Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana Vol. 27, No. 1, 1982

PERPENDICULARIDAD Y LOCALIZACIONES DE WHITNEY

POR LUIS MORENO-ARMELLA*

Introduccion

En la teoria de anillos de funciones diferenciables, uno de los resultados fundamentales es el teorema de Síntesis Espectral, demostrado originalmente por H. Whitney ([10]). En términos generales, este teorema proporciona una descripción de los ideales cerrados en el anillo $C^m(\Omega)$, de funciones con valores reales de clase C^m definidas sobre el abierto Ω de un espacio R^n, en términos de los ideales de polinomios obtenidos al desarrollar las funciones del ideal en cuestión, en polinomios de Taylor alrededor de cada punto de Ω.

El propósito del presente trabajo es básicamente en relación al siguiente problema: Caracterizar las colecciones de ideales de polinomios que son las localizaciones puntuales de un ideal de $C^m(\Omega)$.

Las colecciones de ideales de polinomios que respondan a esta caracterización, las llamaremos colecciones de Whitney.

Es visible que el interés del problema enunciado anteriormente radica en la descripción que, de los ideales cerrados, proporciona el teorema de Síntesis Espectral. En [2], se obtiene un teorema general de caracterización de las colecciones de Whitney correspondientes a ideales de $C^1(\Omega)$. Pasando a los anillos $C^m(\Omega)$, $m \geq 2$, el problema se torna aún mas difícil y queda mucho por hacer todavía.

En este trabajo nos interesamos en el estudio de las colecciones correspondientes a ideales de $C^2(\Omega)$. Sea V una subvariedad de R^n de clase C^k, $k \geq 2$. El teorema 2.1 enseña como "recuperar" el ideal $J^2(V)$, de todas las funciones de clase C^2 definidas sobre R^n y que se anulan sobre V, a partir de los jets perpendiculares a V, de clase C^1. Más precisamente, se demuestra que, dado un jet perpendicular de clase C^1 sobre V, existe una función de clase C^2 definida sobre R^n, que se anula sobre V y cuyas primera y segunda derivadas restringidas a V son, respectivamente, la primera y segunda componentes del jet perpendicular dado.

Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de todos los ideales de $C^2(R^n)$ cuyos ceros son subvariedades de clase C^k, $k \geq 2$ de R^n. A partir del Teorema 2.1 demostramos que existe una correspondencia biunívoca entre los ideales cerrados que están en $\mathscr{F}$, y los $C^2(R^n)$-submódulos cerrados de jets perpendiculares de clase C^1, a C^k-subvariedades, $k \geq 2$, de R^n.

Los resultados obtenidos en el segundo capitulo están dedicados a la demostración de teoremas de caracterización de las colecciones provenientes de ideales $J^2(V)$, V una C^k subvariedad de R^n, $k \geq 1$.

Los resultados de este trabajo están basados en la tesis doctoral del autor, escrita bajo la dirección del Dr. Eugenio Filloy Yague y presentada en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional en el año de 1977.

Cabe observar que los métodos empleados en estas últimas demostraciones (véanse los Teoremas 5.1 y 5.5) difieren sensiblemente para los casos $k = 1$ y $k \geq 2$.

El tercer capítulo está dedicado a estudiar lo que acontece en el plano. Primero estudiaremos la construcción de funciones de clase C^2, cuyos ceros están conformados por una subvariedad de dimensión uno. Además, dicha subvariedad es de clase C^2 excepto en un punto, en donde es estrictamente de clase C^1. Los resultados del segundo capítulo, permiten la construcción de dichas funciones en una vecindad (sobre la subvariedad) de cualquier punto de clase C^2. Las dificultades a resolver se presentarán, por tanto, alrededor del punto estrictamente C^1. En segundo lugar, se estudiará la construcción de funciones de clase C^2, cuyos ceros están conformados por una cúspide. Es decir, por una reunión de dos subvariedades que se intersectan tangencialmente.

La selección de estas situaciones para el estudio de la construcción de funciones de clase C^2 cuyos ceros están dados, no es arbitraria. Los teoremas 3.1 y 3.2 de [5] muestran que la selección de las situaciones consideradas, es la correcta.

Las construcciones que se llevan a cabo en este último capítulo nos proporcionan los elementos indispensables para obtener caracterizaciones de las colecciones de Whitney provenientes de los ideales $J^2(K)$, siendo K un cerrado "estratificable" del plano.

1. Conceptos preliminares

A lo largo de este escrito, R designará el conjunto de los números reales. Sea Ω un subconjunto abierto de R^n. Designaremos por $C^m(\Omega)$ el anillo de funciones de clase C^m, a valores reales, definidas sobre Ω.

Un jet de orden m([1], [6]) sobre un compacto K de R^n es una colección $(f_0, f_1, \ldots, f_m)$ de funciones continuas tales que:

$$f_0: K \to R$$

$$f_r: K \to L_s^r(R^n, R), \qquad r = 1, \cdots, m$$

$L_s^r(R^n, R)$ denota el conjunto de aplicaciones r-lineales simétricas definidas sobre $R^n \times \cdots \times R^n$($r$ veces) a valores en R.

Denotaremos con $\|, \|$ la norma usual de los espacios R^n y también la de $L_s^r(R^n, R)$. ([1]).

Dado $f = (f_0, \ldots, f_m)$ un jet de orden m sobre un compacto K, y dado $a \in K$, se define ([1], [6]):

$$T_a^m F(x) = \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{r!} f_r(a) \cdot (x - a)^r, \qquad \text{para cada } x \in R^n$$

$$(R_a^m F)^k(x) = f_k(x) - D^k T_a^m F(x), \qquad \text{para cada } a, x \in K.$$

La derivada en esta expresión se toma respecto a $x - a$. Se observa que $D^k T_a^m F(x) = \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{r!} f_{k+r}(a) \cdot (x - a)^r$, $k \leq m$.

Un módulo de continuidad es una función $\gamma[0, \infty) \to [0, \infty)$ creciente, continua y cóncava con $\gamma(0) = 0$.

TEOREMA. ([1], [6]). *Sea $F = (f_0, \ldots, f_m)$ un jet de orden m sobre el compacto K de R^n. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *Para $x, y \in K$, $\| (R_x{}^m F)^k(y) \| = 0(\| y - x \|^{m-k})$ cuando $\| x - y \| \to 0$.*

b) *Existe un módulo de continuidad γ tal que*

$$\| (R_x{}^m F)^k(y) \| \leq \| y - x \|^{m-k} \cdot \gamma(\| y - x \|), \qquad \text{para todo } x, y \in K,\ k = 0, \cdots, m.$$

c) *Existe un módulo de continuidad γ_1 tal que*

$$\| T_x{}^m F(z) - T_y{}^m F(z) \| \leq (\| z - x \|^m + \| z - y \|^m) \cdot \gamma_1(\| y - x \|) \text{ para todo } x, y \in K,\ z \in R^n.$$

Un jet de Whitney de clase C^m(orden m) sobre un subconjunto compacto de R^n, es un jet de orden m que satisface alguna de las condiciones equivalentes del teorema precedente. Denotaremos $W^m(K)$ el conjunto de los jets de Whitney de clase C^m definidos sobre K.

TEOREMA DE EXTENSIÓN DE WHITNEY ([10], [8], [6], [1]). *Existe una aplicación lineal $W: W^m(K) \to C^m(\Omega)$, $K \subset \Omega$ tal que, para cada $F \in W^m(K)$ y cada $x \in K$, $D^r(WF)(x) = f_r(x)$, siendo $F = (f_0, \ldots, f_m)$,* y $r \leq m$.

Observación. Sea $E \subset \Omega$ un subconjunto cerrado. Se define $W^m(E)$ así: $F \in W^m(E)$, si y solo si, para cada compacto $K \subset E$, la restricción $f \mid K$ está en $W^m(K)$.

Se demuestra entonces que la aplicación de restricción

$$C^m(\Omega) \to W^m(E) \qquad (m \leq \infty)$$

es sobreyectiva.

Si $f \in C^m(\Omega)$, para cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$, definimos:

$$\| f \|_m{}^K = \sup_{x \in K} \| D^r f(x) \|, \qquad r \leq m.$$

Dotamos a $C^m(\Omega)$ de la topología inducida por las seminormas $\|, \|_m^K$. Un sistema fundamental de vecindades de $f \in C^m(\Omega)$ está dado por los conjuntos

$$B(f, K, \epsilon) = \{ g \in C^m(\Omega) \mid \| f - g \|_m^K < \epsilon \}$$

donde $\epsilon > 0$ es un número real y K recorre la familia de los subconjuntos compactos de Ω.

Denotamos con $R[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables, sobre R. Dado $a \in R^n$, sea μ_a el ideal (maximal) de los polinomios que se anulan en a. Denotamos por $A_a{}^m$ el anillo cociente

$$\frac{R[x_1, \ldots, x_n]}{\mu_a{}^{m+1}}.$$

El producto de este anillo es el usual de polinomios, truncado en el grado m.

Sea $f \in C^m(\Omega)$. Consideremos $T_a{}^m f$ definida por $T_a{}^m f(x) = \sum_{r=0}^{m} (1/r!) D^r f(a) \cdot (x-a)^r$, para cada $x \in R^n$. Podemos entonces definir un epimorfismo de anillos

$$T_a{}^m : C^m(\Omega) \to A_a{}^m$$

que asocia a cada $f \in C^m(\Omega)$ el elemento $T_a{}^m f$.

Sea I un ideal en $C^m(\Omega)$. Para cada $x \in \Omega$, $I_x = T_x{}^m(I)$ es un ideal en $A_x{}^m$, pues $T_x{}^m$ es sobreyectiva. Además $I_x = A_x{}^m$ si y solo si existe $f \in I$ tal que $f(x) \neq 0$. Como espacio vectorial $A_x{}^m$ se identifica con $R^{\binom{n+m}{n}}$. El ideal I_x es entonces un subespacio (vectorial) cerrado en $A_x{}^m$, de manera que $I_x{}^{-1} = (T_x{}^m)^{-1}(I_x)$ es un ideal cerrado en $C^m(\Omega)$. Nótese que I está contenido en $I_x{}^{-1}$, para cada $x \in \Omega$.

