Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 33 No. 1, 1988

ALGUNAS CLASES EN $bu^*(bu)$

Por JUAN JULIÁN RIVADENEYRA PÉREZ

Introducción

Sea bu el BU-espectro conectivo. El objetivo de estas notas será el establecer la conducta homotópica y homológica del morfismo de enlace en la torre conectiva de bu (Proposición (3) y Teorema (5)). Como una aplicación de lo anterior daremos una demostración del teorema de Adams acerca de la imagen de $H_*(bu)$ en $H_*(bu : Q)$.

Recordemos (ver [2]) que bu es un espectro anillo conmutativo con unidad y que existe una clase de homotopía β en $\pi_2(bu)$ tal que $\pi_*(bu)$ es el anillo de polinomios en β con coeficientes en $\mathbf{Z}$.

Definición (1). *Sean b la composición de morfismos*

$$\Sigma^2 bu = S^2 \wedge bu \xrightarrow{\beta \wedge I} bu \wedge bu \xrightarrow{\mu} bu$$

y $b^n = b^n \,\bar{\circ}\, ^1 \Sigma^{2n-2} b$; donde I denota el morfismo identidad, μ el producto de bu y $n \geq 1$.

Es fácil ver que b^m lleva la $2m$-suspensión de β^n, $\sigma^{2m}\beta^n$, a la clase β^{n+m} para $n, m \geq 0$. Además si consideramos la sucesión de homotopía de la sucesión de Puppe de b encontramos que existe la siguiente cofibración

2) $$\Sigma^2 bu \xrightarrow{b} bu \longrightarrow H$$

donde H es el espectro de Eilenberg Mac Lane.

En los siguientes párrafos desarrollamos una generalización de 2).

Sea p un número primo. Ya que el orden de $H^m(H)$ es primo a p si $0 < m <$ $2p - 2$ (ver [5]) tenemos que $H^m(H : \mathbf{Z}_{(p)})$ es trivial para esos m. Localizando 2) en p y tomando la $H^*(\ : \mathbf{Z}_{(p)})$-sucesión exacta de la cofibración resultante, vemos que existen clases de cohomología g_m en $H^{2m}(bu\mathbf{Z}_{(p)} : \mathbf{Z}_{(p)})$, tales que $g_m \circ b^m = \sigma^{2m} g_0$ para $m = 0, \ldots, p-2$; donde g_0 es la clase fundamental de $bu\mathbf{Z}_{(p)}$.

Sea $g = \bigvee_0^{p-2} g_m$

$$bu\mathbf{Z}_{(p)} \xrightarrow{g} \bigvee_0^{p-2} \Sigma^{2m} H\mathbf{Z}_{(p)}.$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{2p-2} bu\mathbf{Z}_{(p)} \arrow[r, "b^{p-1}"] & bu\mathbf{Z}_{(p)} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[dl, "\phi"] \\ & \bigvee_0^{p-2} \Sigma^{2m} H\mathbf{Z}_{(p)} & \end{tikzcd}$$

donde C es el cono de b^{p-1} y ϕ es una extensión de g.

La siguiente proposición (compare con §5 de [1]) nos da una idea de la conducta homotópica de b^{p-1}.

PROPOSICIÓN (3). *Sea p un número primo, entonces la siguiente sucesión es una cofibración.*

$$\Sigma^{2p-2} bu\mathbf{Z}_{(p)} \xrightarrow{b^{p-1}} bu\mathbf{Z}_{(p)} \xrightarrow{g} \bigvee_0^{p-2} \Sigma^{2i} H\mathbf{Z}_{(p)}.$$

Demostración. Probaremos que ϕ induce in isomorfismo entre $\pi_*(C)$ y $\pi_*(D)$, donde

$$D = \bigvee_0^{p-2} \Sigma^{2i} H\mathbf{Z}_{(p)},$$

entonces, por la versión estable del teorema de Whitehead, podremos concluir que ϕ es una equivalencia de espectros.

Ya que b_*^{p-1} es un isomorfismo entre $\pi_n(\Sigma^{2p-2} bu\mathbf{Z}_{(p)})$ y $\pi_n(bu\mathbf{Z}_{(p)})$ para $n \geq 2p-2$, vemos que $\pi_n(C)$ es trivial para $n \geq 2p-2$ y, obviamente, lo mismo es cierto para $\pi_n(D)$. Además $g_{m*}(\beta^n) = 0$ si $n \neq m$ ó es un $\mathbf{Z}_{(p)}$-generador de $\pi_{2n}(\Sigma^{2n} H\mathbf{Z}_{(p)})$ si $n = m$. Entonces, ya que g induce isomorfismos en dimensiones $\leq 2p-3$, tenemos que sucede lo mismo con ϕ. Esto concluye la demostración del teorema 3.

Ahora analizaremos la conducta homológica de b^{p-1}. Primero vemos un caso especial.

LEMA (4). *El homomorfismo*

$$(b^{p-1})^* : H^{2p-2}(bu : \mathbf{Z}_p) \longrightarrow h^{2p-2}(\Sigma^{2p-2} bu : \mathbf{Z}_p)$$

es trivial.

