Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 25, No. 1, 1980

SUR LES ALGÈBRES NORMÉES SANS DIVISEURS TOPOLOGIQUES DE ZÉRO

PAR MOHAMED LAMEI EL-MALLAH ET ARTIBANO MICALI

Dans cette note, nous généralisons un résultat de Kaplansky [6] en démontrant que toute **R**-algèbre normée, alternative à droite et sans diviseurs topologiques de zéro est isomorphe à **R**, **C**, **H** ou $\mathscr{C}$, l'algèbre des réels, des complexes, des quaternions et de Cayley respectivement. Si A est une **R**-algèbre normée, à puissances associatives, flexible, sans diviseurs topologiques de zéro et qui vérifie la condition: quels que soient x et y dans A, l'associateur (x, y, y) commute avec x ou y alors A est alternative, donc isomorphe à **R**, **C**, **H** ou $\mathscr{C}$. Nous donnons un exemple qui montre que cette condition est nécessaire pour que l'on ait l'isomorphisme. Par ailleurs, si A vérifie toutes les conditions précédentes sauf "flexible," A est encore de dimension finie 1, 2, 4 ou 8.

1. Préliminaires

Par la suite, A désigne une algèbre sur les réels. Nous ne supposons pas que A soit de dimension finie ni que A soit unitaire. On dira que A est alternative à droite si l'associateur vérifie $(x, y, y) = 0$ quels que soient x, y dans A; A est à puissances associatives si pour tout x dans A, la sous-algèbre $A(x)$ de A engendrée par x est associative; A est flexible si $(y, x, y) = 0$ quels que soient x, y dans A. On dira que A est normée s'il existe une application $\|\;\| : A \to \mathbf{R}$ vérifiant les conditions suivantes : (i) $\|x\| \geq 0$ pour tout x dans A et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$; (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ pour tout x dans A et pour tout α dans **R**; (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, quels que soient x et y dans A; (iv) $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$, quels que soient x et y dans A. Une algèbre normée dans laquelle $\|xy\| = \|x\|\,\|y\|$ quels que soient x et y dans A est appelée absolument valuée.

LEMME 1.1. *Soient A une R-algèbre à puissances associatives sans diviseurs de zéro et $e \neq 0$ un idempotent de A. Alors e est l'élément unité de A.*

La décomposition de Peirce associée à e [1] est: $A = A_1 + A_{1/2} + A_0$ où les sous-espaces A_i sont définis par, $A_{1/2} = \{x/ex + xe = x\}$, $A_i = \{x/ex = xe = ix\}$ $(i = 0, 1)$. Comme A est sans diviseurs de zéro, $A_0 = 0$. Montrons que $A_{1/2} = 0$, donc e est l'élément unité de A. En effet, l'identité $(x, x, x^2) = 0$, valable pour tout x dans A, entraîne que $(x, x, xy + yx) + (x, y, x^2) + (y, x, x^2) = 0$ quels que soient x, y dans A. Si l'on pose $y = e$ et $x \in A_{1/2}$ on a $0 = (x, e, x^2) + (e, x, x^2) = (xe + ex)x^2 - x(ex^2) - e(xx^2) = -e(xx^2)$ car $x^2 \in A_1 + A_0 = A_1$ d'après les relations de Peirce [1]. Or, A étant sans diviseurs de zéro, on a $x = 0$.

2. Algèbres Absolument Valuées

Il est évident qu'une algèbre absolument valuée est sans diviseurs de zéro. Ingelstam a démontré que toute **R**-algèbre absolument valuée, à puissances associatives et à élément unité est isomorphe à **R**, **C**, **H** ou $\mathscr{C}$ [4]. D'autre part, Urbanik et Wright ont démontré le même résultat pour toute **R**-algèbre absolument valuée à élément unité. En utilisant le lemme 1.1., on a:

THEOREME 2.1. *Si A est une* **R**-*algèbre absolument valuée à puissances associatives, alors A est isomorphe à* **R**, **C**, **H** *ou* $\mathscr{C}$.