Teorema de sintesis espectral de Whitney ([11], [8], [6]). *Sea I un ideal en $C^m(\Omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*:

a) *I es un ideal cerrado en $C^m(\Omega)$.*

b) *$I = \hat{I}$ donde $\hat{I} = \bigcap_{x \in \Omega} I_x{}^{-1}$.*

2. Jets de Whitney Perpendiculares

Sea V una subvariedad de clase C^2 en R^n. Sean $f_0 : R^n \to R^n$ una aplicación de clase C^1 y f_1 su derivada.

Si para cada x de V, $f_0(x)$ es un vector perpendicular a V en dicho punto, diremos que $(f_0 | V, f_1 | V)$ es un jet perpendicular de orden 1 sobre V.

Si $(f_0, f_1) | V$ es un jet perpendicular a V, de orden 1 y además, para cada x de V, $f_1(x)$ se identifica con un elemento de $L_s{}^2(R^n; R)$, diremos entonces que $(f_0 | V, f_1 | V)$ es un jet de Whitney perpendicular a V, de clase C^1, (o también un jet perpendicular de clase C^1 sobre V).

Denotaremos $W^1(V, R^n)^\perp$ el conjunto de todos los jets perpendiculares de clase C^1 sobre V.

TEOREMA 2.1 *Sea V una subvariedad de R^n, de clase C^2. Sea $(f_0, f_1) \in W^1(V, R^n)^\perp$. Entonces $F = (0, f_0, f_1)$ es un jet de Whitney de clase C^2 sobre V.*

Demostración. Denotemos con $G = (f_0, f_1) \in W^1(V, R^n)^\perp$ y $F = (0, f_0, f_1)$. En F, f_0 se interpreta como una aplicación: $V \to L^1(R^n, R)$. Se debe probar que, sobre cada subconjunto compacto de V, vale el sistema de desigualdades

$$(W_k) \qquad \| (R_x{}^2 F)^k(y) \| \leq \| y - x \|^{2-k} \cdot \gamma(\| y - x \|), \qquad k = 0, 1, 2.$$

siendo γ un módulo de continuidad.

Se observa que (W_1) y (W_2) se verifican, en virtud de la hipótesis de que G es un jet de Whitney de clase C^1. Resta demostrar que vale (W_0). Es decir, que existe un módulo de continuidad γ tal que

$$(W_0) \qquad \| f_0(x) \cdot (y - x) + \tfrac{1}{2} f_1(x) \cdot (y - x)^2 \| \leq \| x - y \|^2 \cdot \gamma(\| x - y \|).$$

El residuo $(R_x{}^2 F)^0(y)$ se puede escribir en la forma:

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} (R_x{}^2 F)^0(y) = {} & \tfrac{1}{2} [f_0(x)(y - x) + f_0(y)(y - x)] \\ & - \tfrac{1}{2} [(R_x{}^1 G)^0(y) \cdot (y - x) \end{aligned}$$

Como G es un jet de clase C^1, entonces $\| (R_x{}^1G)^0(y) \| = 0\ (\| y - x \|)$ y por lo tanto, todo lo que hace falta probar es:

$$\tag{2.3} \tfrac{1}{2} \| f_0(x)(y - x) + f_0(y)\cdot(y - x) \| \leq \| y - x \|^2 \cdot \gamma(\| y - x \|)$$

(sobre cada subconjunto compacto de V).

Sea K compacto, contenido en V. Sea $\varphi : U \to R^n$, $U \subset R^k$, una parametrización de V, alrededor del punto $x = \varphi(t) \in K$. Trabajaremos en $K \cap \varphi(U)$. Sea $y \in K \cap \varphi(U)$, $y = \varphi(s)$. En virtud de la fórmula de Taylor:

$$y - x = \varphi(s) - \varphi(t) = \varphi'(t)\cdot(s - t) + \tfrac{1}{2}\varphi''(t)\cdot(s - t)^2 + R_2\varphi(s, t)$$

El residuo $R_2\varphi(s, t)$ satisface

$$\tag{2.4} \| R_2\varphi(s, t) \| = O(\| s - t \|^2) \text{ si } \| s - t \| \to 0 \quad \text{(uniformemente)}$$

Vista como aplicación lineal, $f_0(x)$ se anula sobre $T_x V$, por lo tanto:

$$\tag{2.5} f_0(x)(y - x) = \tfrac{1}{2} f_0(x)\cdot(\varphi''(t)(s - t)^2) + f_0(x)(R_2\varphi(s, t))$$

ya que $\varphi'(t)(s - t)$ es tangente en $x = \varphi(t)$ a V.

Por otra parte,

$$\tag{2.6} f_0(y)(x - y) = f_0(y)(\tfrac{1}{2}\varphi''(s)(t - s)^2) + f_0(y)(R_2\varphi(s, t)).$$

En virtud de (2.4), tendremos:

$$\tag{2.7} \left\| f_0(x)\cdot \frac{R_2\varphi(s, t)}{\| s - t \|^2} \right\| \cdot \| s - t \|^2 \leq \| s - t \|^2 \cdot \gamma_3(\| s - t \|).$$

$$\tag{2.8} \left\| f_0(y)\cdot \frac{R_2\varphi(s, t)}{\| s - t \|^2} \right\| \cdot \| s - t \|^2 \leq \| s - t \|^2 \cdot \gamma_4(\| s - t \|).$$

siendo γ_2 y γ_4 módulos de continuidad.

Se observa que

$$f_0(x)(y - x) + f_0(y)(y - x) = f_0(x)(y - x) - f_0(y)(x - y),$$

por lo tanto:

$$\tag{2.9} \begin{aligned} &\| f_0(x)(y - x) - f_0(y)(x - y) \| \\ &\quad \leq \| f_0(x)(\tfrac{1}{2}\varphi''(t)(s - t)^2 - f_0(y)(\tfrac{1}{2}\varphi''(s)(s - t)^2 \| \\ &\quad\quad + [\gamma_3(\| s - t \|) + \gamma_4(\| s - t \|)]\cdot \| s - t \|^2. \end{aligned}$$

Comparando (2.3) con (2.9) vemos que para obtener la desigualdad de (2.3) primero debemos obtener una estimación de

$$\tag{2.10} \| f_0(x)(\tfrac{1}{2}\varphi''(t)(s - t)^2) - f_0(y)(\tfrac{1}{2}\varphi''(s)(s - t)^2) \|$$

Sumando y restando $f_0(y)\cdot(\tfrac{1}{2}\varphi''(t)(s - t)^2)$ en la expresión (2.9):

$$\begin{aligned} &\| f_0(x)(\tfrac{1}{2}\varphi''(t)(s - t)^2) - f_0(y)(\tfrac{1}{2}\varphi''(s)(s - t)^2) \| \\ &\quad \leq \tfrac{1}{2} \| (f_0(x) - f_0(y))(\varphi''(t)(s - t)^2) \| \\ &\quad\quad + \tfrac{1}{2} \| f_0(y)(\varphi''(t) - \varphi''(s))(s - t)^2 \| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.11)\qquad &\le \tfrac{1}{2}\{\|f_0(x) - f_0(y)\| \cdot \|\varphi''(t)\| \\ &\quad + \|f_0(y)\| \cdot \|\varphi''(t) - \varphi''(s)\|\}\|s - t\|^2 \\ &\le \gamma_5(\|s - t\|)\|s - t\|^2,\end{aligned}$$

donde γ_5 es un módulo de continuidad. Esta última desigualdad la obtenemos en virtud de que en la desigualdad anterior a ella, la expresión encerrada entre llaves es no-negativa y tiende a cero si $\|s - t\| \to 0$.

Se obtiene entonces:

$$\begin{aligned}(2.12)\qquad \|f_0(x)(y - x) + f_0(y)(y - x)\| &\le [\gamma_3(\|s - t\|) + \gamma_4(\|s - t\|) \\ &\quad + \gamma_5(\|s - t\|)]\|s - t\|^2 \le \gamma_1(\|s - t\|)\|s - t\|^2\end{aligned}$$

siendo γ_1 un módulo de continuidad.

Nuestro objetivo es ahora transformar la desigualdad 2.12 en 2.3. Para ello, haremos uso del lema siguiente, cuya demostración puede verse en ([4]).

LEMA. *Sea $\varphi: U \to R^n$ una aplicación de clase C^1 definida sobre un abierto U de algün R^k. Si la derivada $D\varphi(x)$ es inyectiva en cada x de un compacto L contenido en U. entonces existen números reales $C > 0$ y $\delta > 0$ tales que*:

Para todo $x \in L$, $y \in U$, si $\|y - x\|$

$$\le \delta \text{ entonces } \|\varphi(y) - \varphi(x)\| \ge C \cdot \|y - x\|.$$

Se constata que la parametrización φ que estamos empleando en la demostración, verifica las condiciones de este lema. Por lo tanto, existen constantes $C > 0$, $\delta > 0$ tales que

$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \ge C\,\|s - t\| \text{ si } \|s - t\| \le \delta, \quad \text{siendo } y = \varphi(s),\ x = \varphi(t) \quad \text{en} \quad K \cap \varphi(U).$$

Podemos escribir por lo tanto:

$$(2.13)\qquad \gamma_1(\|s - t\|)\|s - t\|^2 \le \frac{1}{C^2}\gamma_1\left(\frac{1}{C}\|y - x\|\right)\|y - x\|^2$$

existe pues, un módulo de continuidad γ tal que

$$\tfrac{1}{2}\|f_0(x)(y - x) + f_0(y)(y - x)\| \le \|y - x\|^2 \cdot \gamma(\|y - x\|),$$

y así, terminamos la prueba del teorema.

Observacion. Bajo las hipótesis del Teorema 2.1, y en virtud del Teorema de Extensión de Whitney podemos exhibir una correspondencia entre $W^1(V, R^n)^\perp$ y el ideal $J^2(V)$, de todas las funciones de clase C^2 sobre R^n que se anulan sobre V.

