición 3.3.

Usando el teorema de la función implícita, existe  $\Phi(y) = x$  única, tal que  $\Phi(y_0) = x_0$  y  $f(\Phi(y), y) \equiv 0$ , para vecindades apropiadas de  $x_0$  y  $y_0$ .

Como  $\Phi$  es diferenciable,  $\hat{R}_1$  y  $\hat{R}_2$  son tangentes. Aún más, como  $f(\Phi(y), y) \equiv 0$ , se sigue que  $\partial f / \partial x(\Phi(y), y) \cdot \Phi'(y) + \partial f / \partial y(\Phi(y), y) \equiv 0$ , y se tiene que  $\Phi'(y) = -\partial f / \partial y(\Phi(y), y) \cdot \partial f^{-1} / \partial x(\Phi(y), y)$ ; haciendo  $y \rightarrow y_0$ ,  $\Phi'(y) \rightarrow 0$ , por lo tanto,  $\Phi'(y_0) = 0$  por lo que la tangente común es paralela al eje de las  $Y$ .

PROPOSICION 3.20. Si  $(x_0, y_0) \in Z[f]$  y  $x_0 \in \partial H_2 \cap \partial H_0$ , entonces  $\text{Ctg}_{(x_0, y_0)} Z[f]$  tiene una sola dirección.

*Demostración.*  $\hat{R}_1, \hat{R}_2$  son tangentes por la Proposición 3.19, por lo que  $\text{Ctg}_{(x_0, y_0)} Z[f]$  tiene una sola dirección.

PROPOSICION 3.21. Si  $(x_0, y_0) \in Z[f]$  y  $x_0 \in \partial H_2 \cap \partial H_0$ , entonces  $Z[f]$  está contenido en una subvariedad de clase  $C^1$  alrededor de  $(x_0, y_0)$ , si  $Df(x_0, y_0) \neq 0$  y en dos subvariedades de clase  $C^1$  si  $Df(x_0, y_0) = 0$ .

*Demostración.*

*Caso a)*  $Df(x_0, y_0) = 0$ . Sabemos que  $\hat{R}_1$  y  $\hat{R}_2$  son tangentes (Proposición 3.19) y además son tangentes a  $Z[\partial f/\partial y]$ , ya que  $Z[\partial f/\partial y]$  está entre  $\hat{R}_1$  y  $\hat{R}_2$ .

Denotaremos con  $\Phi$  a una parametrización de clase  $K - 1$  de  $Z[\partial f/\partial y]$  y con  $R$  indistintamente a  $R_1$  ó  $R_2$ .

Se define

$$j(x) = \begin{cases} \hat{R}(x) & \text{si } x \in H_2 \\ \Phi(x) & \text{si } x \in Z\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] \end{cases}$$

como  $R$  y  $\Phi$  son tangentes se concluye que  $j$  es  $C^1$ .

*Caso b)*  $Df(x_0, y_0) \neq 0$  se establece en forma análoga al Caso b) de la Proposición 3.19.

Nótese que en la proposición anterior sólo es posible garantizar que la mejor diferenciabilidad que se obtiene es uno, como lo muestra la función  $f(x, y) = y^2 - x^3$ .

**PROPOSICION 3.22.** *Supongamos que  $x \in \partial H_2$ ,  $x \notin \partial H_0$  con  $(x, y) \in Z[f]$ . Entonces,  $z[f]$  está contenido en un cruce de dos variedades de dimensión 1 y por lo menos de clase  $C^1$ , alrededor de  $(x, y)$ .*

*Demostración.* Alrededor del punto  $(x, y)$ ,  $Z[f]$  solo puede estar contenido en 3 o 4 ramas.

*Caso 1)* Solo son tres ramas. Todas ellas son tangentes entre sí, ya que el  $\text{Ctg}_{(x,y)}Z[f]$  a lo más puede tener 2 direcciones linealmente independientes; con el mismo argumento que aparece en la demostración de la Proposición 3.19 y se concluye que solamente hay una dirección en  $\text{Ctg}_{(x,y)}Z[f]$  y se construyen las dos variedades que buscamos.

*Caso 2)* Hay cuatro ramas.  $\text{Ctg}_{(x,y)}Z[f]$  a lo más puede tener dos direcciones linealmente independientes.

