Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 30, No. 1, 1985

SOBRE LA EQUIVALENCIA DE CIERTOS DIFEOMORFISMOS LOCALES EN $\mathbb{R}^n$

POR MARÍA EWA PLIŚ

I. Introducción y Definiciones

Sea K una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ con centro en 0 y con radio r. Consideremos el conjunto $\mathrm{Diff}_0^\infty(K)$ de difeomorfismos de clase C^∞ en K, que se anulan en 0.

Definición 1. Se dice que los difeomorfismos f, $g \in \mathrm{Diff}_0^\infty(K)$ son equivalentes formalmente, si existe un difeomorfismo σ de clase C^∞ en U, vecindad del cero en $\mathbb{R}^n$, tal que

$$(f \circ \sigma)^{(\nu)}(0) = (\sigma \circ g)^{(\nu)}(0), \quad \text{para} \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

Definición 2. Se dice que los difeomorfismos f, $g \in \mathrm{Diff}_0^\infty(K)$ son equivalentes, si existe un difeomorfismo σ de clase C^∞ en una vecindad de cero U, tal que

$$f \circ \sigma = \sigma \circ g \quad \text{en} \quad U \cap K. \tag{1}$$

Es claro que la equivalencia de dos difeomorfismos implica su equivalencia formal.

Varios autores han examinado este tipo de equivalencia de difeomorfismos, como Bielicki ([1]) y Kuo T. C. ([2]). El problema que tratan es el siguiente: ¿qué condiciones hay que suponer acerca de los difeomorfismos para que de su equivalencia formal se siga su equivalencia?

En este artículo se considera el problema, un poco distinto, que trata de contestar la pregunta siguiente: ¿son equivalentes dos difeomorfismos "cercanos" (en un cierto sentido)? En [5] se resuelve este problema para el caso en que los difeomorfismos están definidos en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^1$, y son de la forma $x - \phi(x)$, donde $\phi(x) \cdot x > 0$, para $x \neq 0$ y $\phi(x)$ se anula con todas sus derivadas en $x = 0$. Aquí se consideran los difeomorfismos $f:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ de la forma $f(x) = x + \phi(x)$, donde ϕ es una función de clase C^∞, y que satisfacen la condición $f^i \rightrightarrows 0$ cuando $i \to \infty$, donde f^i es la i-ésima iterada de f. Resulta, que si un difeomorfismo g es "cercano" (en cierto sentido) al difeomorfismo f, entonces también satisface esta condición (lema 6).

Para una función $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_n)$ de clase C^∞ en $U \subset \mathbb{R}^n$, se utilizará la siguiente notación:

$$\| \phi^{(k)}(x) \| = \max\{ | D_{j_1 \cdots j_k}{}^{(k)} \phi_m(x) |;\ m = 1, \cdots, n;\ 1 \leqq j_1, \cdots, j_k \leqq n\}, \tag{2}$$

para cualquier $x \in U$.

II. Formulación del Teorema

TEOREMA. *Sea $f \in \mathrm{Diff}_0^\infty(K)$ un difeomorfismo de la forma $f(x) = x + \phi(x)$, donde ϕ es una función de clase C^∞ en K, tal que $\phi(0) = 0$ y*

$$(3) \qquad \|\phi'(x)\| \leqq \frac{1}{3n}, \quad para \quad x \in K.$$

Supongamos que $f(K) \subset K$ y $f^j \rightrightarrows 0$ en K. Sea g un difeomorfismo de clase C^∞ en K de la forma $g(x) = x + \psi(x)$, con $\psi(0) = 0$. Entonces, si existe una función real valuada b, definida y continua en una vecindad U_0 del cero, positiva fuera del cero tal que

$$(4) \qquad \|\phi^{(\nu)}(x) - \psi^{(\nu)}(x)\| \leqq b(x) \qquad (\nu = 0, 1, \cdots; x \in U_\nu)$$

para una sucesión $\{U_\nu\}$ de vecindades decrecientes del cero, se tiene que los difeomorfismos f y g son equivalentes.

Observación 1. La suposición de que $f^j \rightrightarrows 0$ en K implica $\phi(x) \neq 0$ para $x \neq 0$. Eso es cierto, porque si para $x_0 \neq 0$ tenemos $f(x_0) = x_0$, entonces para cada j, $f^j(x_0) = x_0$, lo que implica $f^j(x_0) \to x_0 \neq 0$, y se contradice la hipótesis.