Soit x un élément non nul de A; la sous-algèbre $A(x)$ engendrée par x est associative et commutative, donc isomorphe à **R** ou **C** (cf. [5] th. 3). Ceci nous montre qu'il existe un idempotent $e \neq 0$ dans A et en appliquant le lemme 1.1., e est l'élément unité de A. D'après un des résultats précédents, A est isomorphe à **R**, **C**, **H** ou $\mathscr{C}$.

THEOREME 2.2. *Si A une* **C**-*algèbre absolument valuée à puissances associatives, alors A est isomorphe à* **C**.

En effet, par restriction des scalaires aux réels, on voit que l'algèbre A vérifie les conditions du théorème 2.1, donc A est isomorphe à **R**, **C**, **H** ou $\mathscr{C}$ et comme A est également une algèbre complexe, alors A est isomorphe à **C** (cf. [4], lemme 1.1).

3. Algèbre Normée Sans Diviseurs Topologiques de Zéro

Si A est une algèbre normée, un élément $x \neq 0$ de A est appelé un diviseur topologique de zéro s'il existe une suite $\{y_n\}$ d'éléments de A telle que $\|y_n\| = 1$ pour tout n et $xy_n \to 0$ ou $y_n x \to 0$. Il est à noter qu'une algèbre absolument valuée est sans diviseurs topologiques de zéro.

THEOREME 3.1. (Kaplansky)—*Soit A une* **R**-*algèbre normée associative et sans diviseurs topologiques de zéro. Alors A est isomorphe à* **R**, **C**, *ou* **H**. (cf. [6], pour la démonstration).

THEOREME 3.2. *Soit A une* **R**-*algèbre normée alternative à droite et sans diviseurs topologiques de zéro. Alors A est isomorphe à* **R**, **C**, **H** *ou* $\mathscr{C}$.

Démonstration I. L'algèbre A est sans diviseurs de zéro, car il est clair que tout diviseur de zéro est un diviseur topologique de zéro. Donc A est alternative [7]. Si $x \neq 0$ est un élément de A, la sous-algèbre $A(x)$ est associative et commutative. D'après le théorème 3.1, $A(x)$ est isomorphe à **R** ou **C**, c'est-à-dire qu'il existe un idempotent $e \neq 0$ dans A. Comme A est à puissances associatives, e est l'élément unité de A (cf. lemme 1.1). Pour tout x dans A, la sous-algèbre $A(e, x)$ engendrée par e et x est isomorphe à **R** ou **C**. Il s'ensuit que A est quadratique donc de dimension finie [2] et le fait que A soit sans diviseurs de zéro entraîne que A est isomorphe à **R**, **C**, **H** ou $\mathscr{C}$.

Démonstration II. On a vu dans la première démonstration que A est alternative et sans diviseurs de zéro. Si A est associative, on a le résultat de

Kaplansky. Supposons que A ne soit pas associative, donc il existe un élément $x \neq 0$ dans le centre $Z(A)$ de A (cf. [8], th. A). Comme $Z(A)$ est associative et commutative et sans diviseurs topologiques de zéro, alors $Z(A)$ est isomorphe à **R** ou **C**. Dans ce cas A est une algébre de dimensions 8 sur $Z(A)$ (cf. [8], Cor. 1). Il s'ensuit que A est de dimension 8 ou 16 sur **R**. Le cas 16 est à exclure, donc A est une **R**-algèbre alternative sans diviseurs de zéro de dimension 8. Ceci nous dit que A est isomorphe à $\mathscr{C}$.

THEOREME 3.3. *Soit A une* **R**-*algèbre normée à puissances associatives, commutative et sans diviseurs topologiques de zéro. Alors A est isomorphe à* **R** *ou* **C**.

