Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 27, No. 2, 1982

UN TEOREMA DE EXTENSIÓN EN CLASE C^1

POR SHIRLEY BROMBERG

El propósito de este trabajo consiste en hallar condiciones para que una función definida sobre un subconjunto cerrado de $\mathbf{R}^n$ y que toma valores reales sea la restricción a dicho cerrado de una función de clase C^1.

Los orígenes de este problema se encuentran en los trabajos de H. Whitney [5, 6], quien obtuvo condiciones cuando $n = 1$ para que una función definida sobre un cerrado fuese la restricción de una función de clase C^r [6]. En otro trabajo fundamental, Whitney introdujo la noción de "función diferenciable de clase C^r" para funciones definidas sobre subconjuntos cerrados de $\mathbf{R}^n$ [5] y demostró que si tal era el caso, la función es la restricción de una función de clase C^r, en el sentido usual.

Los resultados aquí expuestos están basados en la tesis doctoral del autor, escrita bajo la dirección del Dr. J. J. Rivaud y presentada en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de Instituto Politécnico Nacional.

1. Preliminares

Sea $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales. Notamos $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n): x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \cdots, n\}$. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$. Denotamos por $C^r(U; \mathbf{R}^m)$ al conjunto de todas las aplicaciones de clase C^r definidas sobre U y con valores en $\mathbf{R}^m (r \geq 1)$. Denotamos por $C^r(U)$ al conjunto $C^r(U; \mathbf{R})$. Sea $f \in C^1(U)$. Entonces f induce una aplicación continua $\nabla f: U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ definida por la relación

$$\mathrm{Df}(x)v = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

para todo $v \in \mathbf{R}^n$ y todo $x \in U$; donde $\langle , \rangle$ denota el producto interno usual de $\mathbf{R}^n$. Como en este trabajo solo nos referiremos a funciones de clase C^1, omitiremos todos los super-índices que se refieren a la clase de diferenciabilidad.

Sea X un subconjunto cerrado de U.

Definición (1.1). Sea f una función continua a valor real definida sobre X y sea v una función continua a valor en $\mathbf{R}^n$ definida sobre X. Diremos que la pareja (f, v) es un *1-jet definido sobre* X. Si, además, existe $f^* \in C(U)$ tal que $f^* |_X = f$ y $\nabla f^* |_X = v$, diremos que la pareja (f, v) es un *1-jet de Whitney definido sobre* X. Denotamos por $W(X)$ al conjunto de todos los 1-jets de Whitney definidos sobre X.

Sea $F = (f, v)$ un 1-jet definido sobre X. Denotamos

$$R_x F(y) = f(y) - f(x) - \langle v(x), y - x \rangle$$

Como este trabajo trata sobre extensiones de clase C^1, sólo utilizaremos el siguiente caso particular del Teorema de Extensión de Whitney.

TEOREMA (1.2). *Las siguientes condiciones son equivalentes*
(i) $F = (f, v) \in W(X)$
(ii) *para todo* $x_0 \in X$,

$$\lim_{x,y \to x_0} \frac{R_x F(y)}{\| x - y \|} = 0,$$

donde $x, y, \in X$.

El enunciado del Teorema de Extensión de Whitney en toda su generalidad y su demonstración pueden verse en [2] y [4].

A continuación, definiremos un espacio tangente a un cerrado do $\mathbf{R}^n$, siguiendo los lineamientos de G. Glaeser [3].

Sea X un subconjunto cerrado de $\mathbf{R}^n$ y sea $x \in X$.

Definición (1.3). Decimos que un vector $v \in \mathbf{R}^n$ *pertenence al paratangente lineal de* X *en* x si existen $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ sucesiones de puntos de X que convergen a x tales que

$$v = \lim_{k \to \infty} \frac{x_k - y_k}{\| x_k - y_k \|}.$$

Denotamos por ptg $X(x)$ al paratangente lineal de X en x.
Sea $\mathscr{A}(x, X)$ la colección de todas las subvariedades M de $\mathbf{R}^n$ de clase C^1 tales que, para alguna vecindad $N(x)$ de x en $\mathbf{R}^n$, se satisface

$$X \cap N(x) \subseteq M \cap N(x).$$

PROPOSICIÓN (1.4). *Sea* $k = \min\{\dim M : M \in \mathscr{A}(x, X)\}$. *Sean* M, N *en* $\mathscr{A}(x, X)$ *con* $\dim M = k$. *Entonces* $T_x M$ *es subespacio linear de* $T_x N$.

