Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 23 No. 2, 1978

L'ANNEAU ABSOLUMENT PLAT UNIVERSEL, LES EPIMORPHISMES ET LES PARTIES CONSTRUCTIBLES

PAR JEAN-PIERRE OLIVIER

Introduction

Résumé: on donne une construction agréable de l'anneau absolument plat commutatif unitaire universel associé à un anneau commutatif unitaire. On utilise cette construction pour donner une propriété inédite des épimorphismes d'anneaux commutatifs et une démonstration simple et naturelle du théorème de Chevalley sur les constructibles.

Pour nous un anneau sera toujours commutatif et unitaire, et les morphismes seront unitaires.

La notion d'anneau absolument plat apparaît dans la littérature en 1936 sous la plume de John Von Neumann et sous le nom d'anneau régulier. Les mots anneau régulier ayant un tout autre sens en géométrie algébrique et analytique, Bourbaki a préféré les mots "anneau absolument plat", je me conformerai à cet avis.

Un anneau absolument plat est un anneau dans lequel, pour tout élément a, on peut trouver un élément b vérifiant $aba = a$, auquel cas d'ailleurs il existe un élément c vérifiant $aca = a$ et $cac = c$. La première remarque à faire est que dans un anneau commutatif pour un a donné, l'ensemble des x vérifiant $axa = a$ et $xax = x$, a au plus un élément. A partir de là, on peut construire sans problème l'anneau absolument plat commutatif universel $T(A)$ associé à un anneau commutatif A et montrer que le morphisme naturel $A \to T(A)$ est un épimorphisme. Cette construction et cette propriété ont été exposées au Séminaire Pierre Samuel (1968). Simultanément M. Hochster a donné une construction entièrement différente de $T(A)$ et montré aussi que $A \to T(A)$ était un épimorphisme. (Voir [7]). D'autres auteurs depuis ont repris cette question ([4], [12]).

A l'aide de cette construction, on peut montrer que tout épimorphisme $A \to B$ se favorise canoniquement en $A \to C \to B$ oú $C \to B$ est une surjection plate et $A \to C$ un épimorphisme tel que Spec $C \to$ Spec A soit bijectif. Cette question a été résolue grâce à l'article de Daniel Ferrand [2]. Un théorème similaire peut être démontré pour les morphismes radiciels avec l'anneau absolument plat parfait universel associé à un anneau. Je ferai grâce au lecteur éventuel de cette construction et d'un tel résultat.

Ensuite je donne une démonstration du cas local d'un théorème de Chevalley qui dit essentiellement que si $f: A \to B$ est un morphisme de présentation finie alors Spec f (Spec B) est un ouvert constructible de Spec A. Je présente cette démonstration parceque je trouve qu'elle est plus "naturelle" et moins chère que les autres démonstrations connues.

Je n'aborderai pas la globalisation du foncteur T, les résultats obtenus à partir de là étant trop faibles.

§ 1

Toute la construction va reposer sur le lemme suivant:

LEMME. *Soit $a \in A$ un anneau commutatif. Si il existe un $x \in A$ tel que $axa = a$ alors il existe un et un seul é;ément $a^{(-1)}$ tel que $aa^{(-1)}\, a = a$ et $a^{(-1)}\, aa^{(-1)} = a^{(-1)}$. Cet élément s'il existe sera appelé l'inverse ponctuel de a.*

Quant à l'existence il suffit de poser $a^{(-1)} = xax$ et de calculer $a(xax)a$ et $(xax)\, a(xax)$.

Pour démontrer l'unicité nous devons d'abord remarquer que aA est engendré par un idempotent, à savoir ax. Si deux idempotents engendrent le même idéal ils sont égaux. Nous noterons $e(a)$ l'idempotent engendrant aA.

Si a_1 vérifie les équations $aa_1a = a$, $a_1aa_1 = a_1$ alors $e(a) = aa_1$ puisque aa_1 est un idempotent engendrant aA; et $1 - e(a) + a$ admet $1 - e(a) + a_1$ pour inverse. D'après l'unicité de l'inverse, j'ai: $1 - e(a) + a_1 = 1 - e(a) + a^{(-1)}$ donc $a_1 = a^{(-1)}$.