On a déjà vu qu'il existe un élément unité e dans A. Si pour tout élément $x \neq$ o de A, x et e sont linéairement dépendants, alors A est isomorphe à **R**. Supposons qu'il existe x dans A tel que x et e sont linéairement indépendants donc la sous-algèbre $A(e, x)$, engendrée par e et x est isomorphe à **C**, c'est-àdiré, il existe un élément i dans A tel que $i^2 = -e$ et $A(e, x) = [e, i]$, où $[e, i]$ désigne l'espace engendré par e et i. Démontrons que $A = A(e, x)$. En effet, si y est un élément de A linéairement indépendant à e, $A(e, y)$ est isomorphe à **C**, c'est-à-dire $A(e, y) = [e, j]$ où $j^2 = -e$. Puisque A est commutative, on a $(i - j)(i + j) = 0$, donc $i - j = 0$ ou $i + j = 0$, car A est sans diviseurs de zéro, soit $j = \pm i$, i.e., $A = A(e, x)$.

PROPOSITION 3.4. *Soit A une* **R**-*algèbre normée à puissances associatives et sans diviseurs topologiques de zéro telle que quels que soient x, y dans A, (x, y, y) commute avec x. Alors A est isomorphe à* **R**, **C**, **H** *ou* $\mathscr{C}$.

Tout d'abord il est à noter qu'il existe un élément unité e dans A et e est le seul élément idempotent non nul dans A. Démontrons que $(x, y, y) = 0$ quels que soient x, y dans A donc d'après le théorème 3.2., on a le résultat cherché. En effet, la condition (x, y, y) commute avec x quels que soient x, y dans A entraîne que (x, y, y) commute également avec y, car $(x, y, y) = (x + y, y, y)$ commute avec x et avec $x + y$. Supposons qu'il existe x et y dans A tels que la sous-algèbre $A((x, y, y))$ engendrée par (x, y, y) soit isomorphe à **C**. Alors $A((x, y, y)) = [e, i]$ où $i^2 = -e$. Il s'ensuit que $A(x)$ et $A(y)$ sont isomorphes à **C**, d'où $A(x) = [e, j]$ et $A(y) = [e, k]$ avec $j^2 = k^2 = -e$. Comme i comme avec j et avec k, alors $j = \pm i$ et $k = \pm i$ car A est sans diviseurs de zéro. Il vient que $(x, y, y) = 0$. Ceci nous montre que, pour chaque deux éléments x, y dans A il existe α dans R, tel que $(x, y, y) = \alpha e$. Soient maintenant x, y deux éléments quelconques dans A. Si $A(x)$ ou $A(y)$ est isomorphe à R, on a $(x, y, y) = 0$. Supposons que $A(x)$ et $A(y)$ soient isomorphes à **C**. Alors $x = \alpha_1 e + \beta_1 i_0$ et $y = \alpha_2 e + \beta_2 j_0$, où $i_0^2 = j_0^2 = -e$. Il vient que $(x, y, y) = \beta_1 \beta_2^2 (i_0, j_0, j_0)$. Or il est évident que $(i_0 j_0, j_0, j_0) = (i_0, j_0, j_0) j_0$. Comme $(i_0 j_0, j_0, j_0) = \alpha_3 e$ et $(i_0, j_0, j_0) = \alpha_4 e$ où $\alpha_3, \alpha_4 \in$ **R**, alors $\alpha_3 e = (\alpha_4 e) j_0 = \alpha_4 j_0$, d'où $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, soit $(i_0, j_0, j_0) = 0$ ou encore $(x, y, y) = 0$.