El Teorema contiene el caso de los difeomorfismos del tipo $|f(x)| < |x|$ que satisfacen (3), gracias al lema siguiente:

LEMA 1. *Sea K un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$, que contiene el cero y $f{:}K \to \mathbb{R}^n$ una función continua tal que $|f(x)| < |x|$ para $x \neq 0$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que si $p \geqq N$, $|f^p(x)| \leqq \epsilon$, siempre que f^p exista, es decir, que $f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x) \in K$.*

Demostración. Sea $B_r = K \cap \{x{:}|x| < r\}$ y sea r_0 el radio de la bola más pequeña que contiene al conjunto K. Primero observamos que para cualquier $\alpha > 0$ existe β, con $0 < \beta < \alpha$, tal que si $x \in B_\alpha$ entonces $|f(x)| < \beta$. Para demostrar esto, sea $0 < \alpha' < \alpha$; como f es continua en 0, entonces existe $\delta < \alpha$ tal que para $x \in B_\delta$, se tiene $|f(x)| < \alpha'$. A esta δ corresponde ϵ, con $0 < \epsilon < \alpha$, tal que $|x| - |f(x)| > \epsilon$ para $x \in B_\alpha \setminus B_\delta$, o sea tal que $|f(x)| < \alpha - \epsilon = \alpha''$. Ahora basta definir $\beta = \max\{\alpha', \alpha''\}$. La observación anterior implica, que si definimos una sucesión $r_0 = \alpha, \cdots, r_{k+1} = \sup\{|f(x)|; x \in B_{r_k}\}$ entonces $r_0 \geqq r_1 \geqq \cdots \geqq r_k \geqq 0$. Ahora es suficiente demostrar que $r_k \to 0$. Supongamos que $r_k \to a$ y $a > 0$. Aplicando la observación anterior para $\alpha = a$ tenemos $a_1 < a$ tal que $|f(x)| < a_1$ para $x \in B_a$. La continuidad uniforme de la función f implica que para $\epsilon = (a - a_1)/2$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B_{a+\delta}$, entonces $|f(x)| < a_1 + (a - a_1)/2 = (a + a_1)/2 < a - \theta$ $(\theta > 0)$. Puesto que $r_k \to a$, entonces para cierto índice k', $r_{k'} < a + \delta$. Así que $|f(x)| < a - \theta$ para $x \in B_{r_{k'}}$, o sea $r_{k'+1} < a$, lo que contradice la definición de a. Esto significa, que para cualquier $\epsilon > 0$ existe N tal que para $p \geqq N$ tenemos $\sup\{|f(x)|; x \in B_{r_{p-1}}\} \leqq \epsilon$, o sea $|f^p(x)| \leqq \epsilon$ para $p \geqq N$, si $f^p(x)$ existe.

COROLARIO 1. *Si $|f(x)| < |x|$ para $x \neq 0$ y f es continua en la bola $|x| \leqq r_0$, entonces $f^j \rightrightarrows 0$ en esta bola.*

Observación 2. En el caso unidimensional para los difeomorfismos que satisfacen (3), la condición $|f(x)| < |x|$ para $x \neq 0$ equivale a las condiciones $f^j \rightrightarrows 0$, y $f(K) \subset K$.

Observación 3. La observación 2 no es cierta para $n \geqq 2$, puesto que se puede construir un difeomorfismo h definido en una vecindad de 0 en $\mathbb{R}^2$, tal que $h^p \rightrightarrows 0$ y h no satisface la condición $|h(x)| < |x|$.

III. Demostración del Teorema

Buscamos el difeomorfismo σ de la forma $\sigma(x) = x + y(x)$. Entonces la igualdad (1) equivale a la siguiente:

$$y(x) = y(x + \psi(x)) + \psi(x) - \phi(x + y(x)) \equiv A_\psi y(x). \tag{5}$$

Luego es suficiente probar la existencia de un punto fijo para el operador A_ψ, definido en un conjunto adecuado y con ψ satisfaciendo (4), donde b es una función apropiadamente escogida.

Demostramos primero varios lemas.

LEMA 2. *Sea f un homeomorfismo sobre K con $f(0) = 0$, y D una vecindad del cero, abierta, tal que $\overline{f(D)} \subset D$ y $\overline{f^h(D)} \subset D$ para un natural h. Entonces existe una vecindad abierta del cero D_1, con $\bar{D}_1 \subset K$ tal que $\overline{f(D_1)} \subset D_1$ y $\overline{f^{h-1}(D_1)} \subset D_1$.*

Demostración. Designamos $B = f^{h-1}(D)$, entonces $f(B) = f^h(D)$ así que $\overline{f(B)} \subset D$. Por la continuidad de f, existe una vecindad abierta V de $\bar{B}$, con $\bar{B} \subset V \subset K$ y tal que $\overline{f(V)} \subset D$. Por lo tanto, $\overline{f^k(V)} = \overline{f^{k-1}(f(V))} \subset D$ para cualquier k, en particular para $k = h - 1$. Definimos $D_1 = V \cup D$, entonces

$$\overline{f^{h-1}(D_1)} \subset \overline{f^{h-1}(V)} \cup \overline{f^{h-1}(D)} \subset D \cup \bar{B} \subset D \cup V = D_1$$

y

$$\overline{f(D_1)} \subset \overline{f(V)} \cup \overline{f(D)} \subset D \subset D_1.$$