La demostración de esta proposición puede verse en [1] o en [3] y la siguiente definición tiene sentido:

Definición (1.5). El *paratangente lineal de clase* C^1 del cerrado X en el punto $x \in X$ (el cual denotaremos por ptl $X(x)$) es el espacio tangente en x a una variedad $M \in \mathscr{A}(x, X)$ de dimensión mínima. O equivalentemente,

$$\text{ptl } X(x) = \cap \{T_x M : M \in \mathscr{A}(x, X)\}.$$

Notemos que ptg $X(x) \subseteq$ ptl $X(x)$ para todo $x \in X$ y si x es un punto aislado de X, ptg $X(x) = \varnothing$ y ptl $X(x) = (0)$. El ptl $X(x)$ puede conseguirse efectuando ciertas operaciones sobre ptg $X(x)$ como precisaremos enseguida.

Definición (1.6). Llamamos un *haz de rectas definido sobre* X a toda aplicación que asigna a cada punto de X un subespacio linear de $\mathbf{R}^n$. Tenemos que la aplicación $x \longrightarrow$ ptl $X(x)$ es un haz de rectas definido sobre X pero la aplicación $x \longrightarrow$ ptg $X(x)$ no lo es.

Definición (1.7). Sea G un haz de rectas definido sobre X. Decimos que v *pertenece al límite superior de* G *en* x ($v \in \limsup G(x)$) si existen $\{x_k\}$ sucesión de puntos de X que converge a x y $\{v_k\}$ sucesión de vectores de $\mathbf{R}^n$ con $v_k \in G(x_k)$ para todo k tal que

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k$$

Decimos que el haz de rectas G es *superiormente semi-continuo* si, para todo $x \in X$, se tiene que

$$G(x) = \lim\sup G(x).$$

Notemos que $G(x) \subseteq \lim\sup G(x)$ para todo $x \in X$ y todo haz de rectas G definido sobre X.

TEOREMA (1.8). *El haz de rectas definido sobre X que a cada punto $x \in X$ asigna el subespacio* ptl $X(x)$ *es superiormente semi-continuo. Además si G es un haz de rectas definido sobre X superiormente semi-continuo tal que en cada punto $x \in X$, $G(x)$ contiene a* ptg $X(x)$ *entonces*

$$\text{ptl } X(x) \subseteq G(x).$$

La demostración de este teorema puede verse en [3].

Sea E un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Denotamos por $L(E)$ al subespacio lineal de $\mathbf{R}^n$ generado por E, esto es, $L(E)$ es el mínimo subespacio de $\mathbf{R}^n$ que contiene a E.

TEOREMA (1.9). *Sea X un subconjunto cerrado de $\mathbf{R}^n$, sea $x \in X$. Definimos*

$$G_0(x) = L(\text{ptg } X(x))$$

y

$$G_i(x) = L(\lim\sup G_{i-1}(x)). \qquad i \geq 1$$

Entonces $G_{2n}(x) = \lim\sup G_{2n-1}(x) = \text{ptl } X(x)$

La demostración de este teorema puede verse en [3]. Sea E un subespacio de $\mathbf{R}^n$, sea $v \in \mathbf{R}^n$. Decimos que v es *ortogonal* a E si para todo $u \in E$ se tiene que

$$\langle u, v\rangle = 0.$$

Sea $x \in X$, denotamos por $P_x:\mathbf{R}^n \to \text{ptl } X(x)$ a la proyección ortogonal sobre ptl(x). Es decir, $P_x(v)$ es el elemento de ptl $X(x)$ tal que $v - P_x(v)$ es ortogonal a ptl $X(x)$.

Definición (1.10). Sea I un intervalo de la recta y sea $\alpha:I \to \mathbf{R}$. Decimos que α es cóncava si y sólo si para todo x, $y \in I$ y todo $0 \leq t \leq 1$ se tiene que

$$t\alpha(x) + (1-t)\alpha(y) \leq \alpha(tx + (1-y)y).$$

Definición (1.11). Sea $I = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$. Decimos que $\alpha:I \to I$ es un *módulo de continuidad* si y sólo si α es creciente, α es cóncava, α es continua en 0 y $\alpha(0) = 0$.