PROPOSITION 3.5. *Soit A une* **R**-*algèbre normée à puissances associatives flexible et sans diviseurs topologiques de zéro telle que quels que soient x, y dans A, (x, y, y) commute avec x ou avec y. Alors A est isomorphe à* **R, C, H** *ou $\mathscr{C}$.*

En effet, la condition (x, y, y) commute avec x ou y quels que soient x, y dans A entraîne que (x, y, y) commute avec y, car si (x, y, y) commute avec x, alors $(x, y, y) = (x + y, y, y)$ commute avec $x + y$ ou avec y donc commute avec y. Soient x, y deux éléments quelconques dans A et e l'élément unité de A. Si $A(x)$ ou $A(y)$ est isomorphe à $\mathbf{R}$, alors $(x, y, y) = (y, y, x) = 0$. Supposons que $A(x) = [e, i]$ et $A(y) = [e, j]$ avec $i^2 = j^2 = -e$. Si i commute avec j, alors $j = \pm i$, soit encore $(x, y, y) = (y, y, x) = 0$. Supposons que i ne commute pas avec j. Montrons aussi que $(x, y, y) = (y, y, x) = 0$. En effet, il est évident que $(ij, j, j) = (i, j, j)j$ (1). Comme A est flexible, alors $(i, j, j) + (j, j, i) = 0$ (2) et d'après l'identité de Teichmuller on a $(ji, j, j) - (j, ij, j) + (j, i, j^2) = j(i, j, j) + (j, i, j)j$ soit $(ji, j, j) = j(i, j, j)$ (3). L'associateur $(x, x, x) = 0$ pour tout x dans A s'écrit sous la forme du commutateur $(x, x^2) = 0$ lequel entraîne que $(xy + yx, x) + (x^2, y) = 0$ quels que soient x, y dans A. D'après cette identité, on a $(ij + ji, i) = 0$ et $(ij + ji, j) = 0$. Puisque A est sans diviseurs de zéro et i ne commute pas avec j, il vient que $ij + ji = \alpha e$, où $\alpha \in \mathbf{R}$ (4). D'après (1), (3) et (4), on a $(i, j, j)j + j(i, j, j) = 0$. Or, on a montré que (i, j, j) commute avec j, donc $2j(i, j, j) = 0$, soit $(i, j, j) = 0$ et d'après (2), on a $(j, j, i) = 0$. Nous avons démontré que quels que soient x, y dans A, $(x, y, y) = (y, y, x) = 0$, c'est-à-dire A est alternative et la démonstration s'achève en utilisant le théorème 3.2.

EXEMPLE 3.6. Considérons l'algèbre des quaternions **H** sur les réels **R** avec comme table de multiplication relativement à une base $\{e, e_1, e_2, e_3\}$ de **H** sur **R**, la suivante:

	e	e_1	e_2	e_3
e	e	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e$	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e$

Soit $\| \, \|$ la norme canonique qui fait de **H** une algèbre absolument valuée. Sur l'espace vectoriel sousjacent à **H**, on définit une autre multiplication par $x*y = c(xy) + (1 - c)(yx)$ où c est dans $\mathbf{R}$, $c \neq 0, \frac{1}{2}, 1$. Avec cette nouvelle structure **H** est encore une **R**-algèbre que nous noterons $\mathbf{H}^*$. Il est évident que l'élément unité de **H** est encore élément unité de $\mathbf{H}^*$ et il est facile de voir que $\mathbf{H}^*$ est à puissances associatives et flexible. Montrons que $\mathbf{H}^*$ est sans diviseurs de zéro. Supposons que $x*y = 0$ avec x et y dans $\mathbf{H}^*$. On a $c(xy) + (1 - c)(yx) = 0$, donc $c(xy) = (c-1)(yx)$, d'où