I) Sólo hay una dirección en el cono. En este caso, todas las ramas son tangentes. Sean  $\hat{R}_1$  y  $\hat{R}_2$  las dos ramas que están sobre los puntos  $x' \in H_2$ , con  $x' < x$ . Análogamente, sean  $\bar{R}_1$  y  $\bar{R}_2$  las dos ramas que están sobre los puntos  $x' \in H_2$ , con  $x' > x$ .

Se construyen las dos subvariedades siguientes:

$$F_1 = \hat{R}_2 \cup \bar{R}_1 \cup \{(x, y)\}$$

$$F_2 = \hat{R}_1 \cup \bar{R}_2 \cup \{(x, y)\}.$$

II) Hay 2 direcciones en el cono. Usando la notación de arriba, se construyen las dos subvariedades siguientes:



$$F_1 = \hat{R}_1 \cup \overline{R}_2 \cup \{(x, y)\}$$

$$F_2 = \hat{R}_2 \cup \overline{R}_1 \cup \{(x, y)\}.$$

Pueden presentarse los subcasos I), II) como lo muestran, respectivamente, los siguientes ejemplos:

$$f(x, y) = y^2 - e^{-1/x^2} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$$

$$g(x, y) = y^2 - e^{-1/x^2} \operatorname{sen}^4 \frac{1}{x}.$$

LEMA 3.23 (Kuiper-Morse [7]). Se tiene  $f(0) = 0$ ,  $Df(0) = 0$ ,  $H_0^2 f \neq 0$  si y solo si vale i) o ii), donde:

i)  $Z[f] = \{(0, 0)\}$ ,  $\operatorname{Ctg}_0 Z[f] = \emptyset$  y cero es un máximo o mínimo de  $f$ .

ii)  $Z[f] = \{(0, 0)\} \cup \hat{H}_2$  y el  $\operatorname{Ctg}_0 Z[f]$  está formado por dos rectas y cero es un punto silla de la función  $f$ ;  $\hat{H}_2$  consta de dos variedades de clase  $C^K$  de dimensión 1 transversales en cero cuyo cruce es de clase  $C^1$ .

*Demostración.* Si  $H_0^2 f \neq 0$ , entonces  $\hat{H}_1 = \{(0, 0)\}$ , si no, debido a las Proposiciones 3.11 y 3.18, el eje  $X$  sería también una dirección isotrópica, junto con las dos diagonales, contradiciendo la hipótesis.

*Caso i)* Si  $\hat{H}_2 = \emptyset$ , se tiene  $Z[f] = \{(0, 0)\}$  y  $\operatorname{Ctg}_0 Z[f] = \emptyset$ . En este caso,  $(0, 0)$  es un máximo o mínimo de  $f$ .

*Caso ii)*  $\hat{H}_2 \neq \emptyset$ .  $H_0^2 f$  tiene índice uno y  $\operatorname{Ctg}_0 Z[f]$  consta de las diagonales ( $y = \pm x$ ). Con el razonamiento usado en el subcaso II) de la Proposición 3.22 se obtiene que existen dos subvariedades transversales cuyo cruce es de clase  $C^1$  y, por la Proposición 3.6, cada una de las ramas es de clase  $C^K$  y de dimensión 1. Por último,  $(0, 0)$  es un punto silla, debido a la Proposición 3.5.

En el enunciado de las siguientes proposiciones una rama significa una subvariedad de dimensión uno. Los cruces se refieren a puntos que no son de acumulación del conjunto  $\partial H_0 \cap H_1$ .

TEOREMA 3.24 Sea  $f \in C^K(\mathbb{R}^2)$ ,  $K \geq 2$ ,  $f(0, 0) = 0 = Df_{(0,0)}$  y  $D^2 f_{(0,0)} \neq 0$ , entonces

i)  $Z[f] = \{(0, 0)\}$ , o

ii)  $Z[f]$  está contenido en un cruce de dos subvariedades topológicas de dimensión 1, tales que cuando hay dos variedades distintas cada rama es  $C^K$ ; cuando las dos variedades coinciden tenemos una rama  $C^{K-1}$  y en los cruces de las ramas, éstas son de clase  $C^1$ .