PROPOSICIÓN (1.12). *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbf{R}^n$ y sea $f: K \to \mathbf{R}^k$ una aplicación continua. Entonces existe α módulo de continuidad tal que*

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \alpha(\| x - y \|) \qquad \text{para todo} \quad x, y \in K.$$

La demostración de esta proposición es sencilla.

2. Un teorema de extensión de clase C^1

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, sea X un subconjunto cerrado contenido en U.

Definición (2.1). Decimos que una aplicación a valor real definida sobre X *admite extensión de clase C^1 a U* si ella es la restricción a X de una aplicación de clase C^1 definida sobre U.

Denotamos por $E(X, U)$ al conjunto de todas las aplicaciones a valor real definidas sobre X que admiten extensión de clase C^1 a U. Escribimos $E(X)$ en lugar de $E(X, \mathbf{R}^n)$.

Definición (2.2). Decimos que una aplicación $v:X \to \mathbf{R}^n$ es *tangente a X* si para todo $x \in X$ se tiene que $v(x) \in \text{ptl } X(x)$.

Definición (2.3). Decimos que una aplicación tangente a X, $v:X \to \mathbf{R}^n$ es *tangencialmente continua en $x_0 \in X$* si

$$\lim_{x \to x_0} \| P_x(v(x_0)) - v(x) \| = 0.$$

donde $x \in X$.

Decimos que v es *tangencialmente continua en X* si v es tangencialmente continua en cada punto de X. Observemos que si x es un punto aislado de X, entonces $v(x) = 0$ y v es tangencialmente continua en x.

TEOREMA (2.4). *Sea f una función a valor real definida sobre X. Entonces $f \in E(X, U)$ si y solamente si existe una aplicación tangente $v:X \to \mathbf{R}^n$ tangencialmente continua tal que para todo $x_0 \in X$ se tiene que*

$$\text{(W)} \qquad \lim_{x,y \to x_0} \frac{f(x) - f(y) - \langle v(x_0), x - y \rangle}{\| x - y \|} = 0.$$

donde $x, y \in X$.

En este caso decimos que la pareja (f, v) satisface la condición (W).

Notemos que si f es una aplicación a valor real tal que para alguna aplicación tangente $v:X \to \mathbf{R}^n$, la pareja (f, v) satisface la condición (W), entonces f es continua. La necesidad de la condición es sencilla de probar ya que si f es la restricción a X de una función $f^* \in C(U, \mathbf{R})$, entonces la aplicación $v(x) = P_x(\nabla f^*(x))$ es tangencialmente continua y la pareja (f, v) satisface la condición (W).

Probaremos la suficiencia para subconjuntos compactos de $\mathbf{R}^n$. El caso general se obtiene utilizando la misma técnica que se emplea al pasar, en el

Teorema de Extensión de Whitney, de subconjuntos compactos a cerrados arbitrarios.

En la prueba de la suficiencia, necesitamos un Lema de Whitney y algunos resultados sencillos sobre el paratangente lineal de clase C^1. Las demostraciones, que omitiremos, pueden verse en la bibliografía indicada.

LEMA (2.5). (Whitney) [2], [4]. *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbf{R}^n$. Entonces existe una familia $\{\varnothing_i\}_{i\in I}$ de funciones en $C^\infty(\mathbf{R}^n\backslash K)$ que satisface las siguientes condiciones:*

(i) $\varnothing_i(x) \geq 0$ *para toda* $x \in \mathbf{R}^n\backslash K$ *y toda* $i \in I$

(ii) $\{\text{Sop } \varnothing_i\}_{i\in I}$ *es una familia localmente finita de subconjuntos de* $\mathbf{R}^n$ *y si denotamos por* $I(x)$ *al conjunto de todas las* $i \in I$ *tales que* $x \in \text{Sop } \varnothing_i$, *entonces* $I(x)$ *tiene a lo más* 4^n *elementos.*

(iii) *para toda* $i \in I$ *se satisface la desigualdad*

$$2 \operatorname{dist}(\text{Sop } \varnothing_i, K) \geq \operatorname{diam}(\text{Sop } \varnothing_i)$$

(iv) *para todo* $x \in \mathbf{R}^n\backslash K$, *se tiene que*

$$\textstyle\sum_{i\in I} \varnothing_i(x) = 1$$

LEMA (2.6). (1): *Sea X un subconjunto cerrado de X, sea $x_0 \in X$ y sea u un vector ortogonal a* ptl $X(x_0)$. *Entonces*

$$\lim_{x,y\to 0} \quad u, \left\langle \frac{x-y}{\| x-y \|} \right\rangle = 0$$

y,

$$\lim_{x\to x_0} P_x(u) = 0$$

donde $x \in X$.

