¿QUE ES LA GEOMETRIA ELEMENTAL?

POR ALFRED TARSKI

En el lenguaje ordinario el término *geometría elemental* es usado vagamente para referirse al cuerpo de nociones y teoremas que, siguiendo la tradición de los *Elementos* de Euclides, forman el material de los cursos de geometría en escuelas secundarias. De este modo, el término no tiene un sentido bien determinado y puede estar sujeto a diversas interpretaciones. Si queremos hacer de la geometría elemental un tópico de investigación metamatemática y obtener resultados exactos (no dentro, sino) acerca de esta disciplina, se hace necesaria la elección de una interpretación definida. En efecto, tenemos en tal caso que describir de manera precisa cuáles proposiciones pueden ser formuladas en geometría elemental y cuáles de ellas pueden reconocerse como válidas; en otras palabras, tenemos que determinar los medios de expresión y de demostración con que la disciplina es provista.

En este artículo[1] nos ocuparemos primordialmente de una concepción de la geometría elemental que, *a grosso modo*, puede describirse como sigue: *consideramos como elemental aquella parte de la geometría euclidiana que puede ser formulada y establecida sin el auxilio de métodos de la teoría de conjuntos.*

Con más precisión, la geometría *elemental* se concibe aquí como una teoría con formalización corriente (standard) en el sentido de [5].[2] Es formalizada dentro de la lógica elemental, esto es, del cálculo elemental del predicado. Se supone que todas las variables x, y, z, $\cdots$, que figuran en esta teoría, recorren los elementos de un conjunto fijo: los elementos son llamados puntos y el conjunto el espacio. Las constantes lógicas de la teoría son (i) los conectivos proposicionales—el símbolo de negación $\neg$, el símbolo de implicación $\rightarrow$, el símbolo de disyunción $\vee$, y el símbolo de conjunción $\wedge$; (ii) los cuantificadores—el cuantificador universal $\bigwedge$ y el cuantificador existencial $\bigvee$; y (iii) dos predicados binarios especiales—el símbolo de identidad $=$ y el símbolo de diversidad $\neq$. Como constantes no lógicas (símbolos primitivos de la teoría) podemos elegir cualesquiera predicados que denoten ciertas relaciones entre puntos, en términos de las cuales se sepa que son definibles todas las nociones geométricas. De hecho

[1] Este artículo es una versión ampliada de una plática sostenida por el autor ante la Sociedad Matemática Mexicana, en la Ciudad de México, el 8 de agosto de 1957. En su forma actual fué presentado al Symposium Internacional sobre Método Axiomático en la Universidad de California, Berkeley, el 27 de diciembre de 1957. El artículo fué preparado para su publicación, cuando el autor trabajaba en un proyecto de investigación sobre los fundamentos de las matemáticas, sostenido por la U. S. National Science Foundation.

[2] Uno de los principales objetivos de este artículo es exhibir el significado de las nociones y métodos de la lógica moderna y de la metamatemática para el estudio de los fundamentos de la geometría. Para las nociones lógicas y metamatemáticas contenidas en la discusión, consúltese [5] y [6] (vea la bibliografía al final del artículo). El principal resultado metamatemático, sobre el que se basa la discusión, fué establecido en [4]. Para las nociones y resultados algebraicos, consúltese [8].

tomamos dos predicados con este propósito: el predicado ternario β usado para denotar la relación de interestancia y el predicado cuaternario δ usado para denotar la relación de equidistancia; la fórmula $\beta(xyz)$ se lee *y está entre x y z* (sin excluir el caso en que y coincida con x o con z), mientras que $\delta(xyzu)$ se lee *la distancia de x a y coincide con la de z a u.*

Así, en nuestra formalización de la geometría elemental, sólo los puntos son tratados como individuos y son representados por variables (de primer orden). Como la geometría elemental no tiene base en la teoría de conjuntos, su formalización no proporciona variables de orden superior y no se dispone de símbolos para representar o designar figuras geométricas (conjuntos de puntos), clases de figuras geométricas, etc. Ha de ser claro, sin embargo, que podamos expresar en nuestro simbolismo todos los resultados que pueden encontrarse en los textos de geometría elemental y que son formulados en términos que hacen referencia a diversas clases especiales de figuras geométricas, tales como líneas rectas, círculos, segmentos, triángulos, cuadrángulos, y, más generalmente, polígonos con un número fijo de vértices, así como ciertas relaciones entre figuras geométricas de estas clases, tales como congruencia y semejanza. Esto es esencialmente consecuencia del hecho de que, en cada una de las clases recién mencionadas, toda figura geométrica está determinada por un número finito fijo de puntos. Por ejemplo, en vez de decir que un punto z está en la recta determinada por los puntos x y y, podemos afirmar que es válida $\beta(xyz)$ o $\beta(yzx)$ o bien $\beta(zxy)$; en vez de decir que dos segmentos con extremos x, y y x', y' son congruentes, simplemente afirmamos que $\delta(xyx'y')$.[3]