*Demostración.* El caso  $\hat{H}_0^2 f \neq 0$  lo cubre la Proposición 3.23. Para el caso  $H_0^2 f = 0$ , tenemos que hay una sola recta en el  $\operatorname{Ctg}_0 Z[f]$ . Como  $Z[f] = \hat{H}_2 \cup \hat{H}_1$ , procedamos analizando las siguientes situaciones:

1)  $\hat{H}_2 \neq \emptyset$ ,  $H_2$  conexo y  $\hat{H}_1 = \{(0, 0)\}$ .

En este caso,  $\hat{R}_1$  y  $\hat{R}_2$  son tangentes y por la Proposición 3.21,  $Z[f]$  está contenido en una variedad de clase  $C^1$  alrededor del origen,

$$2) \quad \hat{H}_2 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad H_0 = \emptyset.$$

Por la Proposición 3.22,  $Z[f]$  está contenido en un cruce de dos variedades de dimensión 1 y por lo menos de clase  $C^1$  y, a su vez, por la Proposición 3.6 se obtiene la conclusión.

$$3) \quad \hat{H}_2 = \emptyset, \quad \text{o sea} \quad Z[f] = \hat{H}_1.$$

Aquí,  $\hat{H}_1 \subset Z\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$  y, por la Proposición 3.13, se obtiene que  $Z[f]$  está contenido en una variedad de dimensión 1 de clase  $C^{K-1}$ .

$$4) \quad Z[f] = \hat{H}_2 \cup \hat{H}_1 \quad \hat{H}_2 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \hat{H}_1 \neq \{(0, 0)\}.$$

Sea  $(x, y) \in Z[f]$ , con  $x \in H_2$ . Entonces,  $(x, y)$  está en una de las dos ramas, cada una de clase  $C^K$ , usando la proposición 3.6.

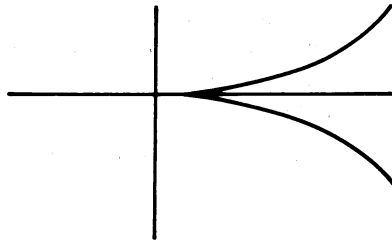
Si  $x \in \partial H_2$ , por las Propiedades 3.21 y 3.22,  $Z[f]$  alrededor de  $(x, y)$  está contenido en un cruce de dos variedades de dimensión 1, (por lo menos de clase  $C^1$ ) o  $Z[f]$  está contenido en una variedad de clase  $C^1$  alrededor de  $(x, y)$ .

Si  $x \in H_1$ , como  $\hat{H}_1 \subset Z[\partial f/\partial y]$ , por la Proposición 3.13,  $Z[f]$  está contenida en una variedad de dimensión 1 de clase  $C^{K-1}$  alrededor de  $(x, y)$ . Esto concluye la demostración.

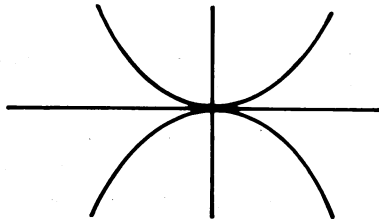
### Ejemplos

Cada una de las cuatro situaciones analizadas en el teorema anterior efectivamente pueden presentarse como lo prueban los siguientes ejemplos.