Demostración de la suficiencia en el Teorema 2.4. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbf{R}^n$. Sean $f:K \to \mathbf{R}$ y $v:K \to \mathbf{R}^n$ con v aplicación tangente y tangencialmente continua tales que la pareja (f, v) satisface la condición (W). Supongamos que existe una aplicación continua $w:K \to \mathbf{R}^n$ tal que

$$P_x(w(x)) = v(x) \qquad \text{para todo} \quad x \in K.$$

Entonces $F = (f, w) \in W(K)$. En efecto, f y w son continuas y

$$\begin{aligned} | R_xF(y) | &= | f(y) - f(x) - \langle w(x), y - x\rangle | \\ &\leq | f(y) - f(x) - \langle v(x_0), y - x\rangle | \\ &\quad + | \langle v(x_0), y - x\rangle - \langle w(x_0), y - x\rangle | \\ &\quad + | \langle w(x_0), y - x\rangle - \langle w(x), y - x\rangle |. \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{x,y\to x_0}\frac{|R_xF(y)|}{\|y-x\|}\leq \lim_{x,y\to x_0}\frac{|f(y)-f(x)-\langle v(x_0),\,y-x\rangle|}{\|y-x\|}$$
$$+\lim_{x,y\to x_0}\left|\left\langle v(x_0)-w(x_0),\,\frac{x-y}{\|x-y\|}\right\rangle\right|$$
$$+\lim_{x,y\to x_0}\|w(x_0)-w(x)\|.$$

donde $x,\,y\in K$.

Como la pareja $(f,\,v)$ satisface la condición (W), el primer término de la derecha es nulo. El Lema 2.6 implica que el segundo término de la derecha también es nulo, ya que el vector $v(x_0)-w(x_0)=P_{x_0}(w(x_0))-w(x_0)$es ortogonal al subespacio lineal ptl $K(x_0)$. El tercer término de la derecha se anula puesto que w es continua. Por lo tanto, el Teorema 1.2 implica que $F\in W(K)$ y por lo tanto $f\in E(K)$.

Construcción de w con las propiedades requeridas. Sea $K_i=\{x\in K\colon \dim \operatorname{ptl} K(x)\geq i\}$. Entonces K_i es compacto para cada i y P_x, v son continuas sobre $K_{i+1}\backslash K_i$ para cada $i\geq 0$. Sea N el mínimo natural para el cual $K_{N+1}=\emptyset$. Definimos $w_0\colon K_N\to\mathbf{R}^n$ por $w_0(x)=v(x)$. Luego w_0 es continua. Supongamos construídas $w_0,\,w_1,\,\cdots,\,w_j$ tales que para $i=0,\,1,\,\cdots,\,j$.

(i) $w_i\colon K_{N-i}\to\mathbf{R}^n$
(ii) $w_i(x)=w_{i-1}(x)$ para todo $x\in K_{N+1-i}$
(iii) $P_x(w_i(x))=v(x)$ para todo $x\in K_{N-i}$
(iv) w_i es continua.

Sea $\{\emptyset_i\}_{i\in I}$ la partición de la unidad asociada a K_{N-j} dada por el Lema 2.5. Para cada $i\in I$, sea $a_i\in K_{N-j}$ tal que

$$\operatorname{dist}(\operatorname{Sop}\emptyset_i,\,K_{N-j})=\operatorname{dist}(\operatorname{Sop}\emptyset_i,\,a_i).$$

Definimos $w_{j+1}\colon K_{N-j-1}\to\mathbf{R}^n$ por

$$w_{j+1}(x)=\begin{cases} w_j(x) & \text{si}\quad x\in K_{N-j}\\ v(x)+\sum_{i\in I}\emptyset_i(x)\{w_j(a_i)-P_x(w_j(a_i))\}. & \text{si}\quad x\in K_{N-j-1}/K_{N-j}\end{cases}$$

Entonces w_{j+1} satisface las condiciones (i), (ii), (iii). Veamos que es continua. Como en $K_{N-j-1}\backslash K_{N-j}$ tanto v como P_x son continuas y la familia $\{\emptyset_i\}$ es localmente finita, w_{j+1} es continua sobre $K_{N-j-1}\backslash K_{N-j}$. Sea α módulo de continuidad tal que

$$\|w_j(x)-w_j(y)\|\leq\alpha(\|x-y\|)$$

para todo $x,\,y\in K_{N-j}$.