Una proposición formulada en nuestro simbolismo se considera válida si es consecuencia (semántica) de las proposiciones adoptadas como axiomas, es decir, si se verifica en toda estructura matemática en que los axiomas se verifican. En el caso presente, en virtud del teorema de completitud para la lógica elemental, esto equivale a decir que una proposición es válida si es deducible de los axiomas

---

[3] En varias formalizaciones de la geometría (elemental o no) conocidas en la literatura, y en particular en todas aquellas que siguen los lineamientos de [1], son tratados como individuos, no sólo los puntos, sino también ciertas figuras geométricas especiales, y son representadas por variables de primer orden; usualmente las únicas figuras geométricas tratadas en esta forma son las líneas rectas, los planos y, más generalmente, los subespacios lineales. Las relaciones de pertenencia e inclusión, entre un punto y una figura geométrica especial o entre dos figuras tales, son reemplazadas por la relación geométrica de incidencia, y el símbolo que designa esta relación va incluido en la lista de símbolos primitivos de la geometría. Las figuras geométricas restantes son tratadas como conjuntos de puntos y pueden ser representadas por variables de segundo orden (suponiendo que el sistema de geometría en discusión es provisto de una base en la teoría de los conjuntos.) Este punto de vista tiene sus ventajas para propósitos concretos de la geometría proyectiva; en efecto, facilita el desarrollo de la geometría proyectiva al dar una formulación conveniente del principio de dualidad, y conduce a colocar esta geometría bajo la teoría algebraica de las redes (látices). En otras ramas de la geometría difícilmente puede justificarse un procedimiento análogo; el tratamiento no uniforme de las figuras geométricas parece ser intrínsecamente no natural, obscurece la estructura lógica de los fundamentos de la geometría, y conduce a algunas complicaciones en el desarrollo de esta disciplina (al necesitar, por ejemplo, de una distinción entre una línea recta y el conjunto de puntos que la forman).

mediante algunas reglas de inferencia familiares. Para obtener un sistema apropiado de axiomas, partimos de uno del cual se sabe que nos permite una base adecuada para toda la geometría euclidiana y contiene a β y a δ como constantes no lógicas únicas. Usualmente, la única proposición no elemental en este sistema es el axioma de continuidad, que contiene variables de segundo orden X, Y, $\cdots$ que designan conjuntos arbitrarios de puntos (aparte de las variables de primer orden x, y, $\cdots$ que designan puntos) y también una constante adicional, el símbolo de pertenencia $\in$ que designa la relación de pertenencia entre puntos y conjuntos de puntos. El axioma de continuidad puede formularse como sigue:

$$\bigwedge XY\{\bigvee z\bigwedge xy[x \in X \wedge y \in Y \rightarrow \beta(zxy)] \\ \rightarrow \bigvee u\bigwedge xy[x \in X \wedge y \in Y \rightarrow \beta(xuy)]\}$$

Suprimimos este axioma del sistema y lo reemplazamos por la colección infinita de todos los axiomas de continuidad elementales, esto es, vagamente, por todas las proposiciones que se obtienen del axioma no elemental si $x \in X$ es reemplazado por una fórmula elemental arbitraria en la que x es libre, y $y \in Y$ por una fórmula elemental arbitraria en la que y es libre. Para fijar las ideas, nos concretamos en lo que sigue a la geometría elemental bidimensional y presentamos de manera explícita un sistema simple de axiomas obtenido del modo que se acaba de describir. El sistema consta de doce axiomas individuales, A1–A12, y la colección infinita de todos los axiomas elementales de continuidad, A13.

A1. [AXIOMA DE IDENTIDAD PARA INTERESTANCIA].

$$\bigwedge xy[\beta(xyx) \rightarrow (x = y)]$$

A2. [AXIOMA DE TRANSITIVIDAD PARA INTERESTANCIA].

$$\bigwedge xyzu[\beta(xyu) \wedge \beta(yzu) \rightarrow \beta(xyz)]$$

A3. [AXIOMA DE CONEXIDAD PARA INTERESTANCIA].

$$\bigwedge xyzu[\beta(xyz) \wedge \beta(xyu) \wedge (x \neq y) \rightarrow \beta(xzu) \vee \beta(xuz)]$$

A4. [AXIOMA DE REFLEXIVIDAD PARA EQUIDISTANCIA].

$$\bigwedge xy\delta[(xyyx)]$$

A5. [AXIOMA DE IDENTIDAD PARA EQUIDISTANCIA].

$$\bigwedge xyz[\delta(xyzz) \rightarrow (x = y)]$$

A6. [AXIOMA DE TRANSITIVIDAD PARA EQUIDISTANCIA].

$$\bigwedge xyzuvw[\delta(xyzu) \wedge \delta(xyvw) \rightarrow \delta(zuvw)]$$

A7. [AXIOMA DE PASCH].

