Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 28, No. 1, 1983

COMMUTATIVITÉ DE CERTAINES ALGÈBRES DE BANACH

PAR M. OUDADESS(*)

In their paper ([5]) V. A. Belfi and R. S. Doran survey conditions implying the commutativity of Banach algebras or forcing an element to be in the center of the algebra. There is also a condition for a commutator to be in the radical. In the paper some unsolved questions are mentioned. We solve completely five of them and give a partial solution to a sixth one.

I. Introduction

Dans un article panoramique ([5]) V. A. Belfi et R. S. Doran font le point sur des conditions impliquant la commutativité d'algèbres de Banach ou l'appartenance d'un élément au centre de l'algèbre. Il y a aussi une condition pour un commutateur d'être dans le radical. Dans cet article plusieurs questions sont proposées. Nous résolvons complètement cinq d'entre elles et donnons une solution partielle à une sixième.

Nous nous intéressons d'abord aux algèbres de Banach non unitaires puis aux algèbres normées unitaires non complètes.

Soit E une algèbre de Banach (complexe) telle que $\| x \cdot y \| \leq \alpha \| y \cdot x \|$, pour tout x et tout y et un α donné. Nous montrons (théorème II.1) que $E^2 = \{x \cdot y : x, y \in E\}$ est inclus dans le centre de E. D'où comme corollaires les théorèmes de Lepage ([5], théorème 5.8) et de Baker et Pym ([4], corollaire 2). Ceci nous permet de montrer que E, si elle est n'est pas unitaire, est presquecommutative au sens de B. Aupetit ([1] ou [3]), i.e. $E/\text{Rad}\, E$ commutative.

Nous montrons aussi (théorème II.8) qu'une algèbre de Banach à unité approchée à gauche telle que $Ex^2 = Ex$, pour tout x, est semi-simple et commutative généralistant ainsi le résultat de Lepage ([5], théorème 5.11) sur les algèbres unitaires. Nous obtenons également la commutativité de toute algèbre normée unitaire non nécessairement complète vérifiant $Ex^2 = Ex$, pour tout x.

Toutes les algèbres que nous considérerons seront complexes. E_1 désignera l'algèbre unitaire obtenue, par adjonction d'une unité, à partir d'une algèbre E sans unité. Soulignons que E est un idéal de E_1. $\hat{E}$ désignera la complétée de E, si E n'est pas complète.

Je remercie Monsieur le Professeur J. I. Nieto pour son aide et ses conseils précieux.

II. Algèbres Non Unitaires

1. Un théorème de Lepage affirme que les algèbres de Banach unitaires E

(*) Boursier du projet "Centres pédagogiques régionaux/MAROC", Projet conjoint M.A.I.Q.-A.C.D.I.

telles, que, pour α donné on ait l'inégalité:

(1) $$\| x\cdot y \| \leq \alpha \| y\cdot x \|, \text{ pour tout } x \text{ et tout } y$$

sont commutatives ([5], théorème 5.8). Baker et Pym ([4], corollaire 2) ont étendu ce résultat aux algèbres de Banach à unité approchée bornée. Nous montrons que $E^2 = \{xy : x, y, \in E\}$ est toujours inclus dans le centre $C(E) = \{x \in E : xy = yx$, pour tout $y \in E\}$. Ceci fait apparaître le fait essentiel qui conduit aux résultats de Lepage et de Baker et Pym. Il nous permet de montrer, dans le cas général, que l'algèbre est presque commutative, c'est-à-dire modulo son radical.

THÉORÈME (II.1). *Soit E une algèbre de Banach vérifiant* (1). *Alors* (i) *E^2 est inclus dans le centre de E.* (ii) *Si $E^2 = E$, alors E est commutative.*

Preuve. (i) Soit E_1 l'algèbre unitaire obtenue à partir de E par adjonction d'une unité. Soient x et y deux éléments quelconques de E. Pour tout z de E_1, considérons l'application holomorphe $f(\lambda) = e^{\lambda z}\cdot xy\cdot e^{-\lambda z}(\lambda \in \mathbb{C})$; $e^{\lambda z}\cdot x$ et $y\cdot e^{-\lambda z}$ sont dans E car E est un idéal bilatère de E_1. Donc, par hypothèse, $\|f(\lambda)\| \leq \alpha \| ye^{-\lambda z}\cdot e^{\lambda z}x \| = \alpha \| yz \|$, pour tout λ. D'après le théorème de Liouville, f est constante; et on conclut à $z(xy) = (xy)z$.