3. El C^2-Módulo $W^1(V, R^n)^\perp$

Vamos a dotar la conjunto $W^1(V, R^n)^\perp$ de una estructura de módulo sobre el anillo $C^2(R^n)$. Las siguientes operaciones proporcionan dicha estructura:

$$(3.1)\qquad (f_0, f_1) + (g_0, g_1) = (f_0 + g_0, f_1 + g_1)$$

$$g\cdot(f_0, f_1) = (gf_0, gf_1 + f_0 \otimes Dg + Dg \otimes f_0) \tag{3.2}$$

para (f_0, f_1), (g_0, g_1) en $W^1(V, R^n)^\perp$ y $g \in C^2(R^n)$.

También, dotamos a $W^1(V, R^n)^\perp$ de la topología de convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de V, de orden ≤ 1. Sea $A_x{}^1(R^n, R^n)$ el espacio vectorial real conformado por las funciones polinomiales de R^n en R^n, de grado ≤ 1 y definidas alrededor de x. La dimensión de $A_x{}^1(R^n, R^n)$ es $n(n + 1)$. Si $(f_0, f_1) \in W^1(V, R^n)^\perp$, $x \in V$ entonces $(f_0(x), f_1(x))$ se identifica con un elemento de $A_x{}^1(R^n, R^n)$. Dicha identificación nos permite definir, para cada $x \in V$, una aplicación:

$$T_x{}^1: W^1(V, R^n)^\perp \to A_x{}^1(R^n, R^n)$$

Si M es un submódulo de $W^1(V, R^n)^\perp$ denotamos por $\hat{M}$ el submódulo (cerrado) $\bigcap_{x\in V} M_x{}^{-1}$, donde $M_x{}^{-1}$ es la imagen inversa bajo $T_x{}^1$ del subespacio $T_x{}^1(M)$. Por $\bar{M}$ indicamos la cerradura del submódulo M. Es claro entonces que $\bar{M}$ está contenido en $\hat{M}$. Enunciaremos a continuación un teorema que nos muestra como obtener $\bar{M}$ mediante las localizaciones puntuales $M_x{}^{-1}$.

TEOREMA 3.1. *Si M es un submódulo de $W^1 V, R^n)^\perp$ entonces $\bar{M} = \hat{M}$.*

La demostración de este teorema está modelada en la demostración de Malgrange del teorema de Síntesis Espectral. Al respecto puede consultarse [6], [7].

Denotamos $J^2(V)$ el ideal de $C^2(R^n)$ cuyos elementos son todas las funciones en $C^2(R^n)$ que se anulan sobre V. La correspondencia $W^1(V, R^n)^\perp \to J^2(V)$ dada por el Teorema 2.1 puede extenderse, en consecuencia, para obtener una correspondencia entre los ideales cerrados I de $C^2(R^n)$ cuyos ceros $Z(I)$ son subvariedades de R^n y los submódulos de $W^1(Z(1), R^n)$ cuando I recorre dicha familia de ideales.

Si M es un submódulo de $W^1(V, R^n)^\perp$, asociamos a M un ideal $i^{-1}(M)$ de $C^2(R^n)$ definido así:

$$i^{-1}(M) = \{f \in J^2(V);\ (Df(x), D^2f(x)) \in M_x, \quad \text{para cada} \quad x \in V\}$$

Dado $f \in i^{-1}(M)$ denotamos $r_V(f)$ la restricción de la pareja (Df, D^2f) a V. Es fácil probar que $M = r_V(i^{-1}(M))$ y en consecuencia, que la correspondencia $M \to i^{-1}(M)$ es inyectiva. Se tiene también que $Z[i^{-1}(M)] = V$.

LEMA 3.2. *Sea M un submódulo de $W^1(V, R^n)^\perp$. Las siguientes condiciones son equivalentes*:

$$M \textit{ es cerrado en } W^1(V, R^n)^\perp \tag{3.3}$$

$$i^{-1}(M) \textit{ es cerrado en } C^2(R^n). \tag{3.4}$$

DEMOSTRACION. 3.3 $\Rightarrow$ 3.4. Para cada $f \in i^{-1}(M)$ y cada $x \in V$ podemos identificar $T_x{}^2 f$ con $T_x{}^1(r_V(f))$. Por lo tanto, si $f \in \widehat{i^{-1}(M)}$ entonces $T_x{}^1(r_V(f)) \in M_x$, para todo $x \in V$. Como M es cerrado, $r_V(f) \in M$, en virtud del Teorema 2.1.

Finalmente, para cada $x \in R^n$ existe $g \in i^{-1}(M)$ tal que $T_x{}^2 f = T_x{}^2 g$. De manera que $f(x) = 0$ para cada $x \in V$ y, por tanto, $f \in i^{-1}(M)$. Aplicando el Teorema de Síntesis Espectral, concluímos que $i^{-1}(M)$ es cerrado.

3.4 $\Rightarrow$ 3.3. Sea $F = (f_0, f_1) \in \hat{M}$. Por el Teorema 2.1 existe $f \in J^2(V)$ tal que $T_x^2 f \equiv T_x^1 F$, para cada $x \in V$. Podemos identificar las localizationes puntuales M_x e $i^{-1}(M)_x$ para cada $x \in V$, luego $T_x^2 f \in i^{-1}(M)_x$. En virtud de la igualdad $V = Z[i^{-1}(M)]$ se obtiene que $T_x^2 f \in i^{-1}(M)_x$ para todo $x \in R^n$. Por el teorema de Síntesis Espectral concluímos que $f \in i^{-1}(M)$. Como $r_V(f) = F$, entonces $F \in M$ demostrándose asi que M es cerrado. Q.E.D.

Sea $\mathscr{F}$ la colección de todos los ideales de $C^2(R^n)$ cuyos ceros están conformados por una subvariedad de R^n de clase C^2. Sea $I \in \mathscr{F}$, y $f \in I$. Denotamos $i(f)$ la pareja $(Df/V, D^2f/V)$ donde $V = Z(I)$. Para cada $I \in \mathscr{F}$, $i(I)$ es un submódulo de $W^1(V, R^n)^{\perp}$.

Enunciaremos a continuación una lista de propiedades de las aplicaciones i e i^{-1}, cuyas demostraciones pueden consultarse en [7].

a) Si I es un ideal cerrado ($I \in \mathscr{F}$) entonces $i(I)$ es un submódulo cerrado. Además $I = i^{-1}(i(I))$ en tal caso.
b) La aplicación $I \longrightarrow i(I)$ restringida a los ideales cerrados (de $\mathscr{F}$) es biyectiva.

Los resultados de esta sección nos proporcionan una demostración del siguiente

TEOREMA 3.3. *Existe una correspondencia biunívoca entre la colección de los ideales cerrados de* $\mathscr{F}$ *y los submódulos cerrados de* $W^1(Z(I), R^n)^{\perp}$ *cuando* I *recorre dicha colección. Esta correspondencia viene dada por* $I \longrightarrow i(I)$. *Además para cada* $x \in Z(I)$, $I_x \equiv i(I)_x$,

4. C^1-Perpendicularidad a subvariedades de R^n

Sea Ω un abierto de R^n. Sea $\{I_x\}_{x\in\Omega}$ una colección de ideales (puntuales) $I_x \subset A_x^m$, para cada $x \in \Omega$. Diremos que esta es una colección de Whitney si y solo si existe un ideal Q en $C^m(\Omega)$ tal que, para cada $x \in \Omega$, $T_x^m Q = I_x$.

Con el propósito de introducir el problema de caracterización de las colecciones de Whitney, presentamos la

PROPOSICION 4.1. *Sea* $\{I_x\}_{x\in\Omega}$ *una colección de ideales, con* $I_x \subset A_x^m$ *para cada* $x \in \Omega$. *Las condiciones siguientes son equivalentes*:

(i) $\{I_x\}_{x\in\Omega}$ *es una colección de Whitney.*
(ii) *Para cada* $x_0 \in \Omega$ *y cada* $p_0 \in I_{x_0}$ *existe* $f \in C^m(\Omega)$ *tal que* $T_{x_0}^m f = p_0$ *y* $T_x^m f \in I_x$ *para cada* $x \in \Omega$.

La demostración es sencilla y puede consultarse en [2] y [7]. Esta proposición nos enseña que el problema de caracterización antes mencionado equivale a un problema de construcción, de funciones diferenciables. Se observa además que el comportamiento "interesante" a propósito de decidir si una colección es de Whitney, es el que dicha colección presente sobre sus ceros. Es decir, sobre el conjunto de los x en Ω tales que $I_x \neq A_x^m$. Esto último se convierte entonces en el problema de saber construir una función, cuyos ceros están prefijados, a partir de cierta información sobre sus derivadas.

Consideramos el caso en que la subvariedad es el subespacio R^k. Expresamos R^n como el producto cartesiano $R^k \times R^{n-k}$, y el punto genérico de R^n como (x, y).

Sea γ la inclusión canónica de R^k en R^n.

Definicion 4.2. Un C^1-vector perpendicular al subespacio R^k en el punto $(0, 0) \in R^n$ es una pareja $(f_0(0), f_1(0))$ donde $f_0(0) \in L^1(R^n, R), f_1(0) \in L_s^2(R^n, R)$ satisfacen:

(i) $f_0(0) \cdot (D\gamma(0)) \equiv 0$

(ii) $f_1(0) \cdot (D\gamma(0), D\gamma(0)) \equiv 0$.

Las condiciones (i) y (ii) expresan que $f_0(0)$ y $f_1(0)$ se anulan sobre el subespacio R^k. Si interpretamos $f_0(0)$ como un vector de R^n se tiene que $f_0(0) = (0, \lambda)$, $\lambda \in R^{n-k}$. En términos de la base canónica de R^n, expresamos $f_1(0)$ en forma matricial así:

$$f_1(0) = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^t & C \end{bmatrix}$$

donde C es una matriz $(n-k) \times (n-k)$ simétrica, B es una matriz $k \times (n-k)$ y B^t es su matriz transpuesta.