Utilizando ahora $h - 1$ veces el lema 2 obtenemos inmediatamente:

COROLARIO 2. *Con las suposiciones del lema 2, existe una vecindad abierta de cero, D_h, tal que $\overline{f(D_h)} \subset D_h$.*

LEMA 3. *Para f homeomorfismo sobre K, $f(0) = 0$ y $f^j \rightrightarrows 0$ en K, existe una vecindad abierta de cero, W tal que $\overline{f(W)} \subset W \subset K$.*

Demostración. Consideremos el conjunto $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(G)$, donde G es una bola abierta con centro en cero y el radio suficientemente pequeño para que $\bar{A} \subset K$. Por la definición de A, $f(A) \subset A$, por lo tanto $f(\bar{A}) \subset \bar{A}$ y $f^k(\bar{A}) \subset \bar{A}$ para cada k. Por el teorema de invariancia de dominio de Brouwer, si f es un homeomorfismo en K y G un subconjunto abierto de K, entonces $f(G)$ es abierto. Por lo tanto A es una vecindad de cero abierta, así que existe $\epsilon > 0$ tal que si K_ϵ es una bola abierta con el centro en cero y el radio ϵ, entonces $\bar{K}_\epsilon \subset$

A. Por las suposiciones acerca de f, existe N tal que $f^k(A) \subset K_\epsilon$ para $k \geqq N$, así que $f^k(A) \subset A$ para $k \geqq N$. Utilizando ahora el Corolario 2 para $D = A$ y $h = N$ vemos que es suficiente tomar $W = D_h = D_N$.

El lema 3 implica el siguiente:

COROLARIO 3. *Para cualquier* $\epsilon > 0$ *existe* W_ϵ *vecindad de cero tal que* $W_\epsilon \subset K_\epsilon$ *y* $\overline{f(W_\epsilon)} \subset W_\epsilon$.

Esto es una consecuencia inmediata de la convergencia uniforme de la sucesión $\{f^j\}$ al cero y del hecho de que para la vecindad W del lema 3, $\overline{f^k(W)} \subset f^{k-1}(W)$ para cada k.

Por otra parte podemos suponer que W_ϵ es conexo, sustituyendo W_ϵ por la componente que contiene al cero. Denotamos $r_\epsilon = \rho(f(W_\epsilon), \diagdown W_\epsilon) > 0$ (donde $\rho(A, B)$ = distancia (A, B) y $\diagdown A$ = complemento de A) y escogemos un número natural N_ϵ de tal manera que se cumpla:

$$n^{1/2}2^{-N_\epsilon} \leqq \tfrac{1}{2}r_\epsilon \tag{6}$$

Dividimos $\mathbb{R}^n$ en cubos con los lados paralelos a los ejes de coordenadas y con longitud 2^{-N_ϵ}. Esta división la denotamos $\mathcal{M}_\epsilon$. Sea Y_ϵ la unión de aquellos cubos de $\mathcal{M}_\epsilon$ tales que la intersección de sus cerraduras con $\overline{f(W_\epsilon)}$ no es el conjunto vacío. Ahora definimos X_ϵ = int Y_ϵ. Por la condición (6) (para N_ϵ), $\overline{f(W_\epsilon)} \subset X_\epsilon \subset \bar{X}_\epsilon \subset W_\epsilon$, por lo tanto tenemos el siguiente:

LEMA 4. *Si f es un homeomorfismo sobre K, $f(0) = 0$ y $f^k \rightrightarrows 0$ en K, para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural M_ϵ y una vecindad abierta X_ϵ del cero tales que*:

1°. $\overline{f(X_\epsilon)} \subset X_\epsilon \subset K_\epsilon$

2°. *Cualesquiera dos puntos $x, y \in X_\epsilon$ se pueden unir con una línea quebrada contenida en X_ϵ, con el número de partes lineales no mayor que M_ϵ, y tal que la longitud de cada parte lineal es menor o igual que la distancia entre los puntos x, y.*

Se puede demostrar el siguiente lema:

LEMA 5. *Para la vecindad W del lema 3 y para cualquier $c > 1$ existe una función a definida sobre W, positiva para $x \neq 0$ y $a(0) = 0$, continua en cero y que satisface la condición*:

$$a(f(x)) \leqq \frac{1}{c}\, a(x), \quad \textit{para} \quad x \in W. \tag{7}$$

LEMA 6. *Sea f homeomorfismo sobre K, tal que $f(0) = 0$ y $f^j \rightrightarrows 0$ sobre K; sea $W \subset K$ una vecindad abierta del cero tal que $\overline{f(W)} \subset W$. Entonces existe una función α positiva para $x \neq 0$ y $\alpha(0) = 0$, continua sobre W, tal que si g es un homeomorfismo sobre K que cumple $\| f(x) - g(x) \| \leqq \alpha(x)$ para $x \in W$, entonces $g^k \rightrightarrows 0$ en W, y $\overline{g(W)} \subset W$.*

