Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 25 No. 2, 1980

SOBRE EL ORDEN DEL MAPEO DE PEGUE DE LAS CELDAS EN $\mathbf{CP}_n^{n+k}$

POR AGRIPINO GARCÍA*

1. Introducción

Sea $W_{n,k}$ la variedad de Stiefel de k-marcos en C^n. En [4] James define un número entero $c(n, k)$ como sigue. Sea

$$\delta: \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \to \pi_{2n-2}(W_{n-1,k-1})$$

el operador frontera de la sucesión de homotopía de la fibración

$$W_{n-1,k-1} \to W_{n,k} \to S^{2n-1} \tag{1.1}$$

y sea $1_{2n-1} \in \pi_{2n-1}(S^{2n-1})$ la identidad. *El número $c(n, k)$ se define como el orden de $\delta(1_{2n-1})$ en el grupo $\pi_{2n-2}(W_{n-1,k-1})$.*

El objeto principal de este trabajo es establecer el siguiente teorema.

Sea M_k el número de Atiyah-Todd ([3], [1]), esto es, el J-orden del haz de Hopf sobre CP^{k-1}.

TEOREMA 1.2. *Si $n \equiv 0 \bmod M_{[(k-1)/2]+1}$ entonces $c(n, k)$ es divisible por $M_k/(n, M_k)$. Aquí (n, M_k) denota el máximo común divisor de n y M_k.*

El número $c(n, k)$ se relaciona con los órdenes de los mapeos de pegue de las celdas del proyectivo complejo de la siguiente manera.

PROPOSICION 1.3. *Si n es grande con respecto a k entonces $c(M_k - n, k)$ es el orden del mapeo de pegue de la última celda del S-dual de CP_n^{n+k-1}.*

Recordamos que el S-dual de CP_n^{n+k-1} es otro proyectivo complejo ([2]).

El Teorema 1.2 y la Proposición 1.3 nos dan una cota inferior para el orden de los mapeos de pegue de las celdas de los proyectivos complejos truncados. La pregunta que podemos hacernos es: ¿cuál es la cota superior para el orden de estos mapeos de pegue? Al respecto damos la siguiente

Conjetura 1.4. *Si $n \equiv 0 \bmod M_{([k-1)/2]+1}$ entonces $c(n, k)$ coincide con $M_k/(n, M_k)$.*

Esta conjetura es cierta para $k \leq 8$ según el trabajo de Ōshima [6].

Finalmente, deseo agradecer al Profesor Samuel Gitler la ayuda que me brindó durante la elaboración de este trabajo.

2. Algunas definiciones

Dos espacios X y Y son del mismo tipo de homotopía estable si existen enteros r y s y una equivalencia homotópica $\Sigma^r X \to \Sigma^s Y$. Sea X un CW

* Durante la elaboración de este trabajo el autor fue becario del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

complejo finito encajado en S^n. Entonces un n-dual de X se define como cualquier sub-complejo de $S^n - X$ que sea retracto por deformación de $S^n - X$. Diremos que X y Y son *S-duales* si X y un n-dual de Y son del mismo tipo de homotopía estable.

Sea CP^n el espacio proyectivo complejo de dimensión compleja n. Si $k \leq n$ entonces CP^{k-1} se encaja como $(2k - 1)$-equeleto de CP^n. Denotaremos con CP_k^n el espacio proyectivo complejo truncado, el cociente CP^n/CP^{k-1}.

La dualidad de Atiyah [2] para espacios de Thom da

TEOREMA 2.1. *Tenemos que CP_n^{n+k-1} y CP_{M-n-k}^{M-n-1} son S-duales, donde M es cualquier mútiplo de M_k, el J-orden del haz de Hopf sobre CP^{k-1}.*

Sea m suficientemente grande con respecto a k y consideremos las composiciones

$$S^{2m} \xrightarrow{i} CP_m^{m+k-1} \xrightarrow{f} S^{2m}$$

donde i es la inclusión y f es un mapeo arbitrario. Denotemos con $c'(m, k)$ el mínimo grado no trivial de las composiciones $f \circ i$.

La relación de $c(n, k)$ con $c'(m, k)$ está dada por la siguiente

PROPOSICION 2.2 *Se tiene $c(n, k) = c'(M - n, k)$, donde M es cualquier múltiplo de M_k.*

Demostración. Como estamos en el caso estable, esto es, n es grande con respecto a k, el $(2n - 1)$-esqueleto de $W_{n,k}$ es ΣCP_{n-k}^{n-1}, la suspensión de CP_{n-k}^{n-1}; ver [7]. Considerando la fibración (1.1) tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglón exacto, donde j es la inclusión ΣCP_{n-k}^{n-1} en $W_{n,k}$ y p es el mapeo cociente a la última celda.

$$\begin{tikzcd}
\pi_{2n-1}(\Sigma CP_{n-k}^{n-1}) \arrow[d, "j_*"] \arrow[dr, "p_*"] & & \\
\pi_{2n-1}(W_{n,k}) \arrow[r] & \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \arrow[r, "\delta"] & \pi_{2n-2}(W_{n-1,k-1})
\end{tikzcd}$$