PROPOSICION 4.3. *Sea $(f_0(0), f_1(0))$ un C^1-vector perpendicular al subespacio R^k. Entonces, existe $f \in C^2(R^n)$ que se anula sobre R^k y tal que $Df(0, 0) = f_0(0)$, $D^2f(0, 0) = f_1(0)$.*

Demostración. Sean $f_0(0) = (0, \lambda)$ y $f_1(0) = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^t & C \end{bmatrix}$. Afirmamos que la función $f(x, y) = \langle y, B^t \cdot x + \frac{1}{2}C \cdot y + \lambda \rangle$ ($\langle , \rangle$ es el producto interno de R^{n-k}) satisface las condiciones requeridas. En efecto, f es la composición de las funciones

$$R^k \times R^{n-k} \xrightarrow{\quad \psi \quad} R^{n-k} \times R^{n-k} \xrightarrow{\langle , \rangle = \varphi} R.$$

Por lo tanto,

$$Df(0, 0)(u, v) = D\varphi(0, \lambda) \cdot D\varphi(0, 0)(u, v).$$

Además,

$$D\psi(0, 0)(u, v) = (v, B^t \cdot u + \tfrac{1}{2}C \cdot v).$$

Por lo tanto,

$$Df(0, 0)(u, v) = \langle \lambda, v \rangle.$$

Concluímos entonces que grad $f(0, 0) = (0, \lambda)$.

Por otra parte

$$D^2f(0, 0)((u, v), (\bar{u}, \bar{v}))$$
$$= D^2\varphi(0, \lambda) \cdot ((v, B^t \cdot u + \tfrac{1}{2}C \cdot v), (\bar{v}, B^t \cdot \bar{u} + \tfrac{1}{2}C \cdot \bar{v})).$$

Como $D^2\varphi(0, \lambda)$ es bilineal, entonces

$$D^2f(0, 0)((u, v), (\bar{u}, \bar{v})) = \langle v, B^t\cdot\bar{u} + \tfrac{1}{2}C\cdot\bar{v}\rangle + \langle\bar{v}, B^t\cdot u + \tfrac{1}{2}C\cdot v\rangle = A$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$f_1(0)((u, v), (\bar{u}, \bar{v})) = A.$$

Por lo tanto, $D^2f(0,0) = f_1(0)$, finalizando así la demostración de la proposición.

Definicion 4.4 Sea V una subvariedad de clase C^2 de R^n. Un C^1-*vector perpendicular* a V en el punto x es una pareja $(f_0(x), f_1(x))$ donde $f_0(x) \in L^1(R^n, R)$, $f_1(x) \in L_s^2(R^n, R)$ tal que, existe una parametrización local φ de V alrededor del punto x, de suerte que:

(i) $f_0(x)\cdot(D\varphi(0)) \equiv 0$, $[\varphi(0) = x]$.

(ii) $f_0(x)\cdot(D^2\varphi(0)) + f_1(x)\cdot(D\varphi(0), D\varphi(0)) \equiv 0$.

La definición anterior no depende de la parametrización φ. Esto es una consecuencia de las dos proposiciones siguientes.

PROPOSICION 4.5. *Sea V una subvariedad de clase C^2 de R^n. Sea $(f_0(x), f_1(x))$ un C^1-vector perpendicular a V en x tal que $f_0(x) = (0, \lambda)$ y $f_1(x) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

Entonces, existe $F \in J^2(V)$ tal que $DF(x) = f_0(x)$ y $D^2F(x) = f_1(x)$.

Demostración. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que el espacio tangente $T_xV = R^k$ y $R^n = R^k \times R^{n-k}$. Denotemos γ la parametrización local alrededor de $x = \gamma(0)$ respecto la cual $(f_0(x), f_1(x))$ es un C^1-vector perpendicular. Supondremos además que $D\gamma(0) = \begin{bmatrix} I_k \\ O_{n-k} \end{bmatrix}$ donde I_k es la matriz identidad $k \times k$ y O_{n-k} es la matriz idénticamente cero. Sea (x, y) el punto genérico de R^n. Definamos $H{:}R^k \times R^{n-k} \to R^n$ mediante: $H(x, y) = \gamma(x) + (0, y)$.

Entonces, $DH(0, 0) = I_n$ por lo cual H es un difeomorfismo local alrededor del origen $(0, 0) \in R^k \times R^{n-k}$.

Sea φ el difeomorfismo inverso de H. Consideremos la proyección $\pi_i{:}R^k \times R^{n-k} \to R$ dada por $\pi_i(x, y) = y_i$, $i = 1, 2, \cdots, n-k$.

Sea $F_i = \pi_i \circ \varphi$. Se verifica fácilmente que

(i) F_i se anula sobre V.

(ii) $\nabla F_i(0, 0) = (0, \cdots, 0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, donde el 1 occurre en el $(k + i)$-ésimo lugar.

Por otra parte, $D^2F_i(0, 0) = -\pi_i \circ D^2H(0, 0)$, de manera que

$$D^2F_i(0, 0) = \begin{bmatrix} D^2\gamma_{k+i}(0, 0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $A + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i D^2\gamma_{k+i}(0, 0) = 0$ siendo $f_0(x) = (0, \lambda)$ [condición (ii) de la definición 4.4]. De esta forma, quedan explícitas las condiciones sobre la matriz A.

Consideremos, en consecuencia, la función

$$F = -\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i F_i$$

Se verifica entonces que $F \in C^2(R^n)$, se anula sobre V y $\nabla F(0, 0) = (0, -\lambda)$.

Finalmente, examinemos la segunda derivada de F en $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} D^2F(0, 0) &= -\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i D^2F_i(0, 0) \\ &= -A \end{aligned}$$

Es decir, $D^2F(0, 0) \equiv \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, finalizando así la demostración de la proposición.

A continuación, consideraremos C^1-vectores perpendiculares a V en el punto $\gamma(0) = (0, 0)$ tales que $f_0(0, 0) = 0$. Si $f_1(0, 0) = \begin{bmatrix} A & B \\ B^t & C \end{bmatrix}$, la condición (ii) de la Def. 2.3 se reduce a $f_1(0, 0)(D\gamma(0), D\gamma(0)) \equiv 0$, por lo cual $A \equiv 0$.

Consideremos la función

$$G: R^k \times R^{n-k} \to R$$

$$\begin{aligned} G(x, y) = \langle (\varphi_{k+1}(x, y), \cdots, \varphi_n(x, y)), (B^t \cdot (\varphi_1(x, y), \cdots, \varphi_k(x, y)) \\ + \tfrac{1}{2} C \cdot (\varphi_{k+1}(x, y), \cdots, \varphi_n(x, y)) \rangle \end{aligned}$$

Es claro que

(i) G es una función de clase C^2 que se anula sobre V. La función $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ que interviene en la definición de G es la inversa del difeomorfismo H, definido anteriormente.

La función G es la composición del difeomorfismo φ con la función f de la Proposición 4.3 en la cual hacemos $\lambda = 0$. Como $D\,\varphi(0, 0) = \text{id}$, entonces $DG(0, 0) = Df(0, 0)$ y por lo tanto

(ii) $\nabla G(0, 0) = (0, 0)$.

Finalmente,

$$D^2G(0, 0) = D^2f(0, 0)(\text{id}, \text{id})$$

de modo que:

(iii) $D^2G(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^t & C \end{bmatrix}$.

De esta manera, queda demostrada la

PROPOSICION 4.6. *Sean V una C^2-subvariedad de R^n, $y(0, f_1(0, 0))$ un C^1-vector perpendicular. Entonces, existe $G \in J^2(V)$ tal que $\nabla G(0, 0) = (0, 0) = f_0(0, 0)$ y $D^2G(0, 0) = f_1(0, 0)$.*

Conjuntamente, las dos proposiciones anteriores nos proporcionan el

TEOREMA 4.7. *Sean V una subvariedad de clase C^2 de R^n y $(f_0(x), f_1(x))$ un C^1-vector perpendicular a V en el punto x. Entonces, existe $F \in J^2(V)$ tal que $\nabla F(x) = f_0(x)$ y $D^2F(x) = f_1(x)$.*

5. Colecciones de Whitney en $C^2(R^n)$

Dada V subvariedad de R^n, de clase C^2, denotamos $P_x{}^1V$ la colección de todos los C^1-vectores perpendiculares a V en el punto x.

TEOREMA 5.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(5.2) *La colección de ideales puntuales $\theta = \{I_x\}_{x\in\Omega}$, $I_x \subset A_x{}^2$ corresponde al ideal $J^2(V)$.*

(5.3) *Para cada $x \in V$, $I_x = P_x{}^1V$ y para cada $x \in \Omega\backslash V$, $I_x = A_x{}^2$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2). Si $x \in \Omega\backslash V$, existe $f \in J^2(V)$ tal que $f(x) \neq 0$. Por lo tanto $J^2(V)_x = I_x = A_x{}^2$.

Si $x \in V$ y $(f_0(x), f_1(x)) \in P_x{}^1V$ entonces existe $F \in J^2(V)$ tal que $DF(x), \equiv f_0(x)$, $D^2F(x) \equiv f_1(x)$.

$T_x{}^2F$ se identifica con $(f_0(x), f_1(x))$. Por lo tanto $P_x{}^1V \subset J^2(V)_x$, para cada $x \in V$. Recíprocamente, si $F \in J^2(V)$ entonces $(DF(x), D^2F(x)) \in P_x{}^1(V)$, es decir, $T_x{}^2F \in P_x{}^1(V)$. Esto muestra que $J^2(V)_x \subset P_x{}^1(V)$.

5.3 $\Rightarrow$ 5.2. Se quiere probar que dados $x_0 \in \Omega$, $P_0 \in I_{x_0}$ existe $f \in C^2(\Omega)$ tal que $T_{x_0}{}^2f = P_0$ y $T_x{}^2f \in I_x$, para cada $x \in \Omega$.

Si $x_0 \in \Omega\backslash V$, $P_0 \in I_{x_0} = A_{x_0}{}^2$; como V es un subconjunto cerrado de Ω, existe una vecindad $N(x_0)$ de x_0 contenida en $\Omega\backslash V$, de modo que, para cada $x \in N(x_0)$, $I_x = A_x{}^2$.

Existe $f \in C^2(\Omega)$ tal que $T_{x_0}{}^2 f = P_0$ y además como $I_x = A_x{}^2$ para cada $x \in N(x_0)$, $T_x{}^2f \in I_x$ si $x \in N(x_0)$.