$$xy = \frac{c-1}{c} yx.$$

Comme H est absolument valuée, si $\| x \| \neq 0$ et $\| y \| \neq 0$, alors

$$\left| \frac{c-1}{c} \right| = 1$$

ce qui est absurde, car $c \neq \frac{1}{2}$. Ceci nous montre que $\| x \| = 0$ ou $\| y \| = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $y = 0$. Si l'on pose $c = \frac{1}{3}$, alors $\mathbf{H}^*$ est normée avec la valeur absolue $\| \ \|$ de $\mathbf{H}$. En effet, $\|x^*y\| = \| \frac{1}{3}(xy) + \frac{2}{3}(yx) \| \leq \frac{1}{3} \| x \| \| y \| + \frac{2}{3} \| y \| \| x \| = \| x \| \| y \|$. Démontrons que $\mathbf{H}^*$ est sans diviseurs topologiques de zéro. Supposons qu'il existe $x \neq 0$ dans $\mathbf{H}^*$ qui est diviseur topologique de zéro; il existe alors une suite y_n d'éléments dans $\mathbf{H}^*$ où $\| y_n \| = 1$ telle que $x^*y_n \to 0$ ou $y_n{}^*x \to 0$. Supposons que $x^*y_n \to 0$ c'est-à-dire pour tout $\epsilon > 0$ réel, il existe un nombre entier $N = N(\epsilon)$ tel que $\| x^*y_n \| < \epsilon$ pour tout $n > N$, d'où $\| xy_n + 2y_n x \| < 3\epsilon$ ou encore, $\| x^{-1} \| \| xy_n + 2y_n x \| \| x^{-1} \| < 3(\| x \|^{-1})^2\epsilon$. L'algèbre H étant absolument valuée et associative, on a $\| y_n x^{-1} + 2x^{-1}y_n \| < 3(\| x \|^{-1})^2\epsilon$ pour tout $n > N$, soit $y_n{}^*x^{-1} \to 0$. Comme $\mathbf{H}^*$ est flexible, on a $y_n{}^*x^*y_n \to 0$ et $y_n{}^*x^{-1*}y_n \to 0$. D'autre part, les éléments x^2, x, e sont linéairement dépendants et comme x est diviseur topologique de zéro alors x et e sont linéairement indépendants. Donc $x^2 + \alpha x + \beta e = 0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, soit $x + \alpha e + \beta x^{-1} = 0$ ou encore $y_n{}^*x^*y_n + \alpha\, y_n{}^2 + \beta y_n{}^*x^{-1*}y_n = 0$. Il s'ensuit que $\alpha y_n{}^2 \to 0$ et comme $\| y_n{}^2 \| = \| y_n \|^2 = 1$, il vient que $\alpha = 0$, donc $x = -\beta x^{-1}$ et $\beta \neq 0$, c'est-à-dire $y_n{}^* x \to 0$. Maintenant, $x^*y_n \to 0$ et $y_n{}^*x \to 0$ entraînent $xy_n + 2y_n x \to 0$ et $y_n x + 2xy_n \to 0$, soit $xy_n + y_n x \to 0$ et $xy_n - y_n x \to 0$ ou encore $xy_n \to 0$, ce qui est impossible car H est absolument valuée. On donne une démonstration analogue en partant de $y_n{}^*x \to 0$.

Cet exemple nous montre que les conditions (i) (x, y, y) commute avec x pour tous x, y de A dans proposition 3.4, et (ii) (x, y, y) commute avec x ou avec y pour tous x, y de A dans proposition 3.5., sont nécessaires. En effet, dans $\mathbf{H}^*$ l'associateur $(e_1 + e_2, e_1, e_1)$ ne commute pas avec $e_1 + e_2$ ni avec e_1 car $(e_1 + e_2, e_1, e_1) = (e_2, e_1, e_1) = (e_2{}^*e_1)^*e_1 + e_2 = -\frac{1}{9}e_2 + e_2 = \frac{8}{9}e_2$. Si l'on avait $(e_1 + e_2, e_1, e_1)$ commute avec $e_1 + e_2$ ou avec e_1, alors e_2 commute avec e_1. Or, $e_2{}^2 = e_1{}^2 = -e$ et le fait que $\mathbf{H}^*$ soit sans diviseurs de zéro entraîne que $e_2 = \pm e_1$ ce qui est absurde.

PROPOSITION 3.7. *Soit A une $\mathbf{R}$-algèbre normée à puissances associatives et sans diviseurs topologiques de zéro telle que quels que soient x, y dans A, (x, y, y) commute avec x ou avec y. Alors A est de dimension finie* 1, 2, 4 *ou* 8.