(ii) Est une conséquence immédiate de (i).

COROLLAIRE (II.2). (Théorème de Baker et Pym). *Soit E une algèbre de Banach à unité approchée bornée vérifiant* (1). *Alors E est commutative.*

Preuve. Puisque E est à unité approchée bornée, on a $E^2 = E$ (c'est le théorème de décomposition de Cohen). On conclut alors grâce à (ii) du théorème II.1.

COROLLAIRE (II.3). (Théorème de Lepage). *Si E est une algèbre de Banach unitaire vérifiant* (1), *alors elle est commutative.*

Maintenant nous exploitons d'avantage le fait que E^2 est inclus dans le centre de E. Nous désignerons par $\rho(x)$ le rayon spectral de x.

THÉORÈME (II.4). *Soit E une algèbre de Banach vérifiant* (1). *Alors*:

(i) $\text{Rad}\, E = \{x \in E : \rho(x) = 0\}$.

(ii) $xy - yx \in \text{Rad}\, E$, *pour tout x et tout y. Donc si E est semisimple, elle est commutative.*

(iii) *Si E est sans éléments 2-nilpotents, elle est commutative. Donc aussi si elle est sans diviseurs de* 0.

Preuve. (i) D'après (i) du théorème II.1, on sait que E^2 est contenu dans le centre. On en déduit, par induction, que pour tout entier $m \geq 2$, $(xy)^m = x^m\cdot y^m$ pour tout x et tout y. Alors $\rho(xy) \leq \rho(x)\cdot\rho(y)$ et donc, comme dans le cas commutatif, $\text{Rad}\, E = \{x \in E : \rho(x) = 0\}$ d'après ([3]), théorème 2, p. 158).

(ii) Comme E^2 est contenu dans le centre on a

$$xy\, xy = yx\, yx = xy\, yx = yx\, xy = x^2y^2.$$

Alors $(xy - yx)^2 = (xy - yx)(xy - yx) = 0$. Donc $\rho(xy - yx) = 0$. Alors, d'après (i), $xy - yx \in \operatorname{Rad} E$.

(iii) Comme au (ii), $(xy - yx)^2 = 0$. Donc, s'il n'y a pas d'éléments 2-nilpotents, on a $xy = yx$.

Remarque (*II*.5). D'après (ii) et le résultat de D. Z. Spicer ([10], théorème 1), E est commutative si, et seulement si, il existe $k > 0$ tel que (*) $\| z \| \leq k\rho(z)$, pour tout $z \in C$ où $C = \{z = xy - yx : x, y \in E\}$. Rien ne permet de penser qu'on puisse obtenir l'inégalité (*) de (1).

2. Un autre théorème de Lepage ([5], théorème 5.9) concerne les algèbres normées unitaires E dans lesquelles un élément a vérifie

(2) $\| (a + \lambda)x \| \leq \| x(a + \lambda) \|$, pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Il montre que a est dans le centre de E. Nous étendons ce résultat au cas non unitaire, avec la condition (2′) suivante et équivalente à (2) si l'algèbre est unitaire.

(2′) $\| ax + \lambda x \| \leq \| xa + \lambda x \|$, pour tout x et tout λ.

THÉORÈME (II.6). *Soit E une algèbre normée et $a \in E$ vérifiant* (2′). *Alors a est dans le centre de E.*

Démonstration. La relation (2′) s'étend à la complétée $\hat{E}$ de E. Donc on peut supposer E complète. Soit E_1 l'algèbre unitaire obtenue, à partir de E, par adjonction d'une unité. La relation (2′) ne se prolonge pas nécessairement à E_1 mais on peut faire les calculs dans E_1. La démonstration se fait alors comme dans [5].