Demostración. Escogemos una sucesión $\{X_i\}$ de conjuntos abiertos de tal manera que satisfacen las siguientes condiciones: $\overline{f(W)} \subset X_0 \subset \bar{X}_0 \subset W$ y $\overline{f(X_{i-1})} \subset X_i \subset \bar{X}_i \subset f^i(W)$ para $i = 1, 2, \cdots$. Consideremos cualquier función α continua en W positiva en $x \neq 0$, tal que:

$$(8) \qquad \alpha(x) \leqq \begin{cases} \frac{1}{2}\rho(f(W), \setminus X_0) & \text{para} \quad x \in W, \\ \\ \frac{1}{2}\rho(f(X_{i-1}), \setminus X_i) & \text{para} \quad x \in X_{i-1}. \end{cases}$$

Ahora si g es un homeomorfismo sobre W tal que $\| f(x) - g(x) \| \leqq \alpha(x)$ sobre W, entonces $g^{i+1}(W) \subset X_i$. Esto lo probaremos por inducción:

1°. $g(W) \subset X_0$ directamente por la definición de α, o sea $\overline{g(W)} \subset W$;

2°. $\overline{f(X_{i-1})} \subset X_i$, por lo tanto de la definición de α, $\overline{g(X_{i-1})} \subset X_i$; entonces si $g^i(W) \subset X_{i-1}$, también $g^{i+1}(W) = g(g^i(W)) \subset \overline{g(X_{i-1})} \subset X_i$. Es decir, $g^i(W) \subset f^{i-1}(W)$ y esto implica la convergencia uniforme de la sucesión $\{g^j\}$ al cero, en W.

Esto termina la demostración del lema 6. Podemos proceder ahora a la demostración del teorema principal. Seleccionamos una función a del lema 5 para $c = \frac{1}{6}$, que satisface la condición:

$$(9) \qquad a(f(x)) \leqq \tfrac{1}{6}a(x) \quad \text{para} \quad x \in W.$$

Puesto que $a(x) \to 0$ con $x \to 0$, existe $r_1 > 0$ tal que para $\| x \| \leqq r_1$ tenemos $a(x) < r$, donde r es el radio de la bola K. Sea $r_2 = \max\{a(x);\ \| x \| \leqq r_1\} < r$ y $r_3 = \min\{r_1,\ r - r_2\}$. Por lo tanto si $\| x \| \leqq r_3$, $a(x) \leqq r_2$ y eso implica que si $\| y(x) \| \leqq a(x)$ y $\| x \| \leqq r_3$ entonces

$$(10) \qquad \| x + y(x) \| \leqq r_3 + r_2 \leqq r.$$

Por el lema 4 existe una vecindad abierta del cero X_{r_3} tal que $\bar{X}_{r_3} \subset K_{r_3}$ y $\overline{f(X_{r_3})} \subset X_{r_3}$. Designamos ahora $U_0 = X_{r_3}$ y para una sucesión $\lambda = \{\lambda_\nu\}$ de números reales positivos con $\lambda_0 = 1$ y para una sucesión $u = \{U_\nu\}$ de vecindades del cero con $U_\nu \subset U_0$ podemos definir el conjunto siguiente:

$$Z_{(\lambda,u)} = \{y\colon U_0 \to \mathbb{R}^n;\ y \in C^\infty,\ \| y(x) \| \leqq a(x) \text{ en } U_0,\ \| y^{(\nu)}(x) \| \leqq \lambda_\nu a(x) \text{ en } U_{\nu-1},\ \nu \geqq 1\}.$$

El conjunto así definido considerado como subconjunto del espacio $C(U_0, \mathbb{R}^n)$ de restricciones a U_0 de las funciones continuas sobre $\bar{U}_0$ con la topología de la convergencia uniforme es un conjunto relativamente compacto. Es así, porque $\bar{Z}_{(\lambda,u)}$ es un subconjunto del conjunto de las funciones uniformemente acotadas sobre U_0 que satisfacen la condición de Lipshitz con una constante común $L = \lambda_1 \cdot M_{r_3} \cdot \max\{a(x);\ x \in U_0\}$ (donde M_{r_3} es la constante del lema 4) o sea de un conjunto compacto. Se puede ver también que el conjunto $Z_{(\lambda,u)}$ es un conjunto convexo para cualquier λ y u.