$$\bigwedge txyzu\bigvee v[\beta(xtu) \wedge \beta(yuz) \rightarrow \beta(xvy) \wedge \beta(ztv)]$$

A8. [AXIOMA DE EUCLIDES].

$$\bigwedge txyzu\bigvee vw[\beta(xut) \wedge \beta(yuz) \wedge (x \neq u) \rightarrow \beta(xzv) \wedge \beta(xyw) \wedge \beta(vtw)]$$

A9. [AXIOMA DE LOS CINCO SEGMENTOS].

$$\bigwedge xx'yy'zz'uu'[\delta(xyx'y') \wedge \delta(yzy'z') \wedge \delta(xux'u') \wedge \delta(yuy'u') \wedge \beta(xyz) \wedge \beta(x'y'z') \wedge (x \neq y) \rightarrow \delta(zuz'u')]$$

A10. [AXIOMA DE CONSTRUCCION DE SEGMENTOS].

$$\bigwedge xyuv \bigvee z[\beta(xyz) \wedge \delta(yzuv)]$$

A11. [AXIOMA INFERIOR DE LA DIMENSION].

$$\bigvee xyz[\neg\beta(xyz) \wedge \neg\beta(yzx) \wedge \neg\beta(zxy)]$$

A12. [AXIOMA SUPERIOR DE LA DIMENSION].

$$\bigwedge xyzuv[\delta(xuxv) \wedge \delta(yuyv) \wedge \delta(zuzv) \wedge (u \neq v) \rightarrow \beta(xyz) \vee \beta(yzx) \vee \beta(zxy)]$$

A13. [AXIOMAS ELEMENTALES DE CONTINUIDAD]. *Todas las proposiciones de la forma*

$$\bigwedge vw \cdots \{\bigvee z \bigwedge xy[\varphi \wedge \psi \rightarrow \beta(zxy)] \rightarrow \bigvee u \bigwedge xy[\varphi \wedge \psi \rightarrow \beta(xuy)]\}$$

donde φ representa una fórmula en que las variables x, v, w, $\cdots$, son libres pero no así y, z, u, y análogamente para ψ, con los papeles de x, y intercambiados.

La geometría elemental basada en los axiomas acabados de presentar, será designada por E_2. En los teoremas 1–4 que siguen, establecemos propiedades metamatemáticas fundamentales de esta teoría.[4]

Primeramente nos ocupamos del *problema de representación* para E_2, esto es, del problema de caracterizar todos los modelos de esta teoría. Por un modelo de E_2 entendemos un sistema $\mathfrak{M} = \langle A, B, D\rangle$ tal que (i) A es un conjunto no vacío arbitrario, B y D son una relación ternaria y una relación cuaternaria, respectivamente, entre los elementos de A; (ii) todos los axiomas de E_2 son válidos en $\mathfrak{M}$ si se supone que todas las variables recorren los elementos de A y las constantes β, δ se toman para designar las relaciones B, D, respectivamente.

Los ejemplos más familiares de modelos de E_2 (y que se pueden manejar fácilmente por métodos algorítmicos) están ciertos espacios cartesianos sobre campos ordenados. Suponemos que se sabe bajo qué condiciones un sistema $\mathfrak{F} = \langle F, +, \cdot, \leq\rangle$ (donde F es un conjunto, $+$ y $\cdot$ operaciones binarias respecto a las cuales F es cerrado, y $\leq$ una relación binaria entre los elementos de F) se

[4] Una discusión breve de la teoría E_2 y sus propiedades metamatemáticas fué dada en [4], págs. 43 y siguientes. Un desarrollo detallado (basado en los resultados de [4]) puede encontrarse en [3]—donde, sin embargo, el sistema de geometría elemental en cuestión difiere, del discutido en este artículo, en su estructura lógica, símbolos primitivos y axiomas.

El sistema de axiomas para E_2 anotado en el texto anterior es una versión simplificada del sistema en [4], págs. 55 y siguiente. La simplificación consiste primordialmente en la omisión de varios axiomas superfluos. La demostración de que estos axiomas superfluos son efectivamente deducibles de los restantes, fué obtenida por Eva Kallin, Scott Taylor y el autor, en conexión con un curso en fundamentos de la geometría dado por el autor en la Universidad de California, Berkeley, durante el año académico de 1956–1957.

llama campo ordenado y cómo se definen los símbolos 0, $x - y$, x^2 para campos ordenados. Un campo ordenado $\mathfrak{F}$ se llamará euclidiano si todo elemento no negativo de F es un cuadrado; se llama cerrado real si es euclidiano y si todo polinomio de grado impar con coeficientes en F tiene una raíz en F. Considérese el conjunto $A_{\mathfrak{F}} = F \times F$ de todos los pares ordenados $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ con x_1 y x_2 en F. Definimos las relaciones $B_{\mathfrak{F}}$ y $D_{\mathfrak{F}}$ entre tales pares mediante las siguientes estipulaciones:

$$B_{\mathfrak{F}}(xyz) \quad \textit{si, y sólo si} \quad (x_1 - y_1)\cdot(y_2 - z_2) = (x_2 - y_2)(y_1 - z_1),$$
$$0 \leq (x_1 - y_1)\cdot(y_1 - z_1), \qquad y \qquad 0 \leq (x_2 - y_2)\cdot(y_2 - z_2);$$
$$D_{\mathfrak{F}}(xyzu) \quad \textit{si, y sólo si}, \quad (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = (z_1 - u_1)^2 + (z_2 - u_2)^2.$$