Existe $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \equiv 1$ en una vecindad $N'(x_0) \subset N(x_0)$ y $\phi \equiv 0$ fuera de $N(x_0)$. La función $F = \phi f \in C^2(\Omega)$, $T_{x_0}{}^2F = P_0$ y para cada $x \in \Omega$, $T_x{}^2F \in I_x$.

Si $x_0 \in V$, $P_0 \in I_{x_0} = P_{x_0}{}^1V$ entonces $P_0 = (f_0(x_0), f_1(x_0))$. Por el Teorema 4.7 existe $F \in J^2(V)$ tal que $DF(x_0), \equiv f_0(x_0)$, $D^2F(x_0) \equiv f_1(x_0)$. Como F se anula sobre V, entonces para cada $x \in V$, $T_x{}^2F \equiv (DF(x), D^2F(x)) \in P_x{}^1V = I_x$.

Fuera de V, es claro que $T_x{}^2f \in I_x = A_x{}^2$. Por lo tanto, la colección θ es de Whitney.

Sea $J = \{f \in C^2(\Omega); T_x{}^2f \in I_x$, para todo $x \in \Omega\}$. Entonces, J es un ideal y sus localizaciones puntuales son precisamente las I_x. Los ideales J y $J^2(V)$ son cerrados y en cada punto $x \in \Omega$ poseen las mismas localizaciones. Entonces, por el teorema de Síntesis Espectral, $J = J^2(V)$ terminando así la demostración.

Para finalizar este capítulo, consideremos el caso en que V es una subvariedad de clase C^1 estrictamente. Entonces, si $f \in C^2(R^n)$ se anula sobre V, su derivada $Df \equiv 0$ sobre V. Por lo tanto para cada $x \in V$ y cada $T \in T_xV$ se tiene $D^2f(x)(T, N) = 0$ siendo N cualquier vector perpendicular a V en el punto x.

Podemos suponer que el espacio tangente a V en el origen 0 de R^n es el subespacio R^k. Si expresamos $D^2f(0)$ en forma matricial respecto la base usual $e_1, \cdots e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n$ de R^n tendremos:

$$D^2f(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{ij} \end{bmatrix}$$

$r = n - k$, $\lambda_{ij} = D^2f(0)(e_{k+i}, e_{k+j})$, para $1 \leq i, j \leq r$.

Con el propósito de caracterizar las colecciones de Whitney que correspondan a ideales $J^2(V)$, presentamos la siguiente versión del teorema de "productos rugosos". La demostración puede consultarse en [7] o en [3].

PROPOSICION 5.4. *Sean $f, g \in C^1(R^n)$ que se anulan sobre V. Entonces, existe $H \in W^2(V)$ que es 1-plano sobre V y verifica $T_x^2H = Df(x) \cdot Dg(x)$, para cada $x \in V$. ($\cdot$ indica el producto simétrico de aplicaciones lineales.)*

Los procedimientos anteriores nos permiten elaborar la construcción que sigue: Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{ij} \end{bmatrix} 1 \leq i, j \leq r,\ r = n - k$$

procedemos a construir $F \in J^2(V)$ tal que $D^2F(0) \equiv A$. Sean $f_1, \cdots, f_r$ de clase C^1 sobre R^n que se anulan sobre V y tales que $\langle \nabla f_i(0), e_j \rangle = \delta_{ij}$.

A partir de los productos $f_i \cdot f_j$, mediante el empleo de la proposición anterior, podemos construír funciones $F_{ij} \in J^2(V)$ tales que:

$$D^2F_{ij}(0)(e_k, e_l) = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$$

Es claro entonces que $F = \sum_{i,j=1}^r \lambda_{ij}F_{ij}$ es de clase C^2 sobre R^n se anula sobre V y $D^2F(0) \equiv A$. Lo anterior demuestra el

TEOREMA 5.5. *Sea V una subvariedad de R^n, estrictamente de clase C^1. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(5.6) *La colección $\theta = \{I_x\}_{x \in \Omega}$, $I_x \subset A_x^2$ proviene del ideal $J^2(V)$.*

(5.7) $I_x = P_x^1V$ *si* $x \in V$ *e* $I_x = A_x^2$ *si* $x \in \Omega \backslash V$.

6. Construccion de funciones de $C^2(R^2)$: caso no-singular

Sea V una subvariedad unidimensional del plano de clase C^2 excepto en x_0 donde es de clase C^1 estrictamente. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $x_0 = (0, 0)$ y además que V es tangente al eje de las x en el origen. Como vamos a trabajar en una vecindad del origen, bastará describir V de manera implícita. Sea φ: $R \to R$ de clase C^2 excepto en el origen donde es C^1 estrictamente. La parte de V que nos interesa, es el compacto K dado por $K = \{(x, \varphi(x)); - \leq x \leq 1\}$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

Definicion 6.1. Sea $(f_0, f_1) \in W^1(K, R^2)$. Diremos que (f_0, f_1) es un jet de

Whitney perpendicular de clase C^1 sobre K si:

(1) Para cada $x \in K$, $x \neq \overline{0}$, $f_0(x) \in (T_xK)^{\perp}$ y $f_0(\overline{0}) = 0$.

(2) Para cada vector tangente T, a K en el origen, $f_1(\overline{0})(T, T) = 0$.

Como antes, $W^1(K, R^2)^{\perp}$ denota el espacio de jets perpendiculares de clase C^1 sobre K.

Nuestro objetivo es estudiar condiciones bajo las cuales si $(f_0, f_0) \in W^1(K, R^2)^{\perp}$ entonces $F = (0, f_0, f_1) \in W^2(K)$. Sea $\psi(t) = (t, \varphi(t))$ donde φ es la función que define implícitamente a K, alrededor del origen. Un estudio cuidadoso del residuo $(R_x{}^2F)^0$ y, donde $(x, y \in K)$ nos permite afirmar:

Una condición necesaria y suficiente para que $F = (0, f_0, f_1)$ sea un jet de Whitney de clase C^2 es que

$$\lim_{s,t\to 0} \left\langle f_0(\psi'(t)), \frac{\psi(s) - \psi(t)}{(s-t)^2} - \frac{1}{2}\psi''(t) \right\rangle = 0 \tag{6.2}$$

Construyamos ahora un jet perpendicular sobre K, de clase C^1. Sea $f_0(x, \varphi(x)) = x(-\varphi'(x), 1)$. Entonces, f_0 es un campo perpendicular continuo, sobre K, y se anula en el origen. Como se quiere extender f_0 a un campo perpendicular de clase C^1, resulta natural suponer que la función $h(x) = x\varphi'(x)$ es de clase C^1 sobre R.

En general, si $(f_0, f_1) \in W^1(K, R^2)^{\perp}$ entonces

$$f_1(x_0)T = \lim_{x,y\to x_0} \frac{f_0(y) - f_0(x)}{|y - x|}$$

donde T es tangente a K en el punto x_0. Este límite indica que f_0 determina f_1 en las direcciones tangentes a K. Entonces, para f_0 definida por $f_0(x, \varphi(x)) = x(-\varphi'(x), 1)$ tendremos:

$$f_1(0)T = (0, \pm 1)$$

Para completar la definición de f_1, hace falta definirla, en las direcciones normales a K. Consideremos una curva V de clase C^1, N un campo perpendicular unitario a V y λ una función continua definida sobre dicha curva. Es claro entonces que $(0, \lambda N) \in W^1(V, R^2)^{\perp}$. En cada punto $x \in V$ consideremos la matriz $B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(x) \end{bmatrix}$ escrita con relación a la base del plano, determinada por la tangente y la normal a V en el punto x. Con esta notación, tenemos la siguiente

PROPOSICION 6.2. *Sea $F = (0, 0, B)$. Entonces $F \in W^2(V)$.*

La demostración, que es sencilla, puede consultarse en [7]. Conjuntamente, esta proposición y el teorema de Extensión de Whitney nos permiten afirmar que existe una función $f \in C^2(R^2)$ que se anula, ella y su primera derivada sobre V, y cuya segunda derivada $D^2f(x) \equiv B(x)$, para cada x de V. Esto es, $D^2f(x)(N, N) = \lambda(x)$, $x \in V$. De manera que, al construir una función de clase C^2 que se anule sobre V podemos escoger la segunda derivada en cada $x \in V$.

Volviendo a la construcción de f_1, debe tenerse en cuenta que, al interpretarla como aplicación bilineal, ha de ser simétrica. Sea $f_1(x)N = (\lambda_1(x), \lambda_2(x))$. Entonces, $\langle f_1(x)N, T\rangle = \lambda_1(x) + \lambda_2(x)\varphi(x)$ y $\langle f_1(x)T, N\rangle = -\varphi'(x)^2 - x\varphi'(x)\varphi''(x) \pm 1$. Por la proposición anterior podemos tomar $\lambda_2 \equiv 0$, por lo tanto ha de verificarse $\lambda_1(x) = \pm 1 - \varphi'(x)^2 - x\varphi'(x)\varphi''(x)$, para cada x de K.

Se define

$$f_1(x)N = (\pm 1 - \varphi'(x)^2 - x\varphi'(x)\varphi''(x), 0)$$

para cada x de K. Esto completa la definición de f_1. Con las notaciones anteriores tendremos:

TEOREMA 6.4. *$F = (0, f_0, f_1)$ es un jet de Whitney de clase C^2 sobre K.*

En la demostración de este teorema emplearemos la noción de separación regular introducida por Lojasiewicz ([6], [8]).

Definición 6.5. Sean K_1 y K_2 subconjuntos compactos de R^n. Se dice que K_1, K_2 están m-regularmente separados ($m \geq 1$) si son disjuntos o bien si se cumple:

(Λ_m)

Existe una constante $c > 0$ tal que, para cada $x \in K_1$ $d(x, K_2) \geq c \cdot d(x, K_1 \cap K_2)$.