Ce lemme n'appartient pas à la théorie des anneaux mais à la théorie des lois de compositions partielles associatives. Son énoncé et sa démonstration dans ce cadre demandait trop de préliminaires pour être faits ici.

L'unicité de l'inverse ponctuel nous permet de construire une solution au problème universel suivant: soit S une partie de l'anneau A, trouver un morphisme d'anneaux $f: A \to B$ tel que tout élément $s \in S$ ait une image ayant un inverse ponctuel dans B et tout morphisme g ayant cette propriété se factorise de manière unique par f. En effet le morphisme g se prolonge de manière unique à $A[T_s]_{s\in S}$ en posant $g(T_s) = g(s)^{(-1)}$ et cette extension de g s'annule sur l'idéal J engendré par les $sT_ss - s$ et les $T_ssT_s - T_s$. Donc l'anneau $S^{(-1)}\, A = A[T_s]/J$ est solution du problème universel posé. La combinaison des problèmes universels résolus par les objets écrits permit d'affirmer que si (S_i) est une famille de parties de A nous avons $(\cup S_i)^{(-1)}\, A = \otimes\, S_i^{(-1)}\, A$. Nous allons identifier $s^{(-1)}A$. Dans l'anneau $A_s \times (A/sA) = B$, $(s/1, 0)$ a un inverse ponctuel. Nous allons montrer que B est solution du problème universel posé. Soit g: $A \to C$ un morphisme tel que $g(s)$ ait un inverse ponctuel. Appelons e l'idempotent $g(s)g(s)^{(-1)}$, u le morphisme $C \to C/eC$ et $v: C \to C/(1 - e) = Ce$. Nous avons $1 = v(e) = vg(s)v(g(s)^{(-1)})$ donc vg se factorise de manière unique à travers A_s, de même $ug(s) = u(eg(s)) = u(e)ug(s) = 0$ donc ug se factorise de manière unique à travers A/sA, d'où l'existence d'une factorisation unique de g à travers B.

§ 2

DÉFINITION. *Un anneau A est dit absolument plat si tout ses éléments ont un inverse ponctuel.*

On sait que ceci est équivalent à tout A-module est plat ou encore à Spec A est séparé et A est réduit, ou encore à, pour tout idéal premier x de A, A_x est un corps. Remarquons que tout épimorphisme ayant pour source un anneau absolument plat est surjectif: en effet si $f:A \to B$ est un tel épimorphisme, décomposons-le en is oú s est surjective et i injective; i est un épimorphisme ayant une source absolument plate, i étant injectif est aussi fidèlement plat et il est bien connu et en tout cas facile à démontrer qu'un épimorphisme fidèlement plat est bijectif. Allons $-$ y. Soit $i:C \to B$ un épimorphisme fidèlement plat. Le morphisme $i \otimes B$: $B \to B \otimes_C B$ est un épimorphisme (puisqu'obtenu par changement de base à partir d'un épimorphisme) ayant une section (la multiplication) c'est donc un isomorphisme. Comme i est fidèlement plat il descend les isomorphismes, donc i est lui-même un isomorphisme.

En fait, on peut alors démontrer que si $A/\mathrm{Nil}\,A$ est absolument plat et sil $\mathrm{Nil}\,A$ est T-nilpotent (rappelons qu'un idéal J est dit T-nilpotent, si pour toute suite $(a_i)_{i \in N}$ d'éléments de J il existe un entier n tel que $\prod_{i \leq n} a_i = 0$), alors tout épimorphisme de source A est surjectif. Je ne sais pas si la réciproque est vraie, la partie non triviale pour l'instant étant: tout épimorphisme de source A est surjectif entraîne que $\mathrm{Nil}\,A$ est T-nilpotent.

