Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 35 No. 1, 1990

COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN DE HILBERT-SAMUEL VÍA EXPLOSIONES

POR CONCEPCIÓN ROMO SANTOS

1. Introducción

Este trabajo está dedicado al estudio del comportamiento de la función de Hilbert-Samuel de una variedad algebroide mediante transformaciones monoidales.

i) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica arbitraria $Z_1, \ldots, Z_c$, $W_1, \ldots, W_d$ indeterminadas sobre K con $c + d = n$ y $R = K[[Z_1, \ldots, Z_c, W_1, \ldots, W_d]] = K[[\underset{\sim}{Z}, \underset{\sim}{W}]]$ el anillo de series de potencias formales en las indeterminadas $Z_1, \ldots, Z_c$, $W_1, \ldots, W_d$ con coeficientes en K.

Llamaremos variedad algebroide sumergida en K^{c+d} a $V(I) = \operatorname{Spec}(K[[Z_1, \ldots, Z_c, W_1, \ldots, W_d]]/I)$ siendo I un ideal radical cualquiera de $K[[\underset{\sim}{Z}, \underset{\sim}{W}]]$.

Si I es un ideal regular, diremos que la variedad algebroide correspondiente $V(I)$ es una variedad algebroide regular.

ii) Sea θ un anillo local de ideal maximal m y cuerpo residual K. Sea H_θ la función de Hilbert-Samuel de θ, es decir H_θ es la aplicación $H_\theta : \mathbf{Z}_0 \longrightarrow \mathbf{Z}$ definida por:

$$H_\theta(n) = \sum_{j=0}^{n} \dim_k (m^j/m^{j+1}) = \operatorname{long}_\theta (\theta/m^n)$$

Se escribirá entonces

$$H^{(-1)}(n) = H(n) - H(n-1) = \Delta H(n)$$

$$H^{(+1)}(n) = \sum_{i=0}^{n} H(i)$$

$$H^{(+1)(\pm 1)} = H^{(+(1\pm 1))}$$

y así se puede definir $H^{(d)}$, $\forall$ entero d.

iii) Sea X una variedad algebroide de anillo de coordenadas θ, $\theta = K[[Z_1, \ldots, Z_c, W_1, \ldots, W_d]]/J$. Podemos escribir $\theta = K[[Z_1', \ldots, Z_c', W_1', \ldots, W_d']]$, $Z_i' = Z_i + J$, $i = 1, \ldots, c$; $W_j' = W_j + J$, $j = 1, \ldots, d$. Utilizaremos entonces la siguiente notación

$$H_X = H_{K[[Z_1', \ldots, Z_c', W_1', \ldots, W_d']]}.$$

iv) Sea $R = K[[Z_1, \ldots, Z_c, W_1, \ldots, W_d]]$ con $c + d = n$. Sean Y, X dos variedades algebroides sumergidas en K^n, de ideales de definición P, J con $J \subset P$ y $P = (W_1, \ldots, W_d)R$.

Consideremos la explosión $Bl_{P/J}(R/J)$ y la proyección $\pi : Bl_{P/J}(R/J) \longrightarrow \text{Spec}\,(R/J)$.

En estas condiciones escribiremos:

$$C_{X,Y} = \text{Spec}\,(\,\text{gr}_Y\,(X)) = \text{Spec}\,(\,\text{gr}_{P/J}(R/J))$$

y diremos que $C_{X,Y}$ es el cono normal de X a lo largo de Y.

Sea ahora M el ideal maximal de R/J y 0 el punto cerrado correspondiente a este ideal maximal, entonces la fibra de $C_{X,Y}$ en este punto será:

$$C_{X,Y}(0) = \text{Spec}\,\left(\bigoplus_{n\geq 0}(P/J)^n \Big/ M(P/J)^n\right) = \text{Spec}\,(K[\overline{W}_1, \ldots, \overline{W}_d])$$

con $\overline{W}_i = \text{in}_{M(P/J)}(W_i + J)$.

iv) En las condiciones de iii) se verifica que:

iv-a) El fibrado proyectivo asociado a $C_{X,Y}$ es Proj $(\text{gr}_{P/J}\,(R/J) = \pi^{-1}(Y)$.

iv-b) El fibrado proyectivo asociado a $C_{X,Y}(0)$ es

$$\text{Proj}\,(K[\overline{W}_1, \ldots, \overline{W}_d]) = \pi^{-1}(0),$$

$\overline{W}_i = \text{in}_{M(P/J)}(W_i + J)$ (véase Romo [5], 2-3-5).

v) Dado θ' transformado monoidal de $\theta = R/J$ con centro P/j, $\pi^{-1}(0)$ está definido en θ' por el ideal $(W_1 + J, Z_1 + J, \ldots, Z_c + J)\theta'$ (véase Romo [5], 2-4-3).