Pour tout λ telle que $|\lambda| > \| a \|$, prenons $x = y(a + \lambda)^{-1}$, avec $x \in E$. Alors

$$ax + \lambda x = (a + \lambda)\cdot x = (a + \lambda)\cdot y \cdot (a + \lambda)^{-1} = \left(1 + \frac{a}{\lambda}\right)\cdot y\left(1 + \frac{a}{\lambda}\right)^{-1}.$$

Comme $\| ax + \lambda x \| \leq \| xa + x\lambda \|$, on a

$$\left\| \left(1 + \frac{a}{\lambda}\right) y \left(1 + \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} \right\| \leq \| y \|.$$

Ainsi si μ est un complexe et n un entier tels que $n > \| a \| \cdot |\mu|$ alors

$$\left\| \left(1 + \frac{\mu a}{n}\right)\cdot y\left(1 + \frac{\mu a}{n}\right)^{-1} \right\| \leq \| y \|.$$

Répétant cette opération n fois, on obtient

$$\left\| \left(1 + \frac{\mu a}{n}\right)^n \cdot y \cdot \left(1 + \frac{\mu a}{n}\right)^{-n} \right\| \leq \| y \|$$

et faisant tendre n vers ∞, on a $\| \exp(\mu a) \cdot y \cdot \exp(-\mu a) \| \leq \| y \|$ pour tout μ dans $\mathbb{C}$ et tout y dans E. D'où $ay = ya$, pour tout y dans E.

3. Une hypothèse de Lepage ([5], théorème 5.10) entraînant la commutativité des algèbres de Banach unitaires semi-simples concerne les commutateurs. C'est la condition suivante:

(3) $\| D_x^n y \|^{1/n} \xrightarrow[n]{} 0$, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, où $D_x y = xy - yx$ et $D_x^n = D_x D_x^{n-1}$.

Dans le cas unitaire (3) est équivalente à

(3′) Pour tout x et tout y de E et tout $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ telle que $\| \exp(\lambda x) \cdot y \cdot \exp(-\lambda x) \| \leq M \cdot \exp(\epsilon | \lambda |)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

La condition (3′) n'a pas de sens dans une algèbre non unitaire. La condition à considérer, dans ce cas, est donc (3). Nous avons le

THÉORÈME (II.7). *Soit E une algèbre de Banach semi-simple vérifiant* (3). *Alors elle est commutative.*

Preuve. On vérifie par induction que $D^n_{(x,\lambda)}(y, \mu), = D_x^n y$, pour tout $(x, \lambda) \in E_1$ et tout $(y, \mu) \in E_1$. On est alors ramené au cas unitaire.

4. Nous nous intéressons maintenant à une condition qui implique à la fois la semi-simplicité et la commutativité des algèbres de Banach qui la vérifient. Nous étendons, aux algèbres à unité approchée, un résultat de Lepage ([5], théorème 5.11) sur les algèbres unitaires.

THÉORÈME (II.8). *Soit E une algèbre de Banach à unité approchée à gauche et telle que $Ex^2 = Ex$ pour tout $x \in E$. Alors E est semi-simple et commutative.*

Démonstration. E est semi-simple car 0 est son seul élément quasi-nilpotent. En effet: si u est quasi-nilpotent u^2 l'est aussi. D'après l'hypothèse, on a $Eu^4 = Eu$. Donc il existe $y \in E$ tel que $y \cdot u^4 = u^2$. On a $y \cdot x^2 = x$ avec $x = u^2$. D'où, pour tout $p \geq 1$, $y^p \cdot x^{p+1} = x$. Mais alors

$$\| x \|^{1/p} \leq \| y \| \cdot \| x \|^{1/p} \cdot \| x^p \|^{1/p} \xrightarrow[p]{} 0.$$

D'où $\| x \| = 0$. Donc $u^2 = x = 0$. Mais $Eu = Eu^2$. Donc $Eu = \{0\}$. Maintenant soit $(e_\lambda)_\lambda$ une unité approchée à gauche de E. On a $e_\lambda \cdot u = 0$, pour tout λ. D'où $u = 0$.