Sea b_0 una función cualquiera definida sobre U_0, positiva para $x \neq 0$, tal que

$$b_0(x) \leqq \min\{\tfrac{1}{3}a(x),\ \omega^{-1}(\tfrac{1}{6}a(x)),\ \alpha(x)\} \tag{11}$$

donde ω es el módulo de continuidad de la función a, y α es la función escogida para $W = U_0$ según el lema 6. Ahora, si el difeomorfismo $g(x) = x + \psi(x)$ satisface

$$\| g(x) - f(x) \| = \| \phi(x) - \psi(x) \| \leqq b_0(x) \quad \text{para} \quad x \in U_0$$

entonces el operador A_ψ definido por la fórmula (5) es bien definido en el conjunto $\bar{Z}_{(\lambda,u)}$ gracias a la desigualdad (10) y al lema 6, aplicado para $W = U_0$. Es fácil ver también que A_ψ es un operador continuo en el conjunto $\bar{Z}_{(\lambda,u)}$. Ahora probaremos que es posible escoger la función b, las constantes λ_ν y las vecindades del cero $U_\nu (\nu = 1, 2, \cdots)$ de tal manera que si ψ satisface (4), $A_\psi(Z_{(\lambda,u)}) \subset Z_{(\lambda,u)}$.

Supongamos que $\| y(x) \| \leqq a(x)$ en U_0. Entonces

$$\begin{aligned}\| A_\psi y(x) \| &\leqq \| y(g(x)) \| + \| \psi(x) - \phi(x) \| \\ &\quad + \| \phi(x) - \phi(x + y(x)) \| \leqq a(g(x)) + b_0(x) + \max_{x \in K} \| \phi'(x) \| a(x).\end{aligned}$$

Tomando en cuenta la condición (9) y las suposiciones acerca de ϕ y b_0, tenemos:

$$\begin{aligned}a(g(x)) &\leqq | a(g(x)) - a(f(x)) | \\ &\quad + a(f(x)) \leqq \omega(\| g(x) - f(x) \|) + \tfrac{1}{6}a(x) \leqq \omega(b_0(x)) + \tfrac{1}{6}a(x) \leqq \tfrac{1}{3}a(x)\end{aligned} \tag{12}$$

y como consecuencia

$$\| A_\psi y(x) \| \leqq a(x). \tag{13}$$

Supongamos ahora que $\| y(x) \| \leqq a(x)$ y $\| y'(x) \| \leqq \lambda_1 a(x)$ para $x \in U_0$ y examinemos $(A_\psi y)'$. Para cualquier j y m, con $1 \leqq j,\ m \leqq n$, tenemos

$$\begin{aligned}D_j^1(A_\psi y)_m(x) &= D_j^1 y_m(x + \psi(x))(1 + D_j^1\psi_j(x)) \\ &\quad + \textstyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n D_j^1 y_m(x + \psi(x)) D_j^1 \psi_i(x) + D_j^1 \psi_m(x) \\ &\quad - [D_j^1 \phi_m(x + y(x))(1 + D_j^1 y_j(x)) \\ &\quad + \textstyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n D_i^1 \phi_m(x + y(x)) D_j^1 y_i(x)].\end{aligned}$$

Agrupando los términos tenemos:

$$\begin{aligned}| D_j^1(A_\psi y)_m(x) | &\leqq \lambda_1 a(x + \psi(x))[| 1 + D_j^1\psi_j(x) | \\ &\quad + \textstyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n | D_j^1\psi_i(x) |] + | D_j^1\psi_m(x) - D_j^1\phi_m(x) | \\ &\quad + | D_j^1\phi_m(x) - D_j^1\phi_m(x + y(x)) | \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=1}^n | D_i^1\phi_m(x + y(x)) | \, | D_j^1 y_i(x) | .\end{aligned}$$

Hay que escoger el número λ_1 y la función continua b_1 de modo que se cumpla:

$$\lambda_1 > 9c_1 \tag{14}$$

$$b_1(x) \leqq \min\left\{\frac{1}{3n}, \left(\frac{1}{9}\lambda_1 - c_1\right)a(x)\right\} \quad \text{y} \quad b_1(x) > 0 \quad \text{para} \quad x \neq 0, \tag{15}$$

donde c_1 es una constante tal que $\| \phi''(x) \| \leqq c_1$ en K. Entonces para ψ tal que $\| \phi(x) - \psi(x) \| \leqq b_0(x)$ y $\| \phi'(x) - \psi'(x) \| \leqq b_1(x)$, teniendo en cuenta estimaciones de ϕ' en K, obtenemos

$$| D_j{}^1\psi_i(x) - D_j{}^1\phi_i(x) | \leqq b_1(x),$$

así que

$$| D_j{}^1\psi_i(x) | \leqq b_1(x) + | D_j{}^1\phi_i(x) | \leqq b_1(x) + \frac{1}{3n} \leqq \frac{2}{3n},$$

por eso

$$1 + \textstyle\sum_{i=1}^{n} | D_j{}^1\psi_i(x) | \leqq 1 + \frac{2}{3}.$$

Tomando además en cuenta (11) y (12) tenemos

$$| D_j{}^1(A_\psi y)_m(x) | \leqq \tfrac{1}{3}\lambda_1 a(x)(1 + \tfrac{2}{3}) + b_1(x) + c_1 a(x) + \tfrac{1}{3}\lambda_1 a(x) \leqq \lambda_1 a(x),$$

eso es

$$\| (A_\psi y)'(x) \| \leqq \lambda_1 a(x). \tag{16}$$

Para simplificar la notación hacemos las siguientes definiciones. Sea $(j_1, \cdots, j_k)$ un sistema de números $j_i \in \{1, \cdots, n\}$. Para $p \leqq k$, sea

$$I_p{}^k = \{(t_1, \cdots, t_p);\ t_1 < \cdots < t_p, \quad \text{con} \quad t_i \in \{1, \cdots, k\}\}.$$