Entonces, para $x_0\in K_{N-j}$,

(i) si $x\in K_{N-j}$

$$\|w_{j+1}(x_0)-w_{j+1}(x)\|=\|w_j(x_0)-w_j(x)\|\leq\alpha(\|x-x_0\|)$$

(ii) si $x \in K_{N-j-1} \backslash K_{N-j}$, entonces $\sum_{i\in I} \varnothing_i(x) = 1$

$$\| w_{j+1}(x_0) - w_{j+1}(x) \| = | w_j(x_0) - v(x) - \textstyle\sum_{i\in I} \varnothing_i(x)\{w_j(a_i) - P_x(w_j(a_i))\} |$$

Además,

$$\begin{aligned} w_j(x_0) &= w_j(x_0) - P_x(w_j(x_0)) + P_x(w_j(x_0)) \\ &= P_x(w_j(x_0)) + \textstyle\sum_{i\in I} \varnothing_i(x)\{w_j(x_0) - P_x(w_j(x_0))\}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \| w_j(x_0) - w_{j+1}(x) \| &\leq \| P_x(w_j(x_0)) + v(x) \| + 2 \textstyle\sum_{i\in I} \varnothing_i(x) \| w_j(x_0) - w_j(a_i) \| \\ &\leq \| P_x(w_j(x_0) - v(x_0)) \| + \| P_x(v(x_0)) - v(x) \| \\ &\quad + \textstyle\sum_{i\in I} \varnothing_i(x)\alpha(\| x_0 - a_i \|). \end{aligned}$$

Sea $i \in I(x)$. Escogemos $y \in \text{Sop}\, \varnothing_i$ de tal suerte que

$$\text{dist}(\text{Sop}\, \varnothing_i, a_i) = \| y - a_i \|.$$

Entonces

$$\| y - a_i \| = \text{dist}(\text{Sop}\, \varnothing_i, a_i) = \text{dist}(\text{Sop}\, \varnothing_i, K_{N-j}) \leq \| x - x_0 \|.$$

Además, por la parte (iii) del Lema 2.5,

$$\| x - y \| \leq \text{diam}(\text{Sop}\, \varnothing_i) \leq 2\, \text{dist}(\text{Sop}\, \varnothing_i, K_{N-j}) \leq 2 \| x - x_0 \|.$$

Finalmente,

$$\| x_0 - a_i \| \leq \| x - x_0 \| + \| x - y \| + \| y - a_i \| \leq 4 \| x - x_0 \|$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\| w_j(x_0) - w_{j+1}(x) \| \\ &\qquad \leq \| P_x(w_j(x_0) - v(x_0)) \| + \| P_x(v(x_0)) - v(x) \| + 2.4^{n+1}\alpha(\| x_0 - x \|). \end{aligned}$$

Como $w_j(x_0) - v(x_0) = w_j(x_0) - P_{x_0}(w_j(x_0))$ es ortogonal a ptl $K(x_0)$, por el lema 2.6,

$$\lim_{x\to x_0} \| P_x(w_j(x_0) - v(x_0)) \| = 0$$

y, como v es tangencialmente continua

$$\lim_{x\to x_0} \| P_x(v(x_0)) - v(x) \| = 0.$$

Por lo tanto w_{j+1} es continua.

Por recurrencia, obtenemos $w_N: K_0 \to \mathbf{R}^n$ que satisface las propiedades (i), (ii), (iii), (iv). Como $K_0 = K$, terminamos la demostración del teorema 2.4.

A continuación, nos proponemos dar condiciones suficientes para que una función a valor real definida sobre el compacto K tenga una extensión de clase C^1, condiciones expresadas sólo en términos de la función misma y del compacto.

LEMA (2.7). *Sea $v \cdot K \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicación tangente. Entonces v es tangencialmente continua si y sólo si existe una constante A no negativa tal que para todo $\epsilon > 0$ y todo x_0 en K*

$$|\langle v(x_0), v\rangle - \langle v(x), w\rangle| \leq A \| v - P_x(w) \| + \epsilon \| w \|$$

para todo x en K suficientemente cercano a x_0.