Maintenant si $yx^2 = x$ alors yx est idempotent. En effet: les calculs étant effectués dans E_1 d'unité 1, on a

$$[x(yx - 1)]^2 = x(yx - 1)x(yx - 1) = x(yx^2 - x) \cdot (yx - 1) = 0.$$

Donc $x(yx - 1) = xyx - x$ est nilpotent. Il est donc nul et $xyx - x = 0$ donne yx idempotent par multiplication, à gauche, par y. De plus si $x \neq 0$, $y \neq 0$ car sinon $x = yx^2 = (yx)\cdot x = 0$.

Remarquons aussi que tout idempotent v de E est central. En effet: pour tout $z \in E$, $v\cdot z(1 - v)$ et $(1 - v)z\cdot v$ sont nilpotents donc nuls. D'où $v\cdot z = v\cdot z\cdot v = z\cdot v$.

Soit maintenant J le noyau d'une représentation irréductible de E_1 et $B = E_1/J = s(E_1)$. Considérons la sous-algèbre de Banach $s(E)$ de B. Elle vérifie $s(E)\cdot s^2(x) = s(E)\cdot s(x)$, pour tout $s(x) \in s(E)$. De plus $(s(e_\lambda))_\lambda$ est une unité approchée à gauche de $s(E)$. Ainsi si $s(u) \in s(E)$, $s(u) \neq 0$ et $s(x) = s^2(u)$, il existe $s(y) \neq 0$, $s(y) \in s(E)$ tel que $s(y)\cdot s(x)$ non nul et central dans $s(E)$. Alors $s(y)\cdot s(x)$ est central dans $s(E_1)$. Mais dans l'algèbre primitive B les éléments centraux sont des multiples de l'identité. Donc $s(x)$ est inversible à gauche dans $s(E_1)$. Or $s(x)$, $s(y) \in s(E)$ donc $s(1) = s(y)\cdot s(x) \in s(E)$; $s(x)$ est donc inversible à gauche dans $s(E)$. Il en est alors de même de $s(u)$.

$s(E)$ est donc une algèbre de Banach (complexe) dont tout élément est inversible à gauche. Elle est alors à division et donc c'est $\mathbb{C}$ (théorème de Gelfand-Mazur). Alors $\pi(xy - yx) = 0$, pour tout x et tout y. Ceci pour toute représentation irréductible π. Et comme E_1 est demi-simple, puisque E l'est, on a $xy = yx$.

On examine maintenant une condition qui permet de conclure qu'un commutateur est dans le radical. Lepage a considéré cette condition dans le cas des algèbres unitaires ([5], théorème 5.12).

THÉORÈME (II.9). *Soit E une algèbre de Banach et $a \in E$ tel que $ax - xa$ est quasi-nilpotent pour tout $x \in E$. Alors $ax - xa$ est dans le radical de E, pour tout $x \in E$.*

Preuve. Remarquons que, pout tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $a\cdot(x, \lambda) - (x, \lambda)\cdot a = ax - xa$. Donc $a(x, \lambda) - (x, \lambda)a$ est quasi-nilpotent, pour tout $(x, \lambda) \in \mathrm{E}_1$. On est ainsi ramené au cas unitaire. D'après ([5], théorème 5.12) $ax - xa \in \mathrm{Rad}\, E_1$. Mais $ax - xa \in E$ et $\mathrm{Rad}\, E = E \cap \mathrm{Rad}\, E_1$.

III. Algèbres Non Complètes

Nous nous employons maintenant à supprimer l'hypothèse "complétude" dans les problèmes de commutativité. Nous généralisons, d'abord, aux algèbres normées unitaires, un résultat de Lepage sur les algèbres de Banach. Ensuite nous étendons notre théorème II.4 aux algèbres normées (non complètes et non unitaires).