PROPOSITION. *Soit A un anneau,*
i) *pour toute partie S de A, $A \to S^{(-1)}A$ est un épimorphisme bijectif sur les spectres,*
(ii) *l'anneau $A^{(-1)}A$ est absolument plat, nous le désignerons par $T(A)$.*

i) est conséquence des faits:
1—$A \to (A/sA) \times A_s$ est un épimorphisme bijectif sur les spectres,
2—$S^{(-1)}A = \otimes_{s \in S} s^{(-1)}A$
3—Les propriétés "épimorphismes" et "surjectives sur les spectres" se conservent par tensorisation.
4—Un épimorphisme est injectif sur les spectres.

ii) Nous allons montrer que pour tout idéal premier x de $T(A)$, $T(A)_x$ est un corps. En effet $T(A)_x$ a un spectre connexe, ses seuls idempotents sont 0 ou 1, par suite un $a \in A$ ayant un inverse ponctuel dans $T(A)$ donc aussi dans $T(A)_x$ va dans ce dernier être nul ou inversible. Ceci veut dire que l'image de A dans $T(A)_x$ est intègre et que $T(A)_x$ contient le corps de fractions K de cette image. Comme $A \to T(A)_x$ est un épimorphisme, $K \to T(A)_x$ aussi, donc est un isomorphisme.

§ 3

La topologie de Spec $T(A)$ est facile à construire à partir de celle de Spec A (en fait, elle est bien connue, voir [5]). Dans Spec $T(A)$ les ensembles de la forme $D_A(a)$ et $V_A(a)$, $a \in A$, sont ouverts et fermés, par suite les ensembles de la forme

$$(F) \qquad\qquad V_A(J) \cap D_A(f),$$

oú J est un idéal de type fini de A et $f \in A$, le sont aussi.

Considérons sur Spec A la topologie la moins fine pour laquelle ces ensembles sont ouverts. Elle est séparée: soient p et q deux idéaux premiers distincts, soit f un élément de l'un mais pas de l'autre, $D(f)$ et $V(f)$ les séparent dans la topologie ainsi construite. Elle est moins fine que la topologie de Spec $T(A)$ qui est compacte, donc elle lui est égale. Les ouverts et fermés de Spec $T(A)$ sont appelés les parties constructibles de Spec A, ce sont les réunions finies d'ensembles de la forme (F).

L'ensemble $V(J) \cap D(f)$, oú J est un idéal de type fini de A et $f \in A$, est l'image du spectre de $(A/J) \otimes A_f$ par le morphisme $A \to (A/J) \otimes A_f$, qui est de présentation finie, et comme un produit fini de morphismes de présentation finie est de présentation finie, une partie constructible de Spec A est l'image du spectre d'un morphisme de présentation finie. Le théorème de Chevalley sur les constructibles est la réciproque de cette remarque.

(Théorème de Chevalley sur les constructibles). Soit $f: A \to B$ un morphisme de présentation finie, alors l'image de Spec B *dans* Spec A *par* Spec f *est constructible.*

Nous savons que le morphisme f s'écrit comme le composé de l'injection canonique $A \to A[T_1, \cdots, T_n]$ et de la surjection $A[T_1, \cdots, T_n] \to A[T_1, \cdots, T_n]/J$ où J est un idéal de type fini de $A[T_1, \cdots, T_n]$. Le fermé $V(J)$ de Spec $A[T_1, \cdots, T_n]$ est constructible puisque J est de type fini. Il nous faut donc démontrer que l'image d'un constructible de Spec $A[T_1, \cdots, T_n]$ dans Spec A est un constructible de Spec A. Il suffit évidemment de démontrer cela dans le cas $n = 1$.

Comme l'image d'une réunion est la réunion des images on se ramène à démontrer: soit J un idéal de type fini de $A[T]$ et f un élément de $A[T]$ alors l'image de $V(J) \cap A(f)$ est constructible dans Spec A. On se ramène ainsi à démontrer que (P): "si J est un idéal de type fini de $A[T]$ l'image par Spec $A[T]/J \to$ Spec A d'un ouvert affine spécial du premier est un ouvert pour la topologie constructible dans Spec A." En tensorisant par $T(A)$ on se remène à démontrer ce qui précède dans le cas où A est absolument plat: en effet, considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "t"'] & A[T]/J = C \arrow[d, "u"] \\ T(A) \arrow[r, "s"'] & T(A)\ [T]/JT(A)[T] = D; \end{tikzcd}$$

si je démontre la propriétè (P) pour les anneaux absolument plats, l'image par s du spectre de D est un ouvert et fermé du spectre de $T(A)$; par ailleurs comme t est bijectif sur les spectres, u est surjectif sur les spectres; l'image par r du spectre de C est l'image par t de l'image par s du spectre de C, c'est donc bien un ouvert constructible du spectre de A. Dans la suite l'amneau A sera absolument plat.