El sistema $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{F}) = \langle A_{\mathfrak{F}}, B_{\mathfrak{F}}, D_{\mathfrak{F}} \rangle$ se llama el espacio cartesiano (bidimensional) sobre $\mathfrak{F}$. Si, en particular, tomamos como $\mathfrak{F}$ el campo ordenado $\mathfrak{R}$ de los números reales, obtenemos el espacio analítico (bidimensional) ordinario $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{R})$.[5]

Teorema 1 (teorema de representacion). *Para que $\mathfrak{M}$ sea modelo de* E_2 *es necesario y suficiente que $\mathfrak{M}$ sea isomorfo al espacio cartesiano $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{F})$ sobre algún campo cerrado real $\mathfrak{F}$.*

Demostración (esbozada). Es bien sabido que todos los axiomas de E_2 valen en $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{R})$ y que por lo tanto $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{R})$ es un modelo de E_2. Por un resultado fundamental en [4], todo campo cerrado real $\mathfrak{F}$ es elementalmente equivalente al campo $\mathfrak{R}$, esto es, toda proposición elemental (de primer orden) válida en uno de estos dos campos lo es también en el otro. Por consiguiente todo espacio cartesiano $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{F})$ sobre un campo cerrado real es elementalmente equivalente a $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{R})$ y por lo mismo es modelo de E_2; esto claramente se aplica también a todos los sistemas $\mathfrak{M}$ isomorfos a $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{F})$.

Para probar el teorema en la dirección opuesta, aplicamos métodos y resultados de la teoría geométrica elemental de las proporciones, que ha sido desarrollada en la literatura en diversas ocasiones (véase, por ejemplo, [1], págs. 51 y siguientes). Consíderese un modelo $\mathfrak{M} = \langle A, B, D \rangle$ de E_2; sean z y u dos puntos distintos cualesquiera de A, y F la línea recta apoyada en z y u, esto es, el conjunto de todos los puntos x tales que $B(zux)$ o $B(uxz)$ o bien $B(xzu)$. Aplicando construcciones geométricas familiares, definimos, sobre dos puntos cualesquiera x, y de F, las operaciones $+$ y $\cdot$ y la relación $\leq$. Así decimos que $x \leq y$ si $x = y$ o bien

[5] Todos los resultados de este artículo se extienden (con modificaciones evidentes) al caso de dimensión n para cualquier entero positivo n. A fin de obtener un sistema de axiomas para E_n debemos modificar los axiomas de dos dimensiones, A11 y A12, y dejar intactos los axiomas restantes; según un resultado reciente de D. Scott en su artículo presentado en el Symposium Internacional sobre el Método Axiomático en Berkeley (véase la nota 7 de pie de página), A11 y A12 pueden reemplazarse por cualquier proposición formulada en el simbolismo de E_n que valga en el espacio analítico n-dimensional ordinario, pero no en un espacio analítico m-dimensional con $m \neq n$. Al construir modelos algebraicos para geometrías unidimensionales usamos grupos abelianos ordenados en vez de campos ordenados.

$B(xzu)$ y no $B(yxu)$, o finalmente $B(zxy)$ pero no $B(xzu)$; $x + y$ se define como el único punto v en F tal que $D(zxyv)$ y, o $z \leq x$ y $y \leq v$, o bien $x \leq z$ y $v \leq y$. la definición de $x \cdot y$ es más compleja; hace referencia a puntos fuera de F y se basa esencialmente en propiedades de las rectas paralelas. Usando exclusivamente los axiomas A1–A12 se demuestra que $\mathfrak{F} = \langle F, +, \cdot, \leq \rangle$ es un campo ordenado; con el auxilio de A13 llegamos a la conclusión de que $\mathfrak{F}$ es efectivamente un campo cerrado real. Considerando una recta G perpendicular a F en el punto z, introducimos un sistema de coordenadas rectangulares en $\mathfrak{M}$ y establecemos una correspondencia biunívoca entre los puntos $x, y, \cdots$ de A y las parejas ordenadas de sus coordenadas $\bar{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$, $\bar{y} = \langle y_1, y_2 \rangle$, $\cdots$ en $F \times F$. Por medio del teorema de Pitágoras (que resulta válido en $\mathbf{E}_2$), probamos que la fórmula

$$D(xyst)$$

vale para puntos cualesquiera $x, y, \cdots$ de A si, y sólo si, la fórmula

$$D_{\mathfrak{F}}(\bar{x}\bar{y}\bar{s}\bar{t})$$

vale para los pares correlativos de coordenadas $\bar{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$, $\bar{y} = \langle y_1, y_2 \rangle$, $\cdots$ en $E \times F$, esto es, si

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = (s_1 - t_1)^2 + (s_2 - t_2)^2;$$

conclusión análoga se obtiene para $B(xys)$. Por consiguiente, los sistemas $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{F})$ son isomorfos, lo que completa la demostración.