THÉORÈME (III.1). *Si E est une algèbre normée unitaire telle que $Ex^2 = Ex$, pour tout x, alors elle est semi-simple et commutative.*

Preuve. Si x est dans le radical de E, il est quasi-nilpotent. On montre alors, comme au théorème II.8, que $x = 0$. Donc E est semi-simple. On vérifie aussi que si $x = y\cdot x^2$ alors yx est idempotent. Donc il est central dans la complétée $\hat{E}$ de E.

Soit E une représentation irréductible de $\hat{E}$, de noyau J et $B = \hat{E}/J = s(\hat{E})$. Considérons la sous-algèbre normée $s(E)$ *de* B. Comme au théorème II.8, on montre que tout élément non nul $s(x)$ de $s(E)$ est inversible à gauche dans $s(E)$. Donc $s(E) \simeq \mathbb{C}$ (cf [11]). On a alors $\pi(xy - yx) = 0$, pour toute représentation irréductible π de $\hat{E}$. Donc $xy - yx \in \text{Rad } \hat{E}$. Mais $xy - yx \in E$ et $E \cap \text{Rad } \hat{E} = \{0\}$, donc $xy = yx$, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$. (Pour montrer que $E \cap \text{Rad } \hat{E} = \{0\}$, on utilise la même idée que pour montrer la semi-simplicité de E).

Théorème (III.2). *Soit E une algèbre normée (non complète et non unitaire) vérifiant l'inégalité* (1). *Alors*: $\text{Rad } E = E \cap \text{Rad } \hat{E}$. *Et on a* (i), (ii) *et* (iii) *du théorème* II.4.

Preuve. On a toujours $E \cap \text{Rad } \hat{E} \subset \text{Rad } E$. Inversement soit $x \in \text{Rad } E$. On a $\rho(x) = 0$. Alors, puisque l'inégalité (1) se prolonge à $\hat{E}$, on a $x \in \text{Rad } \hat{E}$ (théorème II.4). Donc $x \in E \cap \text{Rad } \hat{E}$.

Remarque (III.3). Si E est une algèbre normée unitaire (non complète), nous ne savons pas si la condition $ax - xa$ quasi-nilpotent pour tout $x \in E$ implique $ax - xa \in \text{Rad } E$ pour tout x.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL, QUÉBEC, CANADA

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. AUPETIT, *Almost commutative Banach algebras.* Notices Amer. Math. Soc. **18** (1971), 191.

[2] ———, *Caracterisation spectrale des algèbres de Banach commutatives.* Pacific J. Math. **63** (1976), 23–35.

[3] ———, *Propriétés spectrales des algèbres de Banach.* Springer Lecture Notes. No. 735.

[4] J. W. BAKER, AND J. S. PYM, *A remark on continuous bilinear mappings.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **17** (1970–71), 245–248.

[5] V. A. BELFI, AND R. S. DORAN, *Norm and spectral characterizations in Banach algebras.* L'enseignement mathématique. Tome XXXVI (1977), Fasc. 1–2, 103–130.

[6] J. DUNCAN, AND A. TULLO, *Finite dimensionality, nilpotents and quasi-nilpotents in Banach algebras.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (21) **19** (1974/75), 45–49.

[7] C. LEPAGE, *Sur quelques conditions entraînant la commutativité dans les algèbres de Banach.* C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B, **265** (1967), 1235–1237.

[8] M. A. NAIMARK, Normed rings. Groningen, The Netherlands, (1972).

[9] C. E. RICKART, General Theory of Banach Algebras. Van Nostrand (1960).

[10] D. A. SPICER, *A commutativity theorm for Banach algebras.* Coll. Math. **27** (1973), 107–108.

[11] L. TORNHEIM, *Normed fields over the real and complex fields.* Mich. Math. J. **1** (1952), 61–68.

[12] J. ZEMANEK, *Concerning spectral characterizations of the radical in Banach algebras.* Comment. math. Univ. Carolinae **17** (1976), 689–691.

[13] ———, *A note on the radical of a Banach algebra,* Manuscripta Math. **28** (1977), 191–196.