1° fait: il existe une décomposition de l'unité $1 = \Sigma e_i$ en idempotents deux à deux orthogonaux de A telle que, pour tout i, l'idéal $(J + e_iA)/e_iA$ de $(A/e_iA)[T]$ soit engendré par un polynome unitaire ou soit l'idéal nul.

Pour démontrer cela on utilise le fait que $k[T]$ est un anneau principal si k

est un corps. Pour tout $p \in \operatorname{Spec} A$, l'idéal $J \otimes k(p)$ de $k(p)[T]$ est monogéne, il est soit engendré par un polynome unitaire, soit nul. Comme J est de type fini et la tensorisation par $k(p)$ est une localisation, cette propriété se remonte à un voisinage de p, i.e., à un ouvert et fermé contenant p. On utilise la compacité de Spec A pour obtenir un recouvrement fini ouvert et fermé que l'on transforme en partition. On se ramène donc à démontrer que: "si A est absolument plat, l'image d'un ouvert affine spécial de $A[T]$ (respectivement $A[T]/fA[T]$ où f est unitaire) est un ouvert de Spec A".

2° fait: l'image de Spec $A[T]/J$ dans Spec A est ouvert (si J est de type fini, bien sûr) c'est une conséquence sans problème du 1° fait.

3° fait: soit f un élément de $A[T]$, l'image de $D(f)$ dans Spec A est un ouvert. Nous allons démontrer cela par récurrence sur le degré de f. Remarquons d'abord que si le coefficient dominant de f est inversible, l'image de $D(f)$ est Spec A tout entier. Soit a le coefficient dominant de f. L'image de $D(f)$ est union de Spec A_a et de l'image de l'ouvert $D(\bar{f})$ du spectre de l'anneau $(A/aA)[T] = B$ dans le spectre de l'anneau A/aA, où $\bar{f}$ est l'image de f dans B. Le degré de $\bar{f}$ est strictement plus petit que celui de f. On se ramène ainsi, aprés un nombre fini de pas, au cas où $f = 0$ et alors l'image est vide.

4° fait: soit f un polynome unitaire de $A[T]$, $B = A[T]/fA[T]$ est entier sur A, en particulier $B/\operatorname{Nil} B$ est absolument plat (les morphismes entiers baissent la dimension de Krull: les idéaux premiers de B sont maximaux) et tout épimorphisme plat de source B est surjectif donc tout ouvert affine spécial est de forme $V(e)$ où e est un idempotent de B. Donc les points de l'ouvert affine spécial sont les points de $A[T]/(fA[T] + eA[T])$ dont l'image dans Spec A est un ouvert d'aprés le 2° fait.

Un corollaire immédiat de ce résultat est le fameux théorème d'ouverture d'un morphisme plat et de présentation finie démontré par Grothendieck. Réciproquement d'ailleurs on voit que le théorème de Chevalley est un cas particulier de celui-ci.

Pour qu'un morphisme $f: A \to B$ de présentation finie soit ouvert il faut et il suffit qu'il soit générisant, i.e., que tout idéal premier q de B le morphisme $A_{f^{-1}(q)} \to B_q$ soit surjectif sur les Spectres. Un morphisme plat vérifie évidemment cette propriété.

COROLLAIRE. *Un morphisme plat et de présentation finie est ouvert.*

THÉORÈME. *Soit $f: A \to B$ un épimorphisme d'anneaux. Alors f se factorise canoniquement en pg, où g est un épimorphisme qui induit une bijection sur les Spectres et où p est surjectif et plat.*

Considérons le carré commutatif

$$\begin{array}{ll} A & \to T(A) \\ \downarrow & \quad\downarrow \\ B & \to T(A) \otimes_A B = T(B) \end{array}$$

et le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} C & \to & T(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \to & T(B) \end{array}$$

La flèche verticale de droite est surjective puisque c'est un épimorphisme de source absolument plate, puisqu'obtenue par changement de base à partir d'un épimorphisme. Donc $p: C \to B$ est surjectif. Il nous reste à démontrer que p est plat. Pour cela nous utilisons le résultat suivant de Daniel Ferrand: "Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & D \\ t\downarrow & & \downarrow u \\ B & \xrightarrow[s]{} & E \end{array}$$

un carré cartésien d'anneaux où u est surjectif.