Demostración. La sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z} \xrightarrow{\rho} \mathbf{Z}_p \longrightarrow 0$$

induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
H^{2p-2}(bu\mathbf{Z}_p : \mathbf{Z}_p) & \longrightarrow & H^{2p-2}(bu : \mathbf{Z}_p) & \longrightarrow & 0 \\
\Big\downarrow (b^{p-1}\mathbf{Z}_p)^* & & \Big\downarrow (b^{p-1})^* & & \\
H^{2p-2}(\Sigma^{2p-2}bu\mathbf{Z}_p : \mathbf{Z}_p) & \longrightarrow & H^{2p-2}(\Sigma^{2p-2}bu : \mathbf{Z}_p) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

los renglones del cual son exactos. Entonces $(b^{p-1})^*$ es trivial si $(b^{p-1}\mathbf{Z}_p)^*$ lo es. Probaremos que este es el caso por reducción al absurdo. ‡

Supongamos que $(b^{p-1}\mathbf{Z}_p)^*$ no es trivial, entonces existe una clase x en $H^{2p-2}(bu\mathbf{Z}_p : \mathbf{Z}_p)$ tal que

$$x \circ b^{p-1}\mathbf{Z}_p = \sigma^{2p-2} g_0$$

donde g_0 es la clase fundamental de $bu\mathbf{Z}_p$. Esta x induce un isomorfismo entre $\pi_{2p-2}(bu\mathbf{Z}_p)$ y $\pi_{2p-2}(\Sigma^{2p-2}H\mathbf{Z}_p)$, entonces el cono C de gVx, donde g denota la reducción módulo p de aquella en el teorema 3, es $2p$ conexo. Esto es imposible ya que si $L = S^{2p+1}/\mathbf{Z}_p$ es el espacio lente, entonces tendríamos la siguiente sucesión exacta

$$\widetilde{bu\mathbf{Z}_p^2}(L) \longrightarrow \widetilde{E^2}(L) \longrightarrow \widetilde{C^2}(L)$$

donde $E = \bigvee_{0}^{p-1} \Sigma^{2i} H\mathbf{Z}_p$, pero $\widetilde{C}^2(L) = 0$ pues la dimensión de L es $2p+1$ y $\Sigma^2 C$ es $2p+2$ conexo, además $\widetilde{E}^2(L)$ es la suma directa de p copias de $\mathbf{Z}_p$ y $\widetilde{bu\mathbf{Z}_p^2}(L) \cong KU(L) \otimes \mathbf{Z}_p$ es la suma directa de $p-1$ copias de $\mathbf{Z}_p$ (ver [4]). Ésta es una contradicción y con ella concluimos la demostración del lema 4.

TEOREMA (5). *El homomorfismo*

$$(b^{p-1})^* : H^*(bu : \mathbf{Z}_p) \longrightarrow H^*(\Sigma^{2p-2}bu : \mathbf{Z}_p)$$

es trivial.

Demostración. Por la definición de b^{p-1} tenemos que

‡ Este argumento es de Luis Astey.

$$\mu(\beta^{p-1} \wedge I) = b^{p-1}$$

donde I es el morfismo identidad de bu y μ es el producto de bu. Entonces

$$b^{p-1} \circ (I \wedge \xi) = \mu(\beta^{p-1} \wedge I) \circ (I \wedge \xi) = \mu(\beta^{p-1} \wedge \xi) = \beta^{p-1}$$

donde ξ es la unidad de bu. Por 3) tenemos que $(\beta^{p-1})^*$, el homomorfismo inducido en $H^*(\ :\mathbf{Z}_p)$ es trivial y por el teorema de coeficientes universales tenemos lo mismo para $(\beta^{p-1})_*$.

Para finalizar consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H_{2p-2}(S^{2p-2} : \mathbf{Z}_p) \otimes H_{n-2p+2}(bu : \mathbf{Z}_p) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dd, "\beta_*^{p-1} \otimes I"] & H_n(S^{2p-2} \wedge bu : \mathbf{Z}_p) \arrow[dr, "b_*^{p-1}"] \arrow[dd, "(\beta^{p-1} \wedge I)_*"] & \\
& & H_n(bu : \mathbf{Z}_p) \\
H_{2p-2}(bu : \mathbf{Z}_p) \otimes H_{n-2p+2}(bu : \mathbf{Z}_p) \arrow[r] & H_n(bu \wedge bu : \mathbf{Z}_p) \arrow[ur, "\mu_*"] &
\end{tikzcd}$$

donde el isomorfismo está dado por el teorema de Kunneth. Del diagrama vemos que $b_*^{p-1} = 0$ y entonces $(b^{p-1})^* = 0$. Esto completa la demostración del teorema 5.

Como una aplicación de lo anterior damos una demostración de un teorema de Adams. (ver [3]).