Dirigimos la atención al *problema de completitud* para $\mathbf{E}_2$. Una teoría se llama completa si cada proposición σ (formulada en el simbolismo de la teoría) es válida en todo modelo de esta teoría o en ninguno de dichos modelos. Para teorías con formalización corriente (standard) esta definición puede presentarse en otras formas equivalentes; podemos decir, por ejemplo, que una teoría es completa si, para toda proposición σ, una de las proposiciones σ, $\neg\, \sigma$ es válida, o si dos modelos cualesquiera de la teoría son elementalmente equivalentes. Una teoría se llama consistente si tiene por lo menos un modelo; también se conocen al respecto varias formulaciones equivalentes. Si existe un modelo $\mathfrak{M}$ tal que una proposición es válida en $\mathfrak{M}$ si, y sólo si, es válida en la teoría, entonces la teoría es claramente completa y consistente a la vez, y recíprocamente. La solución del problema de completitud para $\mathbf{E}_2$ está dada en el siguiente

TEOREMA 2 (TEOREMA DE COMPLETITUD). (i) *Una proposición formulada en* $\mathbf{E}_2$ *es válida si y sólo si es válida en* $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{R})$*;*
(ii) *la teoría* $\mathbf{E}_2$ *es completa (y consistente).*

La parte (i) de este teorema se sigue del teorema 1 y de un resultado fundamental en [4] que fué aplicado en la demostración del teorema 1; (ii) es consecuencia inmediata de (i).

El siguiente problema que se discutirá aquí es el *problema de la decisión* para $\mathbf{E}_2$. Es el problema de la existencia de método un mecánico que nos permita decidir en cada caso particular si una proposición formulada en $\mathbf{E}_2$ es válida o no. La solución de este problema es también positiva:

TEOREMA 3 (TEOREMA DE LA DECISION). *La teoría* $\mathbf{E}_2$ *es decidible.*

En efecto, $\mathbf{E}_2$ es completa por el teorema 2, y axiomatizable por su mera descripción (es decir, tiene un sistema de axiomas tal que siempre podemos decidir si una proposición dada es un axioma). Es sabido, además, que toda teoría completa y axiomatizable con formalización corriente es decidible (véase, por ejemplo, [6], pág. 14), y por lo tanto $\mathbf{E}_2$ es decidible. Al analizar la discusión en [4], podemos obtener de hecho un método de decisión para $\mathbf{E}_2$.

El último problema matemático que se va a discutir para $\mathbf{E}_2$ es el *problema de la axiomatizabilidad finita.* Por la descripción de $\mathbf{E}_2$, vemos que esta teoría tiene un sistema de axiomas que consta de un número finito de axiomas individuales y de una colección infinita de axiomas descritos con un mismo esquema. Este esquema axiomático (que es la expresión simbólica presente en A13) puede modificarse ligeramente para formar una sola proposición en el sistema del cálculo de predicados de primer orden con variables predicado libres, y todos los axiomas particulares de la colección infinita pueden obtenerse por substitución de esta fórmula. Brevemente describimos la situación diciendo que la teoría $\mathbf{E}_2$ es "casi finitamente axiomatizable," y preguntamos si $\mathbf{E}_2$ es finitamente axiomatizable en el sentido estricto, esto es, si el sistema original de axiomas puede ser reemplazado por un sistema finito equivalente de proposiciones formuladas en $\mathbf{E}_2$. La respuesta es negativa;

TEOREMA 4 (TEOREMA DE NO AXIOMATIZABILIDAD FINITA). *La teoría* $\mathbf{E}_2$ *no es finitamente axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN (esbozada). Por la demostración del teorema 1 se ve que la colección infinita de axiomas A13 puede reemplazarse en forma equivalente por una sucesión infinita de proposiciones $S_0, \cdots, S_n, \cdots$; S_0 establece que el campo ordenado $\mathfrak{F}$ construido en la demostración del teorema 1 es euclidiano, y S_n, para $n > 0$, expresa el hecho de que en este campo todo polinomio de grado $2n + 1$ tiene una raíz. Para todo número primo p podemos fácilmente construir un campo ordenado $\mathfrak{F}_p$ en el que todo polinomio de grado impar $2n + 1 < p$ tenga una raíz mientras que ciertos polinomios de grado p no tienen raíces; por consiguiente, si $2m + 1 = p$ es un primo, entonces todos los axiomas A1–A12 *y* S_n con $n < m$ valen en $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{F}_p)$ mientras que S_m no vale. Esto implica inmediatamente que el sistema infinito de axiomas A1, $\cdots$, A12, $S_0, \cdots, S_n, \cdots$ no tiene un subsistema finito del que se deduzcan todos los axiomas del sistema. Luego, mediante un argumento simple, concluimos que, más generalmente, no hay un sistema finito de axiomas equivalente al sistema original para $\mathbf{E}_2$.