Soit P un A module tel que $B \otimes_A P$ soit un B module plat et $D \otimes_A P$ soit un D module plat, alors P est un A module plat".

Appliquons cela à notre carré cartésien avec $P = B$. Nous avons $B \otimes_C B = B$, c'est donc un B module plat et $T(A) \otimes_C B$ est $T(A)$ plat, puisque $T(A)$ est absolument plat. Donc p est une surjection plate. Il nous reste à démontrer que le morphisme canonique $A \to C$ est un épimorphisme qui remonte tous les idéaux premiers de A. Il remonte tous les idéaux premiers parce que $A \to T(A)$ le fait.

Maintenant $A \to C$ est un épimorphisme. En effet, soit $q \in V(J)$ où J est le noyau de p, considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} C_q & \to & T(A) \otimes_C C_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ B \otimes_C C_q & \to & T(B) \otimes_C C_q \end{array}$$

$T(A) \otimes_C C_q$ est un corps donc la flèche de droite est un isomorphisme il en est de même de $C_q \to B_q$ donc $A \to C_q$ est un épimorphisme. Maintenant si $q \notin V(J)$, Spec $C_q \cap V(J) = \emptyset$, donc l'anneau $B \otimes_C C_q$ nul donc $C_q \to T(A) \otimes_C C_q$ est un isomorphisme donc $A \to C_q$ est un épimorphisme, $T(A) \otimes_C C_q$ étant un quotient de $T(A)$. Puisque pour tout idéal premier q de C, $A \to C_q$ est un épimorphisme $A \to C$ en et un aussi.

Daniel Ferrand pense que ce résultat, joint à l'existence d'un schéma absolument plat universel au dessus de tout schéma, qui de plus est affine, permettra de démontrer que tout monomorphisme quasi-compact de schémas est quasi-affine (ce que a étè démontré par Raynaud dans l'hypothèse de platitude, et par Ferrand sous l'hypothése d'une base noethèrienne).

UNIVERSITÉ PAUL VALÉRY, MONTPELLIER.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. W. BREWER, E. A. RUTTER, et J. J. WATKINS, *Coherence and weak global dimension of R [[X]] when R is Von Neumann Regular*, J. Algebra, **46**(1977), 278–289.

[2] D. FERRAND, *Conducteur et descente*, à paraître.

[3] ———, Morphismes entiers universellement ouverts, à paraître.

[4] F. GIROLAMI, e S. GUAZZONE, *Spezzamenti e omomorfismi di Gelfand*, Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universitá di Modena, XXIII(1974), 1–19.

[5] A. GROTHENDIECK and J. A. DIEUDONNÉ, *Eléments de Géométrie algébrique* (I).

[6] R. C. HEITMAN, *A connected absolutely flat scheme*, à paraître.

[7] M. HOCHSTER, *Prime ideal structures in commutative rings*, Trans. Amer. Math Soc., **142**(1969), 43–60.

[8] D. LAZARD, *Autour de la platitude*, Bull. Soc. Math France, **97**(1969), 81–128.

[9] J. V. NEUMANN, *On regular rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA.

[10] J. P. OLIVIER, *Anneau absolument plats universels et épimorphismes d'anneaux*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér, A–B **266**(1968), p. 317.

[11] ———, Epimorphismes immergeants de Ann, à paraître.

[12] N. POPESCU et C. Vraciu, *Sur la structure des anneaux absolument plats commutatifs*, J. Algebra **40**(1976), 364–383.

[13] SÉMINAIRE PIERRE SAMUEL (algèbre commutative), les épimorphismes d'anneaux (1967–1968), Secrétariat Mathématique, II rue Pierre et Marie Curie, 75 Paris 5ème.