*Primera Situación.* Ejemplo:  $f(x, y) = y^2 - x^3$



*Segunda Situación.* Ejemplo:  $f(x, y) = y^2 - x^4$

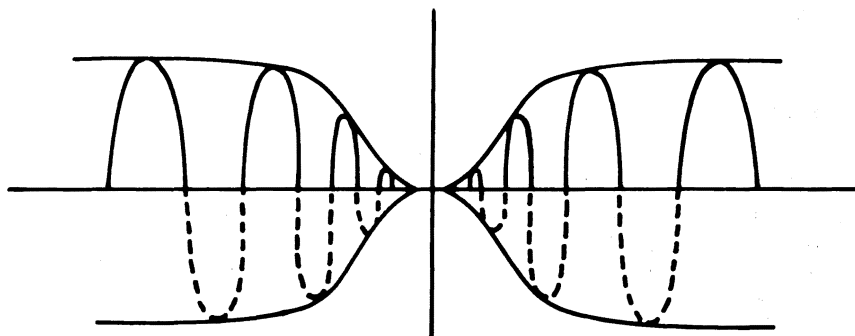


*Tercera Situación. Ejemplo:*

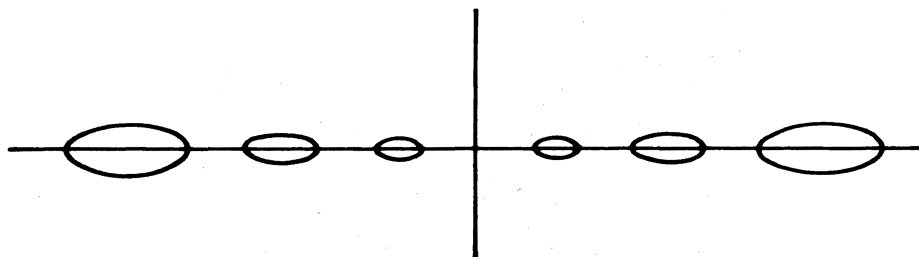
Sea  $F \subset \mathbb{R}$  un cerrado y  $0 \in F$ , por un lema de Whitney existe  $\Phi \in C^\infty$  tal que  $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Phi^{-1}(0) = F$ ,  $\Phi \geq 0$  y  $\Phi^{(\alpha)}(0) = 0$  toda  $\alpha$ . Sea  $f(x, y) = y^2 + \Phi(x)$  y  $Z[f] = \Phi^{-1}(0) = F$ .

*Cuarta Situación. Ejemplos:*

1.  $f(x, y) = y^2 - e^{-1/x^2} \text{sen } 1/x$ .

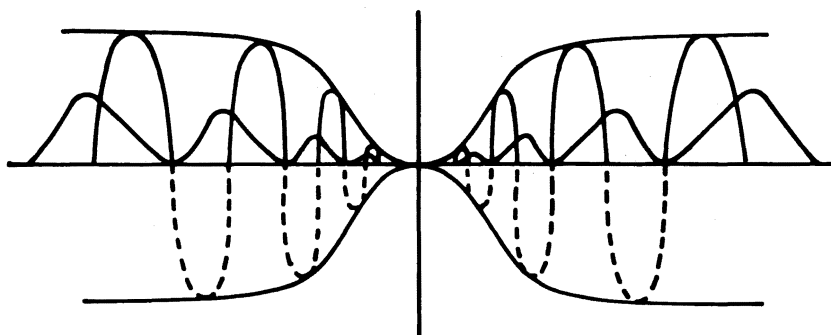


asi  $Z[f] = \{(x, y): y^2 = e^{-1/x^2} \text{sen } 1/x\}$  es:

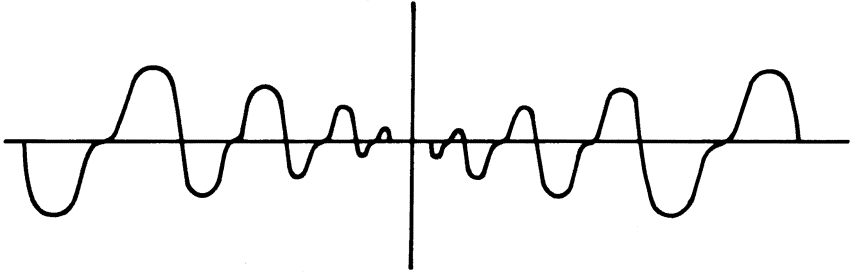


en  $(1/k\pi, 0)$  la tangente en  $Z[f]$  es paralela al eje Y ya que  $\partial f/\partial x(1/k\pi, 0) \neq 0$ .

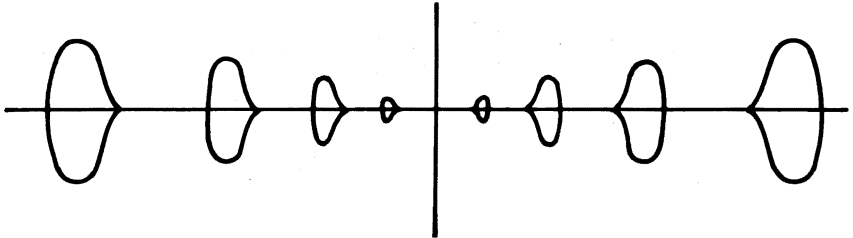
2. Con la función  $e^{-1/x^2} \text{sen } 1/x$ , sea  $\Phi \in C^\infty$  como lo muestra la gráfica