Por la demostración que se acaba de esbozar, vemos que $\mathbf{E}_2$ puede basarse en un sistema de axiomas A1, $\cdots$, A12, $S_0, \cdots, S_n, \cdots$ en el que (a diferencia del sistema de axiomas original) cada axioma puede ponerse en la forma de una proposición universal o de una proposición existencial o de una proposición universal existencial; esto es, cada axioma es de la forma

$$\bigwedge xy \cdots (\varphi)$$

o de la forma

$$\bigvee uv \cdots (\varphi)$$

o, bien, de la forma

$$\bigwedge xy \cdots \bigvee uv \cdots (\varphi)$$

donde φ es una fórmula sin cuantificadores. Una consecuencia, más bien evidente, de esta propiedad estructural de los axiomas es el hecho de que la unión de una cadena (o de una familia dirigida) de modelos de $\mathbf{E}_2$ es a su vez un modelo de $\mathbf{E}_2$. Esta consecuencia puede también derivarse directamente de la demostración del teorema 1.

La concepción de la geometría elemental de que nos hemos ocupado hasta el momento, no es, por supuesto, la única posible. En lo que sigue, discutiremos brevemente otras dos interpretaciones posibles del término "geometría elemental"; estarán contenidas en dos teorías formalizadas diferentes, $\mathbf{E}_2'$, $\mathbf{E}_2''$.

La teoría $\mathbf{E}_2'$ se obtiene al suplementar la base lógica de $\mathbf{E}_2$ con un pequeño fragmento de la teoría de conjuntos. Específicamente, incluimos en el simbolismo de $\mathbf{E}_2'$ nuevas variables X, Y, $\cdots$ que se supone toman por valores conjuntos finitos arbitrarios de puntos (o, lo que en este caso equivale esencialmente a lo mismo, sucesiones finitas arbitrarias de puntos); también incluimos una nueva constante lógica, el símbolo $\in$, para designar la relación de pertenencia entre puntos y conjuntos finitos de puntos. Como axiomas para $\mathbf{E}_2'$, nuevamente elegimos A1–A13; debe observarse, sin embargo, que la colección de axiomas A13 es ahora más extensa que en el caso de $\mathbf{E}_2$, pues φ, ψ representan fórmulas arbitrarias construidas con el simbolismo de $\mathbf{E}_2'$. Por consiguiente, la teoría $\mathbf{E}_2'$ excede considerablemente a $\mathbf{E}_2$ en medios de expresión y en potencia. En $\mathbf{E}_2'$ podemos formular y estudiar varias nociones que tradicionalmente se discuten en los textos de geometría elemental y que no pueden expresarse en $\mathbf{E}_2$; por ejemplo, la noción de polígono de un número cualquiera de vértices, y las de circunferencia y área de un círculo.

Respecto a los problemas que se han discutido y resuelto para $\mathbf{E}_2$ en los teoremas 1–4, tres de ellos—los problemas de representación, completitud y axiomatizabilidad finita—están aún insolutos para $\mathbf{E}_2'$. En particular, no conocemos una caracterización simple de todos los modelos de $\mathbf{E}_2'$, ni sabemos si dos modelos tales son equivalentes respecto a todas las proposiciones formuladas en $\mathbf{E}_2'$. (Al hablar de los modelos de $\mathbf{E}_2'$, nos referimos exclusivamente a los llamados modelos "standard"; esto es, para decidir si una proposición σ, formulada en $\mathbf{E}_2'$, es válida en un modelo dado, suponemos que las variables x, y, $\cdots$, que figuran en σ, recorren todos los elementos de un conjunto, que las variables X, Y, $\cdots$ recorren todos los subconjuntos finitos de este conjunto, y que $\in$ designa siempre la relación de pertenencia.) El postulado arquimediano puede formularse y resulta válido en $\mathbf{E}_2'$. Luego, por el teorema 1, todo modelo de $\mathbf{E}_2'$ es isomorfo a un espacio cartesiano $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{F})$ sobre algún campo cerrado real arquimediano $\mathfrak{F}$. Existen, sin embargo, campos cerrados reales arquimedianos $\mathfrak{F}$ tales que $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{F})$ no es modelo de $\mathbf{E}_2'$; por ejemplo, el campo de los números algebraicos reales es de esta naturaleza. Una consecuencia del postulado de Arquimedes es que todo modelo de $\mathbf{E}_2'$ tiene a lo sumo la potencia del continuo (mientras que, en vista del teorema 1, $\mathbf{E}_2$ tiene modelos con potencias infinitas cualesquiera). En efecto, $\mathbf{E}_2'$ tiene modelos con la potencia del continuo, por ejemplo $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{R})$, pero también puede demostrarse que tiene modelos numerables. Luego, aunque la teoría $\mathbf{E}_2'$ pudiera ser completa, tiene modelos no isomorfos y por lo tanto no es categórica.[6]

Solamente el problema de la decisión para $\mathbf{E}_2'$ ha encontrado una solución definida:

TEOREMA 5. *La teoría $\mathbf{E}_2'$ es indecidible, y por lo tanto lo son todas sus extensiones consistentes.*

Esto se concluye del hecho de que la aritmética de Peano es (relativamente) interpretable en $\mathbf{E}_2'$; véase [6], págs. 31 y siguientes.