Por cada $I = (t_1, \cdots, t_p) \in I_p{}^k$, definimos $\Sigma_I{}^{(m)}$ donde $m \in \{1, \cdots, p\}$, como la sumatoria desde $r_{t_m} = 1$ hasta m con $r_{t_m} \neq j_{t_m}$.

Fijemos ahora una sucesión $\{c_j\}$ de números reales positivos y una sucesión $\{U_j\}$ de vecindades del cero, tales que $U_j \subset U_{j-1}$ y $\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \{0\}$, en tal manera que $\| \phi^{(j+1)}(x) \| \leqq c_j$ en K y para cualquier sistema $(j_1, \cdots, j_k)$ como arriba, de modo que

$$\begin{aligned} &\textstyle\prod_{i=1}^{k} | 1 + D_{j_i}{}^1\psi_{j_i}(x) | + \sum_{p=1}^{k} \sum_{I\in I_p{}^k} \Sigma_I^{(1)} \cdots \\ &\quad \cdot \Sigma_I^{(p)} \prod_{h=1}^{p} | D_{j_{t_h}}{}^1\, \psi_{r_{t_h}}(x) | \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq t_h}}^{k} | 1 + D_{j_i}{}^1\psi_{j_i}(x) | \leqq 1 + \tfrac{2}{3} \end{aligned} \tag{17}$$

para $x \in U_{k-1}$. Para cualquier $k = 0, 1, \cdots$, se tiene $\overline{g(U_k)} \subset U_k$ (esto es posible por el Corolario 3 aplicado a la función g).

Definamos ahora la función b por la fórmula:

$$b(x) = \min\{b_0(x), b_1(x)\} \tag{18}$$

y examinemos $(A_\psi y)^{(k)}$ para $k \geqq 2$ y para ψ de clase C^∞ en U_0 tal que $\| \phi^{(\nu)}(x) - \psi^{(\nu)}(x) \| \leqq b(x)$ para $x \in U_{\nu-1}$ y para $\nu = 0, \cdots, k$. Se puede probar por inducción matemática la fórmula para la k-ésima derivada: $D_{j_1 \cdots j_k}{}^{(k)}(A_\psi y)_m$:

$$
\begin{aligned}
D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)}(A_\psi y)_m(x) &= D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} y_m(x+\psi(x)) \prod_{i=1}^{k} (1 + D_{j_i}{}^1 \psi_{j_i}(x)) \\
&+ \sum_{p=1}^{k} \sum_{I \in I_p{}^k} \sum_I^{(1)} \cdots \sum_I^{(p)} D_{j_1\cdots r_{t_1}\cdots r_{t_p}\cdots j_k}{}^{(k)} y_m(x+\psi(x)) \\
&\times \prod_{h=1}^{p} D_{j_{t_h}}{}^1 \psi_{r_{t_h}}(x) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq t_h}}^{k} (1 + D_{j_i}{}^1 \psi_{j_i}(x)) \\
&+ \sum_{p=1}^{k} \sum_{(t_1,\cdots,t_p)\in I_p{}^k} \sum_{\substack{r_{t_1}=1\\ r_{t_1}\neq j_{t_1}}}^{n} \cdots \sum_{\substack{r_{t_p}=1\\ r_{t_p}\neq j_{t_p}}}^{n} \\
&\cdot D_{j_1\cdots r_{t_1}\cdots r_{t_p}\cdots j_k}{}^{(k)} y_m(x+\psi(x)) \\
&\times \prod_{h=1}^{p} D_{j_{t_h}}{}^1 \psi_{r_{t_h}}(x) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq t_h}}^{k} (1 + D_{j_i}{}^1 \psi_{j_i}(x)) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} D_i{}^1 y_m(x+\psi(x)) D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} \psi_i(x) + D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} \psi_m(x) \\
&- \{ D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} \phi_m(x+y(x)) \prod_{i=1}^{k} (1 + D_{j_i}{}^1 y_{j_i}(x)) \\
&+ \sum_{p=1}^{k} \sum_{I \in I_p{}^k} \sum_I^{(1)} \cdots \sum_I^{(p)} D_{j_1\cdots r_{t_1}\cdots r_{t_p}\cdots j_k}{}^{(k)} \phi(x+y(x)) \\
&\times \prod_{h=1}^{p} D_{j_{t_h}}{}^1 y_{r_{t_h}}(x) \prod_{i=1}^{k} (1 + D_{j_i}{}^1 y_{j_i}(x)) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} D_i{}^1 \phi_m(x+y(x)) D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} y_i(x) \} \\
&+ W_k{}^1(\{D_{s_1\cdots s_i}{}^{(i)} y_m(x+\psi(x))\};\ \{D_{s_1\cdots s_i}{}^{(i)} \psi_j(x)\}) \\
&+ W_k{}^2(\{D_{s_1\cdots s_i}{}^{(i)} \phi_m(x+y(x))\};\ \{D_{s_1\cdots s_i}{}^{(i)} y_j(x)\}),
\end{aligned} \tag{19}
$$