TEOREMA (6). *La imagen de $H_*(bu)$ en $H_*(bu : Q)$ está generada por*

$$\beta^r / m(r)$$

para $r \geq 0$, donde $m(r) = \Pi p^{\alpha_p}$, α_p es la parte entera de $r/p-1$ y el producto corre en la colección de los números primos p.

Demostración. Sea g_r un generador de la parte libre de $H_{2r}(bu)$. Probaremos que existen enteros q_r tales que

$$\mathcal{H}(\beta^r) = P^{\alpha p} q_r g_r$$

para cada $r \geq 0$ y cada primo p, donde $\mathcal{H}$ denota el homomorfismo de Hurewicz y q_r es primo a p.

Si $r = s(p-1) + t$ con $0 \leq t < p-1$ entonces b^r es la composición

$$\Sigma^{2r}bu \xrightarrow{b^t} \Sigma^{2s(p-1)}bu \xrightarrow{b^{p-1}} \Sigma^{2(s-1)(p-1)}bu \xrightarrow{b^{p-1}} \cdots \xrightarrow{b^{p-1}} \Sigma^{2(p-1)}bu \xrightarrow{b^{p-1}} bu$$

donde b^i denota una suspensión de b^i también. Entonces

$$\mathcal{H}(\beta^r) = \mathcal{H}(b^{s(p-1)} \circ b^t \beta^0) = b_*^{s(p-1)} \circ b_*^t(g_0)$$

pues $\mathcal{H}(\beta^0) = g^0$ y $\mathcal{H}$ es natural

Completamos la demostración mediante los siguientes dos lemas:

LEMA (7). *Existe un entero λ_t tal que*

$$b_*^t g_0 = \lambda_t g_t$$

y λ_t es primo a p.

LEMA (8). *Existe un entero q_s tal que*

$$b_*^{p-1}(\sigma^{2p-2}g_s) = pq_s\, g_{s+p-1}$$

y q_s es primo a p.

Demostración del lema (7). Es claro que $\lambda_t \neq 0$. La sucesión exacta de homología de (2) y el hecho de que $H_j(H)$ no tiene p-torsión si $j \leq 2p-3$ nos llevan a ver que $b_*(\sigma^2 g_{j-1})$ es un múltiplo de g_j, el cual es primo a p, para $j < p-1$. Entonces, por inducción concluimos que

$$b_*^t(\sigma^{2t}g_0) = b_*(b_*^{t-1}\sigma^{2t}g_0)$$

es un múltiplo, primo a p, de g_t.

Demostración del lema (8). Dualizando en 5) obtenemos que

$$b_*^{p-1} : H_*(\Sigma^{2p-2}bu : \mathbf{Z}_p) \longrightarrow H_*(bu : \mathbf{Z}_p)$$

es trivial, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
H_*(\Sigma^{2p-2}bu) & \xrightarrow{p} & H_*(\Sigma^{2p-2}bu) & \longrightarrow & H_*(\Sigma^{2p-2}bu : \mathbf{Z}_p) \\
\downarrow b_*^{p-1} & & \downarrow b_*^{p-1} & & \downarrow 0 \\
H_*(bu) & \xrightarrow{p} & H_*(bu) & \longrightarrow & H_*(bu : \mathbf{Z}_p)
\end{array}$$

donde p denota el homomorfismo 'multiplicación por p'. De este diagrama deducimos que

$$(b^{p-1})_*(\sigma^{2p-2} g_s) = p q_s g_{s+p-1}$$

para algún entero q_s. Además, de la proposición (3) obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Sigma^{2p-2} bu) \arrow[r] \arrow[d, "b_*^{p-1}"] & H_*(\Sigma^{2p-2} bu : \mathbf{Z}_{(p)}) \arrow[d, "b_*^{p-1}"] \\
H_*(bu) \arrow[r] & H_*(bu : \mathbf{Z}_{(p)}) \arrow[d] \\
& H_*(\bigvee_{0}^{p-2} \Sigma^{2i} H : \mathbf{Z}_{(p)})
\end{tikzcd}$$

Usando la exactitud de la columna más larga y el hecho de que $H_*(H)$ no tiene elementos de orden p^2 concluimos que q_s es primo a p.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
IZTAPALAPA
MÉXICO, D.F. 09340 MÉXICO

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL IPN
APARTADO POSTAL 14-740
MÉXICO, D.F. 07000 MÉXICO

REFERENCIAS

[1] J.F. ADAMS, *On Chern characters and the structure of the unitary group*. Proc. Camb. Phil. Soc. **57** (1961), 199.
[2] ———, *Stable homotopy and generalized homology*. Univ. of Chicago. Lecture Notes, 1971, 152-154.
[3] ———, *Chern characters revisited*. Illinois J. Math. **17** (1973), 333-336.
[4] T. KAMBE, *The structure of K-rings of the lens space and their applications*. J. Math, Soc. Japan **18** (1966), 136.
[5] J. P. SERRE, *Groupes d' homotopie et classes de groupes abeliens*, Ann. Math. **58** (1953), 268-288.