Para obtener $\mathbf{E}_2''$ dejamos intacto el simbolismo de $\mathbf{E}_2$ pero debilitamos el sistema de axiomas de $\mathbf{E}_2$. En efecto, reemplazamos la colección infinita de axiomas elementales de continuidad, A13, por una sola proposición, A13′, que es consecuencia de uno de estos axiomas. La proposición expresa el hecho de que un segmento que une dos puntos, uno dentro y otro fuera de un círculo dado, siempre corta al círculo; simbólicamente:

A13′. $\bigwedge xyzx'z'u \bigvee y'[\delta(uxux') \wedge \delta(uzuz')$

$$\wedge\ \beta(uxz) \wedge \beta(xyz) \rightarrow \delta(uyuy') \wedge \beta(x'y'z')]$$

Como consecuencia del debilitamiento del sistema de axiomas, varias proposiciones que son formuladas y válidas en $\mathbf{E}_2$, no son válidas en $\mathbf{E}_2''$. Esto se aplica

[6] Estas últimas observaciones resultan de un teorema metamatemático general (una extensión del teorema de Skolem-Löwenheim) que se aplica a todas las teorías obtenidas de teorías con formalización corriente al incluir nuevas variables que toman por valores conjuntos finitos arbitrarios y una nueva constante lógica, el símbolo de pertenencia $\in$, y posiblemente al extender sistemas de axiomas originales. En virtud de este teorema general, si T es una teoría de la clase recién descrita con β símbolos diferentes a lo sumo, y si un sistema matemático $\mathfrak{M}$ es un modelo "standard" de T con una potencia infinita α, entonces $\mathfrak{M}$ tiene subsistemas con cualquier potencia infinita γ, $\beta \leq \gamma \leq \alpha$, que son también modelos "standard" de T. La demostración de este teorema (recientemente encontrada por el autor) no ha sido publicada aún; difiere sólo ligeramente de la demostración del teorema análogo para teorías con formalización corriente esbozada en [7], págs. 92 y siguiente. A diferencia de las teorías con formalización corriente, algunas de las teorías T discutidas en esta nota tienen modelos con una potencia infinita α y con cualquier potencia infinita menor, pero ninguna con potencia mayor, un ejemplo es proporcionado por la teoría $\mathbf{E}_2'$ para la cual α es la potencia del continuo. En particular, algunas de las teorías tienen modelos exclusivamente numerables y de hecho son categóricas; esto se aplica, por ejemplo, a la teoría obtenida de la aritmética de Peano en la misma forma en que $\mathbf{E}_2'$ se ha obtenido de $\mathbf{E}_2$. Hay también otras T que tienen modelos con potencias infinitas arbitrarias; tal es, por ejemplo, la teoría $\mathbf{E}_2''$ mencionada al final de este artículo.

en particular a los teoremas existenciales que no pueden establecerse por medio de las llamadas construcciones geométricas elementales (usando exclusivamente la regla y el compás); por ejemplo, el teorema de la trisección de un ángulo arbitrario.

Respecto a los problemas metamatemáticos discutidos en este artículo, la situación el el caso de E_2'' es exactamente la opuesta a la del caso de E_2'. Los tres problemas insolutos para E_2' admiten soluciones simples para E_2''. En particular, la solución del problema de representación está dada en el siguiente

TEOREMA 6. *Para que $\mathfrak{M}$ sea modelo de E_2'' es necesario y suficiente que $\mathfrak{M}$ sea isomorfo al espacio cartesiano $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{F})$ sobre algún campo euclidiano $\mathfrak{F}$.*

Este teorema es esencialmente conocido en la literatura. La suficiencia de la condición puede comprobarse directamente; su necesidad puede establecerse mediante la teoría geométrica elemental de las proporciones (véase la demostración del teorema 1).

Usando el teorema 6, demostramos fácilmente que la teoría E_2'' es incompleta, y por la descripción de E_2'' vemos de inmediato que esta teoría es finitamente axiomatizable.