con $i = 1, \cdots, k-1$; $j = 1, \cdots, r$; $s_h = 1, \cdots, n$ para $h = 1, \cdots, i$, donde $W_k{}^1$ y $W_k{}^2$ son polinomios convenientes que tienen las propiedades siguientes:

1°. en cada término del polinomio $W_k{}^1$ se encuentra como factor por lo menos una de las variables del primer grupo;

2°. en cada término del polinomio $W_k{}^2$ está como factor por los menos una variable del segundo grupo.

Usaremos las siguientes desigualdades:

$$
\begin{aligned}
&| D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} \psi_m(x) - D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} \phi_m(x+y(x)) \\
&\cdot \prod_{i=1}^{k} (1 + D_{j_i}{}^1 y_{j_i}(x)) | \leqq | D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} \psi_m(x) - D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} \phi_m(x) | \\
&+ | D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} \phi_m(x) - D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} \phi_m(x+y(x)) | \\
&+ | D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)} \phi_m(x+y(x)) |\ | 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 + D_{j_i}{}^1 y_{j_i}(x)) |
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\| \psi^{(k)}(x) \| \leqq \| \phi^{(k)}(x) \| + b(x) \quad \text{en} \quad U_{k-1}. \tag{21}
$$

Sea $y \in Z_{(\lambda,u)}$. Teniendo en cuenta las propiedades 1° y 2° de los polinomios W_k^t $(t = 1, 2)$ y que todas las derivadas sustituidas en estos polinomios en (19) tienen orden no mayor que $k - 1$, podemos estimar la k-ésima derivada parcial en U_{k-1} como sigue:

$$\begin{aligned}|D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)}(A_\psi y)_m(x)| &\leqq \lambda_k a(x+\psi(x))(1+\tfrac{2}{3}) + \lambda_1 a(x+\psi(x)) \\ &\cdot \textstyle\sum_{i=1}^n |D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)}\psi_i(x)| + b(x) + nc_k a(x) + c_{k-1}\omega_k(\lambda_1 a(x)) \\ &+ c_{k-1}\overline{\omega_k}(\lambda_1 a(x)) + \textstyle\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{3n}\lambda_k a(x) \\ &+ \overline{W_k}(\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,k-1}; \{c_i\}_{i=1,\ldots,k-1}; a(x), b(x))a(x).\end{aligned}$$

De (11), (12) y por la definición (18) de la función b, tenemos:

$$\begin{aligned}|D_{j_1\cdots j_k}{}^{(k)}(A_\psi y)_m(x)| \leqq{}& \tfrac{1}{3}(2+\tfrac{2}{3})\lambda_k a(x) + \frac{n}{3}\lambda_1 a(x)(c_{k-1}+b(x)) \\ &+ \tfrac{1}{3}a(x) + nc_k a(x) + c_{k-1}\bar{\bar{\omega}}_k(\lambda_1 a(x))a(x) + \bar{W}_k(\cdots)a(x)\end{aligned}$$

o sea

$$\|(A_\psi y)^{(k)}(x)\| \leqq \tfrac{1}{3}(2+\tfrac{2}{3})\lambda_k a(x) + \bar{\bar{W}}_k(\cdots)a(x),$$

donde ω_k, $\bar{\omega}_k$, $\bar{\bar{\omega}}_k$, $\bar{W}_k$, $\bar{\bar{W}}_k$ son polinomios convenientes de varias variables con coeficientes $\geqq 0$, y además $\bar{\omega}_k$ y $\bar{\bar{\omega}}_k$ no tienen término independiente. Ahora es suficiente escoger una constante λ_k de tal manera que

$$\lambda_k \geqq 9\bar{\bar{W}}_k(\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,k-1}; \{c_i\}_{i=1,\ldots,k-1}; a(x), b(x)) \quad \text{en} \quad U_{k-1} \tag{22}$$

y entonces obtenemos:

$$\|(A_\psi y)^{(k)}(x)\| \leqq \lambda_k a(x) \quad \text{en} \quad U_{k-1} \tag{23}$$

Las desigualdades (13), (16) y (23) implican que si ψ cumple la condición (4), con la función b definida por la fórmula (18), entonces $A_\psi(Z_{(\lambda,u)}) \subset Z_{(\lambda,u)}$, así que $A_\psi(\overline{Z_{(\lambda,u)}}) \subset \overline{Z_{(\lambda,u)}}$. Esto significa que el operador A_ψ tiene un punto fijo en el conjunto $\overline{Z_{(\lambda,u)}}$, es decir, existe una función y continua en U_0, que satisface la ecuación (5) con $\|y(x)\| \leqq a(x)$. Por el teorema de Arzelá, la función y es de clase C^k en U_{k+1}, pues es el límite de la sucesión de funciones y_ν de clase C^{k+1} tales que $y_\nu{}^{(k+1)}$ cumplen la condición de Lipshitz con una constante común, localmente en U_{k+1}. Mostramos finalmente que y es de clase C^∞.