Consideremos las funciones:

$$W^m(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\delta} W^m(K_1) \oplus W^m(K_2), \quad \text{donde} \quad \delta(F) = (F \mid K_1, F \mid K_2).$$

$$W^m(K_1) \oplus W^m(K_2) \xrightarrow{\pi} W^m(K_1 \cap K_2), \quad \text{donde} \quad \pi(F, G) = (F \mid K_1 \cap K_2) - (G \mid K_1 \cap K_2).$$

Se tiene entonces la siguiente proposición ([6], [8]).

PROPOSICION 6.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(a) *Los compactos K_1, K_2 están m-regularmente separados.*

(b) *La sucesión*

$$0 \to W^m(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\delta} W^m(K_1) \oplus W^m(K_2) \xrightarrow{\pi} W^m(K_1 \cap K_2) \to 0$$

es exacta.

Demostración del Teorema 6.4. Sabemos que (f_0, f_1) es un jet perpendicular de clase C^1 sobre K. Por tanto, será suficiente probar que $|(R_x{}^2F)^0 y| = O(|y - x|)$, $x, y \in K$. Demostraremos esto, primero para cuando x, y están ambos "a la derecha" del origen, sobre K. (Diremos que $x = (t, \varphi(t))$ está a la derecha del origen sobre K si $t > 0$).

Sean $x = (t, \varphi(t))$, $y = (s, \varphi(s))$ para $0 < t < s$. En virtud de la condición (6.2) basta verificar que

$$\lim_{t,s\to 0} \frac{1}{s-t}\left(\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s-t} - \varphi'(t)\right) = 0. \tag{6.7}$$

Por el teorema del valor medio,

$$\frac{t}{s-t}\left(\frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t}-\varphi'(t)\right)=t\,\frac{u-t}{s-t}\,\varphi''(r)$$

donde $0 < t < r < u < s$. Como $\dfrac{u-t}{s-t} \leq 1$ entonces

$$\left| t\,\frac{u-t}{s-t}\,\varphi''(r)\right| \leq |t\varphi''(r)| \leq |r\varphi''(r)|.$$

Como la función $h(x) = x\varphi'(x)$ es de clase C^1 sobre R entonces $r\varphi''(r) \to 0$ si $r \to 0$. Cuando $s, t \to 0$ entonces $r \to 0$ y por lo tanto se cumple (6.7).

Si $s < t < 0$, la demostración es completamente análoga.

Falta estudiar el caso en que $t < 0 < s$. Sean

$$K_1 = \{(t, \varphi(t)); -1 \leq t \leq 0\},\ K_2 = \{(t, \varphi(t)); 0 \leq t \leq 1\}.$$

$F_i = (0, f_0 \mid K_i, f_1 \mid K_i)$, $i = 1, 2$. Acabamos de demostrar que F_1, F_2 son jets de Whitney y coinciden sobre $K_1 \cap K_2 = \{(0, 0)\}$. Es sencillo demostrar que K_1 y K_2 están regularmente separados ([7]). En virtud de la proposición 1.5, F_1 y F_2 admiten una extensión común a $K_2 \cup K_2 = K$. Esto muestra que $F = (0, f_0, f_1) \in W^2(K)$, terminando así la demostración del teorema.

Observación sobre el Teorema 6.4. Sea g una función de clase C^1 sobre el plano tal que $g(0) = 0$. Entonces $f_0(x, \varphi(x)) = g(x)(-\varphi'(x), 1)$ es un campo perpendicular de clase C' sobre K. Es interesante observar que, en este caso,

$$f_1(0, 0)T = (0, \pm g'(0))$$

de modo que la aplicación $f_1(0, 0) \in L_s^2(R^2, R)$ es no-singular si $g'(0) \neq 0$.

Aplicando conjuntamente el teorema (6.4) y el teorema de extensión de Whitney queda garantizada la existencia de funciones de clase C^2 sobre el plano, tales que su primera derivada se anula en el origen y su segunda derivada, en el origen, es no-singular.

El caso singular

En la parte final de esta sección estudiaremos la construcción de funciones de clase C^2 cuyos ceros están conformados por una cúspide. Más precisamente, los ceros: $K = K_1 \cup K_2$ están descritos así

$$K_2 = \{(x, 0);\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

$$K_1 = \{(x, \varphi(x));\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

La función φ verifica las siguientes condiciones:

(i) φ es de clase C^2 excepto en el origen, en donde es de clase C^1 estrictamente.

(ii) $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Además $\varphi(x) > 0$ para $x > 0$.

Ejemplo. Sea $\varphi(x) = x^{1+a}$, para $0 < a < 1$. La función φ verifica las condiciones (i) y (ii) anteriores. La función $\varphi(x) = x^{3/2}$ es de este tipo y es un ejemplo particularmente interesante.

Una vez definida f_0 sobre K_1, la definición de f_0 sobre K_2 no es independiente de f_0/K_1 puesto que ha de cumplirse:

Dados $Y = (y, \varphi(y)) \in K_1$, $\bar{Y} = (y, 0) \in K_2$. Como (f_0, f_1) debe ser un jet de clase C^1 sobre $K = K_1 \cup K_2$, entonces:

$$\|f_0(Y) - f_0(\bar{Y}) - f_1(\bar{Y})(Y - \bar{Y})\| = 0(\|Y - \bar{Y}\|). \tag{6.8}$$

Por lo tanto:

$$f_1(\bar{0})N = \lim_{y\to 0} \frac{f_0(Y) - f_0(\bar{Y})}{\|Y - \bar{Y}\|}$$

Una forma conveniente de definir f_0 sobre $K = K_1 \cup K_2$ es la siguiente:

$$\begin{cases} f_0(x, \varphi(x)) = \frac{1}{2}\varphi(x)(-\varphi'(x), 1) \\ f_0(x, 0) = -\frac{1}{2}\varphi(x)(0, 1) \end{cases}$$

De inmediato se verifica que mediante estas definiciones se satisface (6.8).

Debemos definir f_1 sobre K para obtener

$$(f_0, f_1) \in W^1(K, R^2).$$

Definicion de f_1 sobre K_1. Se quiere que $(f_0, f_1) \in W^1(K_1, R^2)$. Por lo tanto, debe tenerse:

$$f_1(X_0)T = \lim_{Y,X\to X_0} \frac{f_0(Y) - f_0(X)}{\|Y - X\|} \quad (T \text{ es una dirección tangente})$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned} f_0(Y) - f_0(X) &= \tfrac{1}{2}\varphi(y)(-\varphi'(y), 1) - \tfrac{1}{2}\varphi(x)(-\varphi'(x), 1) \\ &= \tfrac{1}{2}(\varphi(x)\varphi'(x) - \varphi(y)\varphi'(y), \varphi(y) - \varphi(x)) \end{aligned}$$

Como φ es de clase C^1 sobre R,

$$\left[1 + \left(\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}\right)^2\right]^{1/2} \xrightarrow[X,\, Y \to X_0]{} [1 + (\varphi'(x_0))^2]^{1/2}$$

Entonces para $X_0 \neq \bar{0}$ tendremos:

$$f_1(X_0)T = (\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi')'(x_0), \tfrac{1}{2}\varphi'(x_0)) \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'(x_0))^2}}$$

Fuera del origen $\varphi\varphi'$ es de clase C^1. El problema se presenta si $X_0 = \bar{0} = (0, 0)$. En tal caso:

$$f_1(\bar{0})T = \lim_{X,Y\to\bar{0}} \left(\frac{\varphi(x)\varphi'(x) - \varphi(y)\varphi'(y)}{2\|X - Y\|}, \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{2\|X - Y\|}\right)$$

Como $\varphi'(w) \to 0$ si $w \to 0$, basta dividir entre $|y - x|$. Entonces:

$$f_1(\overline{0})T = \left(\lim_{X,Y\to 0} \frac{1}{2} \frac{\varphi(x)\varphi'(x) - \varphi(y)\varphi'(y)}{|y - x|}, 0 \right) \quad \text{pues } \varphi'(0) = 0$$

Antes de estudiar la existencia del limite hagamos algunas observaciones.

Se quiere que el campo $f_0(x, \varphi(x)) = \varphi(x)(-\varphi'(x), 1)$ sea de clase C^1. La función φ' es de clase C^1 excepto en el origen. Es natural, por tanto, pedir que la función $\varphi\varphi'$ sea de clase C^1 sobre una vecindad del origen.

Bajo esta hipótesis sobre $\varphi\varphi'$, el límite existe y es cero.

Pasamos ahora a la construcción de f_1 en las direcciones normales N, al compacto K_1. Sea $f_1(X)N = (\lambda_1(x), \lambda_2(x))$. Vista como aplicación bilineal, $f_1(X)$ debe ser simétrica. Por tanto, ha de verificarse la identidad

$$\langle f_1(X)N, T\rangle = \langle f_1(X)T, N\rangle$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \langle f_1(X)T, N\rangle &= \langle \tfrac{1}{2}((\varphi\varphi')'(x), \varphi'(x)), (-\varphi'(x), 1)\rangle \\ &= -\tfrac{1}{2}\varphi'(x)\cdot(\varphi\varphi')'(x) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x). \end{aligned}$$

En virtud de la proposición 6.3, podemos tomar $\lambda_2(x) \equiv 1$. Entonces, $\lambda_1(x) = \varphi'(x)(\varphi\varphi')'(x)$. De manera que, entérminos de la base (T, N) en cada $X \in K_1$ un $f_1(X)$, admisible, está dado por la matriz

$$f_1(X) \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\varphi\varphi')'(x) & \frac{1}{2}(-\varphi'(x) - \varphi'(x)(\varphi\varphi')'(x)) \\ \frac{1}{2}\varphi'(x), & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $f_0(x, 0) = -\frac{1}{2}\varphi(x)(0, 1)$. Para cada $X \in K_2$, $f_1(X)$ está dada por la matriz:

$$f_1(X) \equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varphi'(x) \\ \frac{1}{2}\varphi'(x) & 1 \end{bmatrix}$$

en términos de la base $T = (1, 0)$, $N = (0, 1)$ en el punto X. Los procedimientos para obtener $f_1 \mid K_2$ son los mismos que empleamos para obtenerla sobre K_1.

PROPOSICION 6.9. *Con las notaciones anteriores* $(f_0, f_1) \in W^1(K, R^2)^\perp$

La demostración de esta proposición puede consultarse en [7].