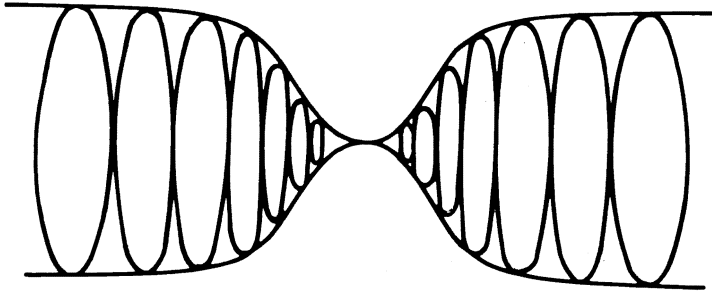
o sea:  $\Phi$  es  $C^\infty$   $\Phi \geq 0$   $\Phi^{(a)}(1/2n\pi) = 0 \forall \alpha$ , y  $\Phi'(1/(2n+1)\pi) = 1$  así sea  $f(x, y) = y^2 - e^{-1/x^2} \Phi(x) \text{ sen } 1/x$ ; la gráfica de  $e^{-1/x^2} \Phi(x) \text{ sen } 1/x$  es:



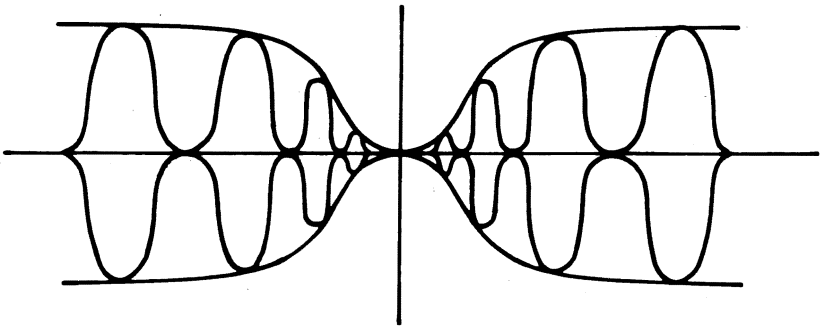
así  $Z[f] = \{(x, y) | y^2 = e^{-1/x^2} \Phi(x) \text{ sen } 1/x\}$  es:



3.  $f(x, y) = y^2 - e^{-1/x^2} \text{sen}^2 1/x$   
 $Z[f] = \{(x, y) | y^2 = e^{-1/x^2} \text{sen}^2 1/x\}$  es:



4.  $f(x, y) = y^2 - e^{-1/x^2} \text{sen}^4 1/x$   
 $Z[f]$  es:



**TEOREMA 3.25.** Sea  $f \in C^K(R^2)$  y  $f(0, 0) = Df_{(0,0)} = 0$  con  $D^2f_{(0,0)} \neq 0$ , entonces,

i)  $Z[f] = \{(0, 0)\}$ , o

ii)  $Z[f]$  está contenido en un cruce de dos variedades topológicas conexas de dimensión 1, tales que cuando hay dos variedades distintas cada rama es de clase  $C^K$ , cuando las dos variedades coinciden tenemos una rama de clase  $C^{K-1}$  y, en los cruces de las ramas, éstas son de clase  $C^1$ .

*Demostración.* A partir del teorema anterior, es claro que para tener a  $Z[f]$  contenido en cruces de variedades conexas, sólo debemos analizar puntos de  $Z[f]$  del tipo  $x \in \partial H_2 \cap \partial H_0$  y tales que si  $(x, y) \in Z[f]$ ,  $\partial f / \partial x(x, y) \neq 0$ .

Ahora,  $x \in \partial H_2 \cap \partial H_0$  no puede ser punto de acumulación de  $H_1$ , ya que si fuese, se tendría  $\partial f / \partial x(x, y) = 0$ , que no es el caso que estamos estudiando.

Sea  $\delta = \text{dist}((x, y), \hat{H}_1) = \inf \| (x, y) - (x', y') \|$  donde el ínfimo se toma para puntos  $(x', y') \in H_1$  y que están en la frontera de la componente conexas de  $H_0$  de la cual  $x$  es punto de la frontera.