Como j es la inclusión del $(2n - 1)$-esqueleto, j_* en este diagrama es un epimorfismo (ver [5]), así que es claro que el núcleo de δ es igual a la imagen de p_*. Por definición de $c(n, k)$, el generador del núcleo de δ es $c(n, k) \cdot 1_{2n-1}$. Como la imagen de p_* consta precisamente de las composiciones

$$S^{2n-1} \xrightarrow{g} \Sigma CP_{n-k}^{n-1} \xrightarrow{p} S^{2n-1} \tag{2.3}$$

$c(n, k)$ debe ser el mínimo grado de las composiciones (2.3) y por tanto de las composiciones

$$S^{2M-2n} \xrightarrow{i} CP_{M-n}^{M-n+k-1} \xrightarrow{Dg} S^{2M-2n},$$

donde i, el dual de p, es la inclusión de la primera celda. Esto significa que $c(n, k)$ es precisamente $c'(M - n, k)$ y demuestra la proposición.

3. Demostración de la Proposición 1.3

Por el Teorema 2.1 el S-dual de CP_n^{n+k-1} es CP_{M-n-k}^{M-n-1}, donde M es un múltiplo de M_k. El mapeo de pegue de la última celda es un elemento α de $\pi_{2M-2n-3}(CP_{M-n-k}^{M-n-2})$. Consideremos la cofibración

$$\Sigma^{-1}CP_{M-n-k}^{M-n-1} \xrightarrow{p} S^{2M-2n-3} \xrightarrow{\alpha} CP_{M-n-k}^{M-n-2}$$

Dualizando podemos formar el diagrama

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{tikzcd} CP_n^{n+k-1} & S^{2n} \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "\lambda"] & \Sigma^{-1}CP_{n+1}^{n+k-1} \arrow[l, "D\alpha"'] \arrow[dl, "D(\lambda\alpha)"] \\ & S^{2n} & \end{tikzcd}$$

para cualquier entero λ. Nótese que como dualidad da un isomorfismo de grupos de clases de homotopía estable, $D\alpha$ y α tienen el mismo orden; $D(\lambda\alpha)$ es cero si y sólo si $\lambda\alpha$ lo es.

Sea d el orden de α. Tomando $\lambda = d$ en (3.1) vemos que existe un mapeo

$$f\colon CP_n^{n+k-1} \to S^{2n}$$

tal que $f \circ i$ tiene grado d, así que $c'(n, k)$ es divisor de d, por definición de $c'(n, k)$. Ahora, si tomamos $\lambda = c'(n, k)$ en (3.1), tenemos que $D(\lambda\alpha) = 0$, pues $iD(\alpha) = 0$ y existe una f de grado λ. Entonces $c'(n, k)\alpha = 0$, y d es divisor de $c'(n, k)$. Por la Proposición 2.2 hemos terminado la demostración.

4. La serie de potencias $T(x)$

Sea

$$L(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

una serie de potencias formal con coeficientes racionales. Sea $I(r)$ el conjunto de las series $L(x)$ tales que los coeficientes $a_1, \cdots, a_r$ son enteros. Sea

$$L^N(x) = (1 + \Sigma_{j\geq 1}a_jx^j)^N.$$

TEOREMA 4.1. *Si $L(x) \in I(k)$ y N es un entero tal que $NL(x) \in I(2k + \epsilon)$ para $\epsilon = 0$, 1 ó 2 entonces $L^N(x) \in I(2k + \epsilon)$.*

Demostración. Usando la expansión multinomial tenemos que el coeficiente β_r de x^r en $L^N(x)$ está dado por

$$\beta_r = \Sigma_S\,(N!/S_o! \cdots S_r!)a_1^{S_1} \cdots a_r^{S_r} \qquad (4.2)$$

donde la suma se extiende sobre todas las sucesiones $S = (S_o, \cdots, S_r)$ de enteros no negativos tales que

$$\Sigma\, S_j = N \text{ y } \Sigma_j S_j = r.$$

Veamos el caso $\epsilon = 0$. Supongamos que a_i es entero para $i \leqslant k$ y que Na_i lo es para $i \leqslant 2k$. Veremos que β_r es entero para $r \leqslant 2k$ probando que cada uno de sus sumandos en (4.2) lo es.

Sea B_S el sumando de β_r correspondiente a la sucesión S. Si $S_j = 0$ para $j > [r/2]$ entonces B_S es entero, pues es claramente producto de enteros. Si $S_j \neq 0$ para algún $j > [r/2]$, entonces $S_j = 1$ y $S_i = 0$ si $i > [r/2]$ y $i \neq j$; de no ser así la suma $\Sigma\, iS_i$ sería mayor que r. Entonces

$$B_S = N!/(S_o! \cdots S_k!)a_1{}^{S_1} \cdots a_k{}^{S_k} \cdot a_j,$$

y tenemos

$$\Sigma_{j=0}^{k} S_j = N - 1,$$

y por consiguiente $(N-1)!/S_o! \cdots S_k!$ es entero. Como Na_j es entero, B_S también lo es, y por lo tanto β_r es entero, para $r \leqslant 2k$. Esto demuestra el teorema, ya que los casos $\epsilon = 1,2$ se demuestran de la misma manera.