TEOREMA 6.10. *Sea* $F = (0, f_0, f_1)$. *Entonces* $F \in W^2(K)$.

Demostración. Es suficiente demostrar que $\|(R_X{}^2F)^0(Y)\| = O(\| Y - X\|^2)$ para $X, Y \in K$.

Primero, tomemos $X, Y \in K_1$. Entonces $X = (x, \varphi(x))$, $Y = (y, \varphi(y))$. $-(R_X{}^2F)^0(Y) = f_0(X)(Y - X) + \frac{1}{2}f_1(X)(Y - X)^2$. En virtud de la continuidad de f_1, podemos reemplazar $f_1(X)$ por $f_1(0)$, para efectos de tomar limites cuando $X, Y \to 0$.

Estudiemos pues la expresión:

$$\Delta = f_0(X)(Y - X) + \tfrac{1}{2}f_1(\overline{0})(Y - X)^2.$$

Si $\| \Delta \| = O(\| Y - X \|^2)$ entonces $\|(R_X{}^2F)^0(Y)\| = O(\| Y - X \|^2)$. Ahora,

$$\tfrac{1}{2}f_1(0)(Y - X)^2 = \tfrac{1}{2}(\varphi(y) - \varphi(x))^2$$

y

$$f_0(X)(Y - X) = \tfrac{1}{2}\varphi(x)[\varphi(y) - \varphi(x)] - \tfrac{1}{2}(y - x)\varphi(x)\varphi'(x).$$

Entonces

$$f_0(X)(Y - X) + \tfrac{1}{2}f_1(0)(Y - X)^2 = \tfrac{1}{4}[\varphi(y) - \varphi(x)]^2$$
$$+ \tfrac{1}{4}[\varphi(y) - \varphi(x)]^2 + \tfrac{1}{2}\varphi(x)[\varphi(y) - \varphi(x)] - \tfrac{1}{2}(y - x)\varphi(x)\varphi'(x).$$

Nótese que $\| Y - X \|^2 \geq (y - x)^2$, por tanto,

$$\frac{\frac{1}{4}[\varphi(y) - \varphi(x)]^2}{\| Y - X \|^2} \leq \frac{1}{4}\left[\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}\right]^2 \xrightarrow[x,\, y \to 0]{} 0.$$

Luego $\frac{1}{4}[\varphi(y) - \varphi(x)]^2 = O(\| Y - X \|^2)$. Falta estudiar, de Δ, la expresión:

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varphi(y)^2 - \tfrac{1}{2}\varphi(x)^2 - (y - x)\varphi(x)\varphi'(x)\}.$$

Nótese que la función $g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x)^2$ es de clase C^2 sobre R. Además:

$$g''(x) = \varphi'(x)^2 + \varphi(x)\varphi''(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = g''(0),$$

puesto que la función $\varphi\varphi'$ es de clase C^1 sobre R y $(\varphi\varphi')'(0) = 0$.

De manera que, podemos escribir Δ_1 en la forma:

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}\{g(y) - g(x) - (y - x)g'(x) - \tfrac{1}{2}(y - x)^2g''(x)\} + \tfrac{1}{2}(y - x)^2g''(x).$$

Como $g''(x) \to 0$ cuando $x \to 0$ entonces:

$$\frac{1}{2}\frac{(y - x)^2\,|g''(x)|}{\| Y - X\|^2} \leq \frac{1}{2}\,|g''(x)| \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

Resta estudiar, de Δ_1, la expresión

$$R_2g(x, y) = [\tfrac{1}{2}g(y) - g(x) - (y - x)g'(x) - \tfrac{1}{2}(y - x)^2g''(x)]$$

Pero $\| R_2g(x, y)\| = O(|y - x|^2)$, ([1], pag. 50) por tanto, $\| \Delta_1 \| = O(\| Y - X\|)^2)$.

Lo anterior pureba que $\| (R_X{}^2F)^0(Y) \| = O(\| Y - X \|^2)$ si X, $Y \in K_1$.
Para el caso X, $Y \in K_2$ es inmediato que $\|(R_X{}^2F)^0(Y)\| = O(\| Y - X \|^2)$. Consideremos pues $Y \in K_1$, $X \in K_2$. Bajo estas condiciones,

$$f_0(X)(Y - X) = \langle(0, -\tfrac{1}{2}\varphi(x)(y - x, \varphi(y))\rangle = -\tfrac{1}{2}\varphi(x)\varphi(y)$$

y

$$\tfrac{1}{2}f_1(\overline{0})(Y - X)^2 = \tfrac{1}{2}\varphi(y)^2.$$

Por tanto,

$$\frac{\| \Delta \|}{\| Y - X \|^2} \leq \frac{1}{2} \frac{|[\varphi(y) - \varphi(x)]| \cdot \varphi(Y)}{|y - x| \cdot \varphi(y)} \xrightarrow[X,\, Y \to 0]{} 0$$

Esto prueba que $\| (R_X{}^2F)^0(Y) \| = 0\,(\| Y - X \|^2)$.

Puesto que f_1 es continua y $(f_0, f_1) \in W^1(K, R^2)$ se concluye que $\| (R_Y{}^2F)^0(X) \| = O(\| Y - X \|^2)$, completando así la prueba del teorema.

En virtud del Teorema 6.10 y del Teorema de Extensión de Whitney se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 6.11. *Existe $F \in C^2(R^2)$ que se anula sobre la (semi)-cúspide $K = K_1 \cup K_2$ descrita en esta sección; además $DF(0) = 0$ y $D^2F(0) \neq 0$ está dada por* $D^2F(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A continuación nos proponemos construir un jet de Whitney de clase C^2 de la forma $F = (0, f_1, f_2)$, sobre la cúspide $K = K_1 \cup K_2$, tal que $f_1(0) \neq 0$. La cúspide K está descrita mediante una función φ, definida sobre R, que satisface las condiciones siguientes:

(i) φ es de clase C^2, excepto en el origen en donde es de clase C^1 estrictamente.

(ii) $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Además $\varphi(x) > 0$ para $x > 0$.

(iii) La función $\varphi\varphi'$ es de clase C^1 sobre R.

Los compactos K_1 y K_2 están descritos así:

$$K_1 = \{(x, \varphi(x));\ 0 \leq x \leq 1\}, \qquad K_2 = \{(x, -\varphi(x));\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

Pasemos ahora a la construcción del jet (f_1, f_1). Sea

$$\text{(6.12)} \qquad \begin{aligned} f_0(x, -\varphi(x)) &= -\varphi(x)(\varphi'(x), 1) && (\text{sobre } K_2) \\ f_0(x, \varphi(x)) &= \varphi(x)(-\varphi'(x), 1) && (\text{sobre } K_1) \end{aligned}$$

La definición de f_1 sobre K debe ser tal que $f_1(0)$, escrita respecto la base usual del plano, tenga por matriz la $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. En los demás puntos de K, definimos f_1 de la siguiente manera: considérese la base $T = (1, \varphi'(x))$, $N = (-\varphi'(x), 1)$ en cada punto $(x, \varphi(x))$ de K_1 y defínase $f_1(x, \varphi(x))$ mediante la matriz

$$\text{(6.13)} \qquad f_1(x, \varphi(x)) \equiv \begin{bmatrix} (\varphi\varphi')'(x) & \varphi'(x)(\varphi\varphi')'(x) \\ \varphi'(x) & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener la expresión correspondiente de f_1 sobre K_2, reemplazamos φ por $-\varphi$ en (6.12).

PROPOSICION 6.14. *Sea (f_0, f_1) el jet definido por* 6.12 *y* 6.13. *Entonces,* $(f_0, f_1) \in W^1(K, R^2)^\perp$.

La demostración, sencilla, puede consultarse en ([7]).

PROPOSICION 6.15 *Sea* (f_0, f_1) *el jet de la proposición anterior. Entonces,* $F = (0, f_0, f_1) \in W^2(K)$.

Demostración. Será suficiente, probar que

$\|(R_X{}^2F)^0(Y)\| = O(\| Y - X\|^2)$. Por la continuidad de f_1,

en la expresión $(R_X{}^2F)^0(Y)$, podemos reemplazar $f_1(X)$ por $f_1(0)$. Debemos probar que $\Delta = f_0(X)(Y - X) + \frac{1}{2}f_1(0)(Y - X)^2$ es $O(\| Y - X\|^2)$. Sean $X = (x, \varphi(x))$, $Y = (y, \varphi(y))$. La función $g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x)^2$ es de clase C^2 sobre R y $g''(0) = 0$. Empleando el argumento dado en la demostración del Teorema 6.10 se concluye que $\| \Delta \| = O(\| Y - X\|^2)$. Si X, $Y \in K_2$ se procede análogamente.

Finalmente, se observa que

$$-(R_Y{}^2F)^0(X) = (R_X{}^2F)^0(Y) + [f_0(Y) - f_0(X) - f_1(X)(Y - X)] \cdot (Y - X) + \tfrac{1}{2}[f_1(Y) - f_1(X)](Y - X)^2.$$

Como f_1 es continua y $(f_0, f_1) \in W^1(K, R^2)$, se concluye que $\|(R_Y{}^2F)^0(X)\| = O(\| Y - X\|^2)$. Queda demostrado pues, que F es un jet de Whitney de clase C^2.

Si la cúspide $K = K_1 \cup K_2$ está descrita mediante las funciones φ_1 y φ_2 de manera que: $K_i = \{(x, \varphi_i(x)); 0 \leq x \leq 1, i = 1, 2\}$, y, además, $\varphi_1 \neq \pm\varphi_2$, diremos que K es una "cúspide asimétrica". Naturalmente, pedimos que φ_i sea de clase C^2 fuera del origen y de clase C^1, estrictamente en el origen. Además $\varphi_i'(0) = 0$. Una familia interesante de cúspides asimétricas es la descrita mediante las funciones $\varphi_1(x) = x^{1+a}$, $\varphi_2(x) = -x^{1+b}$, $0 < a < b$, Si $b < 1$, φ_2 es estrictamente C^1 en el origen. Los procedimientos empleados previamente para construir jets perpendiculares de clase C^2 sobre cúspides, no son generalizables, directamente, al caso asimétrico. Así puede darse ejemplos de jets de clase C^2 sobre K_1 y K_2, por separado, que no son de clase C^2 sobre K. Sin embargo, con ciertas modificaciones es posible obtener teoremas anàlogos al 6.10 y 6.15 de la presente sección. Véase [7] para mayor información.