Así  $\delta > 0$  y sea  $(x_0, y_0)$  donde se alcanza tal valor  $\delta$ ; tenemos dos casos:

*Caso I* Si  $\partial f / \partial x(x_0, y_0) \neq 0$ , por la Proposición 3.12,  $x_0 \in \partial H_2 \cap \partial H_0$ . Sean  $\hat{R}_1$  y  $\hat{R}_2$  las ramas tales que  $R_i(x_0) = y_0$ ,  $i = 1, 2$ ; se tiene que  $\lim_{x \rightarrow x_0} R_1'(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} R_2'(x) = -\infty$ . Sea  $\Phi$  una función definida en el intervalo abierto  $(x_1, x_0)$  (sin perder generalidad estamos suponiendo que la aludida componente conexas de  $H_0$  está a la izquierda de  $x_0$ ) y  $\Phi$  de clase  $C^\infty$  con  $\lim_{x \rightarrow x_1} \Phi'(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi'(x) = -\infty$ . Usando las ramas que llegan a  $(x_0, y_0)$  y  $(x, y)$  y el argumento de la demostración de la Proposición 3.21 *Caso a*), obtenemos la conclusión.

*Caso II* Si  $\partial f / \partial x(x_0, y_0) = 0$ . Sea  $\hat{R}_1$  una de las ramas que llega a  $(x, y)$  y  $\Phi$  una función que parametriza a  $Z[\partial f / \partial y]$ . Sea  $j_1$  una función  $C^\infty$  que esté definida en el abierto  $(x_1, x_0)$  y en forma análoga a la demostración de la Proposición 3.21, podemos escogerla de tal manera que pegue de clase  $C^1$  a  $\hat{R}_1$  en  $(x, y)$  con  $(x_1, y_0)$  en  $\Phi$ . Análogamente se escoge  $j_2$  para conectar con  $\hat{R}_2$ .

UNIDAD IZTAPALAPA,

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA, MEXICO, D.F.

#### REFERENCIAS

- [1] S. ABHYANKAR, Local Analytic Geometry, Academic Press, New York-London, 1964.
- [2] G. BARBANÇON, Tesis doctoral, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1975.
- [3] H. CARTAN, Cálculo Diferencial, Ediciones Omega, Barcelona, 1975.
- [4] M. GOLUBITSKY AND V. GUILLEMIN, Stable Mappings and their Singularities, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [5] R. C. GUNNING, Lectures on Complex Analytic Varieties, Princeton University Press, 1970.
- [6] R. C. GUNNING AND H. ROSSI, Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965.
- [7] N. KUIPER,  $C^r$ -functions near non-degenerate critical points, Polycopia, Warwick, 1966.

- [8] S. LANG, Algebra, Addison-Wesley, Tokyo, 1969.
- [9] G. LASALLE, *Le théorème de préparation différentiable en classe  $p$* , Ann. Inst. Fourier, **23** (1973), 97-103.
- [10] ———, *Une démonstration du théorème de division pour les fonctions différentiables*, Topology, **12** (1973), 41-62.
- [11] S. LOJASIEWICZ, *Whitney fields and the Malgrange-Mather preparation theorem*, in Lecture Notes in Mathematics, Liverpool Symposium, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, **192** (1972), 106-115.
- [12] B. MALGRANGE, *Le théorème de préparation en géométrie différentiable*, Sem. H. Cartan **15** (1962-1963), caps. 11, 12, 13, 22.
- [13] ———, *The preparation theorem for differentiable functions*, in Bombay Colloquium, Oxford, (1964), 203-208.
- [14] ———, Ideals of Differentiable Functions, Oxford Press, Oxford, 1966.
- [15] J. MATHER, *Stability of  $C^\infty$  mapping III. Finitely determined map-germs*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **35** (1968), 127-156.
- [16] ———, *Stability of  $C^\infty$  mappings I. The division theorem*, Ann. of Math. **87** (1968), 89-104.
- [17] J. MILNOR, *Morse theory*, Ann. of Math. Studies **51** (1963).
- [18] P. MILMAN, *The Malgrange-Mather division theorem. (Versión preliminar)*. 1976.
- [19] R. NARASIMHAN, *Introduction to the theory of analytic spaces*, in Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, **25** (1966), 1-143.
- [20] H. SPÁTH, *Der WeierstraBsche Vorbereitungssatz*, Creele's Journal, **161** (1929), 95-100.
- [21] K. WEIERSTRASS, *Vorbereitungssatz*, Werke **2** (1880), 135.
- [22] H. WHITNEY, Complex Analytic Varieties, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.