Para la serie de potencias $T(x) = \log(1+x)/x$ Atiyah y Todd en [3] demostraron el siguiente

TEOREMA 4.3. *La serie $T^n(x)$ está en $I(k-1)$ si y sólo si $n \equiv 0 \bmod M_k$.*

Como una consecuencia de los Teoremas 4.1 y 4.3 tenemos el siguiente

COROLARIO 4.4 *Si $T^n(x)$ está en $I([k-1)/2])$ y N es un entero tal que $NT^n(x)$ está en $I(k-1)$, entonces $nN \equiv 0 \bmod (M_k)$.*

5. Demostración del Teorema 1.2

Supongamos que $n \equiv 0 \bmod M_{[(k-1)/2]+1}$ y sea $m = M_k - n$. Veremos que $c'(m, k)$ es divisible por $M_k/(m, M_k)$; como claramente $(m, M_k) = (n, M_k)$, esto, junto con la Proposición 2.2, demostrará el teorema. Para empezar tenemos que $T^m(x)$ está en $I([k-1)/2])$ por el Teorema 4.3 ya que $m \equiv 0 \bmod M_{[(k-1)/2]+1}$. Sea $N = c'(m, k)$. Veremos que $NT^m(x)$ está en $I(k-1)$.

Sea $f: CP_m^{m+k-1} \to S^{2m}$ un mapeo de grado N en la celda de abajo. Recordemos que

$$KU(CP^r) = Z[\mu]/(\mu^{r+1})$$

es la K-teoría compleja de CP^r, y que la cofibración

$$CP^{m-1} \xrightarrow{j} CP^{m+k-1} \to CP_m^{m+k-1}$$

induce una sucesión exacta corta

$$0 \to K\tilde{U}(CP_m^{m+k-1}) \to KU(CP^{m+k-1}) \xrightarrow{j^*} KU(CP^{m-1}) \to 0$$

en la cual $j^*(\mu) = \mu$. Entonces el núcleo de j^* es el ideal generado por μ^m y $K\tilde{U}(CP_m^{m+k-1})$ es el grupo abeliano libre con base $\mu^m, \cdots, \mu^{m+k-1}$. Similarmente $\tilde{H}^*(CP_m^{m+k-1}; Z)$ es el grupo abeliano libre con base $w^m, \cdots, w^{m+k-1}$, donde w es el generador de dimensión 2 de $H^*(CP^{m+k-1}; Z)$.

Sea β generador de $K\tilde{U}(S^{2m})$. Entonces $ch(\beta)$, el carácter de Chern de β, es generador de $H^{2m}(S^{2m}; Z)$ y tenemos $f^*(ch(\beta)) = Nw^m$.

Escribamos

$$f^*(\beta) = \Sigma_{i=0}^{k-1} a_i \mu^{m+1}$$

en $K\tilde{U}(CP_m^{m+k-1})$. Entonces por la naturalidad del carácter de Chern tenemos

$$Nw^m = \Sigma_{i=0}^{k-1}\, a_i(ch\mu)^{m+i}.$$

Como $ch\mu = e^w - 1$, poniendo $x = ch\mu$ obtenemos $w = \log(1 + x)$ y

$$N(\log(1 + x))^m = x^m\, \Sigma_{i=0}^{k-1}\, a_i x^i,$$

de donde

$$NT^m(x) = \Sigma_{i=0}^{k-1}\, a_i x^i.$$

Como cada a_i es entero, $NT^m(x)$ está en $I(k - 1)$.

Ahora por el Corolario 4.4 tenemos que $mN \equiv 0 \bmod M_k$, y no es difícil ver que esto implica que N, que es $c'(m, k)$, es divisible por $M_k/(m, M_k)$. Esto demuestra el Teorema 1.2.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA, MÉXICO D. F.

REFERENCIAS

[1] J. F. ADAMS, AND G. WALKER *On complex Stiefel manifolds*, Proc. Camb. Phil. Soc. **61**(1965) 81–103.

[2] M. F. ATIYAH; *Thom complexes*, Proc. London Math. Soc. **11**(1961) 291–310.

[3] M. F. ATIYAH AND J. A. TODD *On complex Stiefel manifolds*, Proc. Camb. Phil. Soc. **56**(1960) 342-353.

[4] I. M. JAMES *Cross sections of Stiefel manifolds*, Proc. London. Math. Soc. **8**(1958) 536–547.

[5] R. MOSHER AND M. TANGORA Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper and Row, New York, 1968.

[6] H. ŌSHIMA; *On stable James numbers of stunted complex or quaternionic projective spaces*, Osaka J. Math. **16**(1979) 479–504.

[7] N. E. STEENROD Cohomology operations, Ann. Math. Studies 50, Princeton Univ. Press, Princeton 1965.