La demostración de este lema solo utiliza las identidades:

$$\langle v(x_0), v\rangle - \langle v(x), w\rangle = \langle v(x_0), v - P_x(w)\rangle - \langle P_x(v(x_0)) - v(x), w\rangle$$

$$\| P_x(v(x_0)) - v(x) \|^2 = \langle v(x_0) - v(x), P_x(v(x_0)) - v(x)\rangle$$

TEOREMA (2.8). *f definida sobre el compacto K, $K \subset \mathbf{R}^n$, admite una extensión de clase C^1 si existen α módulo de continuidad y A constante no-negativa tales que*

$$\left| \textstyle\sum_{i=1}^{2N} \lambda_i \dfrac{f(x_i) - f(y_i)}{\| x_i - y_i \|} \right| \leq A \left\| \textstyle\sum_{i=1}^{2N} \lambda_i \dfrac{x_i - y_i}{\| x_i - y_i \|} \right\| + \left\| \textstyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \dfrac{x_i - y_i}{\| x_i - y_i \|} \right\|$$

$$\cdot \textstyle\sum_{i=1}^{N} \alpha(\| x_i - x \|) + \sum_{i=N+1}^{2N} |\lambda_i| \alpha(\| x_i - y_i \|)$$

para todo x, x_i, y_i en K y todo λ_i en $\mathbf{R}$ (donde N depende de n).

Demostración. Vamos a construir para cada x en K y cada $k = 0, 1, \cdots, 2n$ una aplicación lineal $T_k(x)$ tal que:

(i) $T_k(x){:}G_k(x) \longrightarrow \mathbf{R}$

(ii) $T_k(x)|_{G_{k-1}(x)} = T_{k-1}(x)$

(iii) $|\sum_{i=1}^{2N_k} T_k(x_i)v_i| \leq A \| \sum_{i=1}^{2N_k} v_i \| + \| \sum_{i=1}^{N_k} v_i \| \cdot \sum_{i=1}^{N_k} \alpha(\| x_i - x \|)$

para todo x, x_i en K y todo $v_i \in G_k(x_i)$.

Entonces, T_{2n}:ptl $K(x) \longrightarrow \mathbf{R}$ satisface

$$| T_{2n}(x)v - T_{2n}(y)w | \leq A \| v - w \| + \| w \| \alpha(\| x - y \|)$$

y, definiendo $v(x)$ como el elemento de ptl $K(x)$ para el cual

$$\langle v(x), w\rangle = T_{2n}(x)w$$

para todo $w \in$ ptl $K(x)$, tenemos que v es tangente, tangencialmente continua y la pareja (f, v) satisface la condición (W) del torema 2.4. Por lo tanto $f \in E(K)$. Construyamos, entonces, para cada $x \in X$, $T_0(x)$. Sea $w \in$ ptg $K(x)$. Entonces existen sucesiones $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ de puntos de K que convergen a x y tales que

$$w = \lim_{i\to\infty} \frac{x_i - y_i}{\| x_i - y_i \|}$$

Tenemos que

$$\left| \frac{f(x_i) - f(y_i)}{\| x_i - y_i \|} - \frac{f(x_j) - f(x_j)}{\| x_j - y_j \|} \right|$$
$$\leq A \left\| \frac{x_i - y_i}{\| x_i - y_i \|} - \frac{x_j - y_j}{\| x_j - y_j \|} \right\| + \alpha(\| x_i - x \|) + \alpha(\| x_j - x \|).$$

Por lo tanto, la sucesión

$$\left\{ \frac{f(x_i) - f(y_i)}{\| x_i - y_i \|} \right\}$$

converge y es sencillo ver que su límite sólo depende de w. Llamamos $T_0(x)w$ a este límite. Además tenemos que para cada $x_i \in K$, $v_i \in \text{ptg } K(x_i)$,

$$| \textstyle\sum_{i=1}^{2N} \lambda_i T_0(x_i) v_i | \leq A \| \sum_{i=1}^{2N} \lambda_i v_i \| + \| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i \| \cdot \sum_{i=1}^{N} \alpha(\| x_i - x \|)$$

En particular, si $w \in \text{ptg } K(x)$ es tal que

$$w = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \text{con} \quad v_i \in \text{ptg } K(x)$$

entonces

$$T_0(x)w = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_0(x) v_i$$

y $T_0 : G_0(x) \to \mathbf{R}$ es lineal y satisface

$$| \textstyle\sum_{i=1}^{2N_1} T_0(x_i) v_i | \leq A \| \sum_{i=1}^{2N_1} v_i \| + \| \sum_{i=1}^{N_1} v_i \| \cdot \sum_{i=1}^{N_1} \alpha(\| x_i - x \|)$$

donde $N_1 = N/n$.