Por otra parte, el problema de la decisión para E_2'' está insoluto y se sospecha que es difícil. A la luz de los resultados en [2] parece que la solución de este problema es negativa; el autor osaría a conjeturar (más todavía) que ninguna subteoría de E_2 finitamente axiomatizable es decidible. Si convenimos en referirnos a una proposición geométrica elemental (es decir, una proposición formulada en E_2) como válida si lo es en E_2, y como elementalmente deducible si es válida en E_2'', entonces la situación puede describirse como sigue: *conocemos un método mecánico general para decidir si una proposción geométrica elemental es válida, pero no conocemos, y probablemente nunca conoceremos, un metodo tal para decidir si una proposición de esta naturaleza es elementalmente deducible.*

Las diferencias entre E_2 y E_2'' desaparecen cuando nos concretamos a proposiciones universales. En efecto, tenemos

TEOREMA 7. *Una proposición universal formulada en E_2 es válida en E_2 si, y sólo si, es válida en E_2''.*

Para demostrar esto, recordamos que todo campo ordenado puede extenderse a un campo cerrado real. Luego, por los teoremas 1 y 6, todo modelo de E_2'' puede extenderse a un modelo de E_2. Por consiguiente, toda proposición universal válida en E_2 lo es también en E_2''; el recíproco es obvio. (Una demostración más simple aún del teorema 7, y de hecho independiente del teorema 1, puede basarse en el lema de que todo subsistema finito de un campo ordenado puede sumergirse isomórficamente en el campo ordenado de los números reales.)

El teorema 7 continúa siendo válido si suprimimos A13′ del sistema de axiomas de E_2'' (y se aplica aún a sistemas de axiomas más débiles). Así vemos que toda proposición elemental universal válida en E_2 puede ser demostrada sin recurrir a los axiomas de continuidad. El resultado se extiende a todas las proposiciones que pueden no ser universales al formularse en E_2 pero que, vagamente hablando, resultan universales en la notación de los espacios cartesianos $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{F})$.

Como consecuencia inmediata de los teoremas 3 y 7 obtenemos:

TEOREMA 8. *La teoría E_2'' es decidible respecto al conjunto de sus proposiciones universales.*

Esto significa que existe un método mecánico para decidir en cada caso particular si una proposición universal dada, formulada en la teoría E_2'', es válida en todo modelo de la teoría o no.

Podíamos discutir algunas otras teorías afines a E_2, E_2' y E_2''; por ejemplo, la teoría E_2''' que tiene el simbolismo de E_2' y el sistema de axiomas de E_2''. El problema de decidir cuál de las diversas concepciones formales de la geometría elemental se apega más a la tradición histórica y al uso ordinario de esta noción, parece ser más bien inútil y carente de mayor interés. El autor siente que, entre estas distintas concepciones, la contenida en E_2 se distingue por la simplicidad y claridad de las intuiciones básicas y por la armonía y la fuerza de sus implicaciones metamatemáticas.[7]

INSTITUTE FOR BASIC RESEARCH IN SCIENCE,
UNIVERSITY OF CALIFORNIA (BERKELEY).

BIBLIOGRAFÍA

[1] D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, Octava edición, con revisiones y suplementos por P. BERNAYS, Stuttgart 1956, III + 251 pp.

[2] J. ROBINSON, *Definability and decision problems in arithmetic*, The journal of symbolic logic, vol. 14 (1949), pp. 98–114.

[3] W. SCHWABHÄUSER, *Uber die Vollständigkeit der elementaren euklidischen Geometrie.* Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol. 2 (1956), pp. 137–165.

[4] A. TARSKI, A decision method for elementary algebra and geometry, Segunda edición, Berkeley y Los Angeles 1951, VI + 63 pp.

[5] A. TARSKI, *Contributions to the theory of models*, Indagationes mathematicae, vol. 16 (1954), pp. 572–588, y vol. 17 (1955), pp. 56–64.

[6] A. TARSKI, A. MOSTOWSKI, y R. M. ROBINSON, Undecidable theories, Amsterdam 1953, XI + 98 pp.

[7] A. TARSKI, y R. L. VAUGHT, *Arithmetical extensions of relational systems.* Compositio mathematica, vol. 13 (1957), pp. 81–102.

[8] B. L. VAN DER WAERDEN, Modern algebra, Edición inglesa revisada, Nueva York 1953, vol. 1, XII + 264 pp.

---

[7] Varios artículos presentados en el Symposium Internacional sobre el Método Axiomático (Universidad de California, Berkeley, 26 de diciembre de 1957 al 4 de enero de 1958) están relacionados con el presente en métodos y resultados. Son artículos por R. M. Robinson (*Binary relations as primitive notions in elementary geometry*), D. Scott (*Dimension in elementary Euclidean geometry*), y W. Szmielew (*Some metamathematical problems concerning elementary hyperbolic geometry*). En el volumen mimeográfico "The axiomatic method with special reference to geometry and physics," Berkeley 1958, VIII + 174 pp., pueden encontrarse resúmenes de estos artículos, incluyendo el presente. La memoria completa del Symposium está para publicarse en un volumen de la serie "Studies in Logic and the Foundations of Mathematics" de la North-Holland Publishing Co. en Amsterdam.