7. Estratificaciones y localizaciones

A continuacion vamos a estudiar las localizaciones de ideales $J^2(K)$, para K un subconjunto cerrado del plano. Sobre K impondremos la condición de que sea "estratificable". Por ello se entenderá que podremos clasificar los puntos de K dentro de ciertos "tipos" que pasamos a describir.

Tipo 1. Un punto x de K es de tipo 1 si y solo si existe una vecindad $V(x)$ de x, en el plano, tal que $V(x) \cap K$ está contenida en una subvariedad del plano de clase C^2. Si f es una función de clase C^2 que se anula sobre K, entonces su polinomio de Taylor $T_x{}^2f \equiv (0, Df(x), D^2f(x))$. De manera que los elementos de $J^2(K)_x$ pueden verse como parejas $(f_0(x), f_1(x))$ de una aplicación lineal $f_0(x)$

sobre el plano, que se anula en la dirección tangente de K en x, y de una aplicación bilineal simétrica $f_1(x)$ sobre el plano. De hecho, $(f_0(x), f_1(x))$ es un C^1-vector perpendicular.

Aplicando el Teorema 5.1 obtenemos la caracterización de las localizaciones de $J^2(K)$ alrededor de x (es decir, sobre $V(x) \cap K$).

Observación. Sea $f \in J^2(K)$. Puede suceder que $D^2f(x)$ sea una forma bilineal no-singular En tal caso, ello significa que los ceros de f, $Z[f]$, poseen una rama transversal a K en el punto x. Se debe considerar también la posibilidad de que $D^2f(x)$ sea singular. Esto sucede si $Z[f] = K$ alrededor de x (en cuyo caso además se puede tener $Df(x) \neq 0$) o $Z[f]$ posee una rama que intersecta tangencialmente a K en el punto x.

Tipo 2. Un punto x de K es de tipo 2 si y solo si existe una vecindad $V(x)$ de x, en el plano, tal que $V(x) \cap K$ está contenida en una subvariedad del plano, de clase C^1 estrictamente. Si f es una función de clase C^2 que se anula sobre K, entonces $Df(x) = 0$, de modo que su polinomio de Taylor T_x^2f solo contiene parte cuadrática: $T_x^2f \equiv (0, 0, D^2f(x))$. Esto indica que $J^2(K)_x$ está constituído por C^1-vectores perpendiculares de la forma $(0, f_1(x))$ siendo $f_1(x)$ bilineal singular.

Estamos pues en condiciones de aplicar el Teorema 5.5. y obtener la caracterización de las localizaciones de $J^2(K)$ alrededor de cada punto x de tipo 2.

Observación. Si $f \in J^2(K)$, puede suceder que $D^2f(x) = 0$. Esto se tiene si además de anularse sobre K, f se anula sobre una rama transversal a K en x o sobre una rama que intersecta a K, tangencialmente en x. Entonces, solo si $Z[f] = K$ alrededor de x, puede tenerse que $D^2f(x) \neq 0$.

Tipo 3. Un punto x de K es de tipo 3, si y solo si, existe una vecindad $V(x)$ de x en el plano tal que $V(x) \cap K$ está contenida en una variedad de clase C^2 excepto en x donde es, estrictamente de clase C^1.

Sea f una función de clase C^2 que se anula sobre K. Entonces $Df(x) = 0$. Si $Z[f] = K$, alrededor de x, entonces el cono tangente de $Z[f]$ en x, contiene una sola dirección. Por tanto $D^2f(x)$ es singular; sin pérdida de generalidad podemos suponer que el cono tangente a $Z[f]$ en x es el eje x y la dirección normal a $Z[f]$ en x es el eje y. Entonces, respecto estos ejes de coordenadas $D^2f(x)$ toma la forma $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, λ un número real arbitrario. Estos pares $(0, B(x))$ representan elementos de $J^2(K)_x$. La proposición 6.3 nos permite construir elementos de $J^2(K)_x$. Sin embargo, para la caracterización completa de las localizaciones de $J^2(K)$ alrededor de x (un punto de tipo 3) puede ser necesario considerar otra clase de elementos en $J^2(K)_x$, además de los mencionados en líneas anteriores. Las consideraciones que haremos a continuación tienen por objeto aclarar este punto.

Sea φ: $R \to R$ una función de clase C^2 fuera del origen y de clase C^1, estrictamente, en el origen. Dado un punto x de K, de tipo 3, podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que la subvariedad que contiene $V(x) \cap K$ es tangente al eje x en el origen; además que $x = (0, 0)$. Supondremos además que los puntos de $V(x) \cap K$ se pueden representar como $(z, \varphi(z))$ para z en una vecindad del origen.

En estas condiciones, diremos que el punto x de K es TIPO 4 si y sólo si $x\varphi''(x) \to 0$ cuando $x \to 0$.

Los resultados de la sección 6 nos dicen que dado x un punto de tipo 3, existe un C^1-vector perpendicular $(f_0(x), f_1(x))$ con $f_1(x)$ no-singular tal que $F = (0, f_0(x), f_1(x))$ es un jet de Whitney de clase C^2 sobre K, si y solo si x es de tipo 4. De manera que si x es de tipo 4, existen en $J^2(K)_x$ elementos $(f_0(x), f_1(x))$ con $f_1(x)$ no-singular.

Ejemplo (*Un punto de tipo* 3 *que NO es de tipo* 4). Sea $\varphi(x) = x^{3/2}\cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^a}$, si $x \neq 0$ $a = \frac{1}{4}$ y $\varphi(0) = 0$.

Se quiere probar que φ es de clase C^2 fuera del origen, de clase C^1, estrictamente, en el origen y además que $x\varphi''(x)$ no converge a cero si x converge a cero. Un cálculo directo muestra que, para $x \neq 0$:

$$\varphi'(x) = \tfrac{3}{2}\, x^{1/2}\cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x^a} + a\cdot x^{1/4}\cdot \cos \frac{1}{x^a}$$

$$\varphi''(x) = \tfrac{3}{4}\, x^{-1/2}\cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x^a} - \tfrac{3}{2}\, a\cdot x^{-3/4}\cdot \cos \frac{1}{x^a} + \frac{a^2}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x^a} + \frac{a}{4}\, x^{-3/4}\cdot \cos \frac{1}{x^a}.$$

Es claro que $\varphi'(x) \to 0$ si $x \to 0$. Por otra parte $\varphi'(0) = \lim_{x\to 0} x^{1/2}\cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^a} = 0$.

Esto muestra que φ es de clase C^1 alrededor del origen. Fuera del origen, es visible que φ es de clase C^2. Por otra parte, para $x \neq 0$ tenemos:

$$x\varphi''(x) = \left(\tfrac{3}{4}\, x^{1/2}\cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x^a} - \tfrac{3}{8}\, x^{1/4}\cdot \cos \frac{1}{x^a} + \frac{a}{4}\, x^{1/4}\cdot \cos \frac{1}{x^a}\right) + a^2\cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x^a}$$

Lo que está entre paréntesis, en la expresión de $x\varphi''(x)$, converge a cero si x converge a cero. Pero $a^2\cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^a}$ no converge a cero cuando x converge a cero. Por tanto $x\varphi''(x)$ no converge a cero si $x \to 0$. Hemos probado entonces que el origin $(0, 0)$ es un punto de tipo 3 pero no de tipo 4, del cerrado $K = \{(x, \varphi(x));\ -1 \leq x \leq 1\}$.

Observación. Dado el cerrado K y $x \in K$ un punto de tipo 3. Sea $f \in J^2(K)$. Lo que hace posible que $Z[f]$ tenga una rama transversal a K en el punto x, es precisamente, que x sea de tipo 4.

Tipo 5. Un punto x de K es de tipo 5 si y solo si, existe una vecindad $V(x)$ en el plano, de x tal que $V(x) \cap K$ está contenida en dos subvariedades del plano de clase C^2 excepto en x donde se intersectan tangencialmene; y allí son de clase C^1 estrictamente. Además $\varphi\varphi'$ es de clase C^1 alrededor del punto x.

Sea f una función de clase C^2 que se anula sobre K. Entonces $Df(x) = 0$ y necesariamente $D^2f(x)$ es singular, pues el cono tangente de K en x posee una sola dirección ([5], pág 45). De manera que los C^1-vectores perpendiculares a K en el punto x de tipo 5, sólo pueden ser de la forma $(0, B(x))$ siendo $B(x)$ bilineal singular.

Los teoremas 6.10 y 6.15 constituyen las piezas fundamentales para obtener la caracterización de las localizaciones de $J^2(K)$ alrededor de un punto de tipo 5.

CENTRO DE INVESTIGACION DEL IPN, MEXICO, D.F.

Referencias

[1] S. BROMBERG Y J. J. RIVAUD, Análisis Diferencial, Fondo de Cultura Económica, México, D. F., 1976.

[2] E. FILLOY, *Pointwise characterization of ideals of differentiable functions*, Inventiones Math. **13** (1971), 143–168.

[3] G. GLAESER, *Etude de quelques, algèbres tayloriennes*, J. Analyse Math. **6** (1958), 1–124.

[4] E. LIMA, Variedades Diferenciáveis, IMPA, Serie Monografías de Matemática, No. 15, Río de Janeiro, 1973.

[5] J. LUDLOW, *Anillos de funciones diferenciables de clase C^k*, Bol. Soc. Math. Mexicana, **23,** 1 (1978), 1–22.

[6] B. MALGRANGE, Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press and Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1966.

[7] L. MORENO, Jets perpendiculares y localizaciones de Whitney, Tesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México, 1977.

[8] J. TOUGERON, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse der Mathematik, **71,** Springer Verlag, 1972.

[9] H. WHITNEY, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 63–89.

[10] ———, *On ideals of differentiable functions*, Amer. J. Math. **70** (1948), 635–658.