Supongamos construída T_k con las condiciones (i), (ii), (iii) y construyamos T_{K+1}. Sea $w \in \lim\sup G_k(x)$. Entonces existen $\{x_i\}$ sucesión de puntos en K que converge a x y $\{v_i\}$ sucesión de vectores con $v_i \in G_k(x_i)$ respectivamente la cual converge a w.

Por hipótesis tenemos que

$$| T_k(x_i) v_i - T_k(x_j) v_j | \leq A \| v_i - v_j \| + \| v_j \| \alpha(\| x_j - x \|).$$

Luego la sucesión $\{T_k(x_i) v_i\}$ converge y, de nuevo, su límite sólo depende de w.

Llamamos $T_{k+1}(x)w$ a este límite. Y,

$$| \textstyle\sum_{i=1}^{2N_k} \lambda_i T_{k+1}(x_i) v_i | \leq A \| \sum_{i=1}^{2N_k} \lambda_i v_i \| + \| \sum_{i=1}^{N_k} \lambda_i v_i \| \cdot \sum_{i=1}^{N_k} \alpha(\| x_i - x \|).$$

Como antes, $T_{k+1}(x)$ es lineal sobre $G_{k+1}(x)$. Además si $N_{k+1} = N_k/n$,

$$| \textstyle\sum_{i=1}^{2N_{k+1}} T_{k+1}(x_i) v_i | \leq A \| \sum_{i=1}^{2N_{k+1}} v_i \| + \| \sum_{i=1}^{N_{k+1}} v_i | \cdot \sum_{i=1}^{N_{k+1}} \alpha(\| x_i - x \|).$$

Procediendo recursivamente, obtenemos $T_{2n}(x)$: ptl $K(x) \to \mathbf{R}$ como requeríamos.

Notemos que la condición del teorema 2.8, aunque sólo es suficiente, logra superar la geometría del compacto K, mientras que las condiciones necesarias son muy débiles para conseguirlo.

Como, en el caso de los compactos $K \subseteq \mathbf{R}^2$

$$G_1(x) = \text{ptl}\, K(x)$$

tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO (2.9). *Sea $K \subset \mathbf{R}^2$ compacto. Entonces f definida sobre K y a valor real pertenece a $E(K)$ si existen A constante no-negativa y α módulo de continuidad tales que*

$$\left| \sum_{i=1}^{8} \lambda_i \frac{f(x_i) - f(y_i)}{\| x_i - y_i \|} \right| \leq A \left\| \sum_{i=1}^{8} \lambda_i \frac{x_i - y_i}{\| x_i - y_i \|} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \frac{x_i - y_i}{\| x_i - y_i \|} \right\|$$
$$\cdot \sum_{i=1}^{4} \alpha(\| x_i - x \|) + \sum_{i=1}^{5} | \lambda_i | \alpha(\| x_i - y_i \|)$$

para todo x, x_i, y_i en K y todo λ_i en $\mathbf{R}$, la cual es una condición sobre colecciones arbitrarias de 16 puntos del compacto.

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL IPN, MÉXICO, D. F.

REFERENCIAS

[1] S. BROMBERG. Un teorema de extensión en clase C^1. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación del IPN, 1977.

[2] ——— AND J. J. RIVAUD. Análisis Diferencial. Serie de la Sociedad Matemática Mexicana. Fondo de Cultura Económica, México, 1976.

[3] G. GLAESER. *Étude de quelques Algèbres Tayloriennes.* J. Analyse. Math. **6**(1958), 1–124.

[4] B. MALGRANGE. Ideals of Differentiable Functions. Oxford University Press and Tata Institute of Fundamental Research, Oxford-Bombay, 1966.

[5] H. WHITNEY. *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **36**, (1934), 63–89.

[6] ———. *Differentiable functions defined in closed sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 2(1934), 369–387.