On sait qu'il existe un élément unité e dans A et si x est un élément de A tel que x et e sont linéairement indépendants, la sous-algèbre $A(e, x)$ est isomorphe à $\mathbf{C}$, c'est-à-dire A est quadratique. Soient x et y deux éléments dans A, si $A(x)$ ou $A(y)$ est isomorphe à $\mathbf{R}$ ou x commute avec y, alors il est facile de voir que $A(e, x, y)$ est isomorphe à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Supposons que x ne commute pas avec y. Alors $A(x) = [e, i]$ et $A(y) = [e, j]$ où $i^2 = j^2 = -e$, $ij \neq ji$, soit $A(e, x, y) = A(e, i, j)$. Démontrons que la dimension de $A(e, i, j)$ est 4. En effet, considérons l'espace $[e, i, j, ij]$. Comme on a déjà vu, $(ij + ji, i) = 0$ et $(ij + ji, j) = 0$ d'où $ij + ji = \alpha e$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$ car i ne commute pas avec j, donc $ji \in [e, i, j, ij]$.

L'associateur $(i, j, j) = (ij)j + i$ commute avec i ou avec j et comme $A((i, j, j))$ est isomorphe à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, le fait que A soit sans diviseurs de zéro entraîne que (i, j, j) est dans $[e, i]$ ou dans $[e, j]$, donc $(ij)j \in [e, i, i, ij]$. Comme $((ij)j + j(ij), j) = 0$, donc $(ij)j + j(ij) \in [e, j]$, soit $j(ij) \in [e, i, j, ij]$. De même, en utilisant l'associateur (j, i, i), on peut démontrer que $i(ij)$ et $(ij)i$ sont dans $[e, i, j, ij]$. Il est clair que e^2, i^2, j^2 sont dans $[e, i, j, ij]$. La sous-algèbre $A(ij)$ est isomorphe à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, c'est-à-dire $ij = \alpha_1 e + \beta_1 k$ où $k^2 = -e$, d'où $(ij - \alpha_1 e) = \beta_1 k$, soit $(ij - \alpha_1 e)^2 = (ij)^2 - 2\alpha_1 ij + \alpha_1^2 e = -\beta_1^2 e$ ou encore $(ij)^2 \in [e, i, j, ij]$. Il s'ensuit que $\dim_{\mathbf{R}}(A(e, x, y)) = 4$ et comme A est sans diviseurs de zéro, alors $A(e, x, y)$ est de division et ceci, quels que soient x et y dans A, ce qui entraîne que A est de division car A est sans diviseurs de zéro. Maintenant A est une $\mathbf{R}$-algèbre quadratique et de division dans laquelle chaque couple d'éléments engendre une sous-algèbre de dimension ≤ 4. D'après le théorème de Kuz'min [9], A est de dimension 1, 2, 4 ou 8.

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II,
FRANCE

REFERENCES

[1] A. A. ALBERT, *Power associative Rings*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 64, n° 3 (1948), 552–593.

[2] A. A. ALBERT, *Absolute valued algebraic algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 763–768.

[3] R. D. SCHAFER, An introduction to non-associative algebras, Academic Press, New-York, 1966.

[4] L. INGELSTAM, Non-associative normed algebras and Hurwitz' problem, Arkiv För Matematik **5** (1964), 231–238.

[5] K. URBANIC AND F. WRIGHT, Absolute valued algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 861–866.

[6] I. KAPLANSKY, *Normed algebras*, Duke Math. J. **16** (1949), 399–418.

[7] I. M. MIHEEV, *A certain identity in right alternative rings* (Russian), Algebra i logika **8** (1969), 357–366.

[8] R. H. BRUCK AND E. KLEINFELD, *The structure of alternative division Rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 878–890.

[9] E. N. KUZ'MIN, Über eine Klasse antikommutative Algebren, Algebra Logika, Sem. 6, nr. 4, 31–50 (1967) (Russisch).