Consideremos la sucesión de los conjuntos $A_h = g^h(U_0)$. La sucesión $g^h \rightrightarrows 0$ uniformemente en U_0 ((11), (18) y lema 6), entonces $\{A_h\}$ es una sucesión de vecindades del cero que converge a $\{0\}$. Sea h_0 un número natural tal que para $h \geqq h_0$, $A_h \subset U_1 \cap g^{-1}(U_1)$. Si derivamos la ecuación (5) en $U_1 \cap g^{-1}(U_1)$, obtenemos:

$$D_j^1 y_m(x) = D_j^1 y_m(x + \psi(x))(1 + D_j^1 \psi_j(x))$$
$$+ \textstyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^n D_i^1 y_m(x + \psi(x)) D_j^1 \psi_i(x) + D_j^1 \psi_m(x) - D_j^1 \phi_m(x + y(x))$$
$$\cdot\ (1 + D_j^1 y_j(x)) - \textstyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^n D_i^1 \phi_m(x + y(x)) D_j^1 y_i(x)$$

para j, $m = 1, \cdots, n$ y para $x \in U_1 \cap g^{-1}(U_1)$. Si fijamos un j cualquiera obtenemos n ecuaciones con n incógnitas $D_j^1 y_m(x)$; $m = 1, \cdots, n$:

$$D_j^1 y_m(x)[1 + D_m^1 \phi_m(x + y(x))] + \textstyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^n D_i^1 \phi_m(x + y(x)) D_j^1 y_i(x)$$
$$= D_j^1 y_m(x + \psi(x))(1 + D_j^1 \psi_j(x)) + \textstyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^n D_i^1 y_m(x + \psi(x)) D_j^1 \psi_i(x) \tag{24}$$
$$+ D_j^1 \psi_m(x) - D_j^1 \phi_m(x + y(x)), \qquad m = 1, \cdots, n.$$

El determinante de este sistema de ecuaciones tiene la forma:

$$\Delta(x) = \tag{25}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 + D_1^1 \phi_1(x + y(x)) & D_2^1 \phi_1(x + y(x)) & \cdots D_n^1 \phi_1(x + y(x)) \\ D_1^1 \phi_2(x + y(x)) & 1 + D_2^1 \phi_2(x + y(x)) & \cdots D_n^1 \phi_2(x + y(x)) \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ D_1^1 \phi_n(x + y(x)) & \cdots & \cdots 1 + D_n^1 \phi_n(x + y(x)) \end{pmatrix}$$

La definición de U_0 implica que para $x \in U_0$, $x + y(x) \in K$ y como $\|\phi'(x)\| \leqq \frac{1}{3n}$ en K, entonces $|D_j^1 \phi_m(x + y(x))| \leqq \frac{1}{3n}$ en U_0. Podemos entonces aplicar el siguiente teorema conocido de la teoría de determinantes:

TEOREMA. *Sea $A = (a_{ij})$ una matrix $n \times n$ tal que $|a_{ij}| \leqq \frac{1}{3n}$ para todo par de índices $i, j = 1, \cdots, n$. Entonces* $\det(I + A) \neq 0$.

Esto significa que $\Delta \neq 0$ en U_0, es decir, si $h \geqq h_0 + 1$ y y es una función de clase C^r en A_h, entonces y es una función de clase C^∞ en A_{h_0}. Esto termina con la demostración del teorema principal.

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO, MÉXICO, D. F.
MÉXICO

REFERENCIAS

[1] G. F. BIELICKY, *Ecuaciones funcionales y equivalencia local de funciones de clase C en cero* (en ruso), Mat. Sb. **91** (1973), 565–579.

[2] T. C. KUO, *Normal forms of local difeomorphisms on the real line*, Duke Math. J., **35** (1968), 549–555.

[3] S. STERNBERG, *On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space—II*, Amer. J. Math., **80** (1958), 623-631.

[4] F. TAKENS, *Partially hyperbolic fixed points*, Topology **10** (1971), 133–147.

[5] M. E. PLIŚ, *Ecuaciones funcionales y equivalencia de difeomorfismos*, Mem. III. Simposio México-Estados Unidos de Ecuaciones Diferenciales, Fondo de Cultura Económica, México (1976).