TEOREMA (1). *Con las notaciones anteriores, si X es una variedad normalmente plana a lo largo de Y e Y es una variedad regular, se verifica que:*

$$H_{X'} \leq H_X$$

con X' la variedad transformada de X mediante una transformación monoidal de centro P.

Demostración. Sabemos que si A es un anillo local, H_A es la función de Hilbert-Samuel de A con respecto a su ideal maximal, entonces para todo entero positivo l

$$H_A^{(l)} = H_{A'}$$

donde $A' = A[[t_1, \ldots, t_l]]$ y $\{t_1, \ldots, t_l\}$ son variables independientes.

Luego en nuestro caso $H_X^{(l)} = H_{X \times K^l}$ donde $K^l = \text{Spec}\,(K[[t_1, \ldots, t_l]])$ y $X \times K^l$ indica el producto fibrado.

Demostraremos el teorema si comprobamos:

i) $H_X = H_{C_{X,Y}(0)}^{(+C)}$ con $c = \dim Y$

ii) $H_{C_{X,Y}(0)} \geq H_{\pi^{-1}(0)}^{(+1)}$

iii) $H_{\pi^{-1}(0)}^{(+C+1)} \geq H_{X'}$

Demostración de i). Al ser la variedad X normalmente plana a lo largo de Y la sucesión siguiente es exacta

$$T_Y \longrightarrow C_X \longrightarrow C_{X,Y}(0) \quad \text{(véase Giraud [2, cap. II,2-2]}$$

y como T_Y es un espacio vectorial se tiene el isomorfismo

$$C_X \approx T_Y \times C_{X,Y}(0)$$

y por lo tanto

$$H_X = H^{(+C)}_{C_{X,Y}(0)} \quad \text{con } c = \dim Y$$

Demostración de ii). Al ser $\pi^{-1}(0)$ el fibrado proyectivo asociado a $C_{X,Y}(0)$, ii) será consecuencia inmediata del siguiente lema.

LEMA (2). *Sean $G = K[t_1, \ldots, t_n]$, $I \subset G$ un ideal homogéneo, $u_i = t_i/t_1$, $i = 2, \ldots, n$, $A = K[u_2, \ldots, u_n]$. Sea I' el ideal*

$$I' = \left\{ \frac{f}{t_1^d} | f \in I_d \right\}$$

donde I_d es la parte homogénea de grado d de I.

Entonces se verifica

$$H^{(-1)}_{G/I,(1,0,\ldots,0)} \geq H_{A/I',(u_2=\cdots=u_n=0)}$$

donde

$$\begin{aligned} H^{(-1)}_{G/I,(1,0,\ldots,0)}(m) &= \operatorname{long}_K (G/I)_m \\ H_{A/I',(u_2=\cdots=u_n=0)}(m) &= \operatorname{long}_K (A(m)/I'A(m)) \\ A(m) &= A/(u_2, \ldots, u_n)^{m+1}A. \end{aligned}$$

Véase demostración del lema en Hironaka [3], lema 4-8.

Demostración de iii). Sabemos que $\pi^{-1}(0)$ está definido por un ideal generado por $c+1$ elementos, luego para demostrar iii) bastará con aplicar $c+1$ veces el lema siguiente

LEMA (3). *Sea A un anillo local noetheriano, M su ideal maximal, $K = A/M$, $Z \in M$. Si $B = A/ZA$ se verifica que*

$$H^{(+1)}_B \geq H_A.$$

Véase demostración del lema en Hironaka [3], lema 4-7.

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

REFERENCIAS

[1] B. M. BENNET, *On the characteristic functions of a local ring*, Ann. of Math. **91**(1970).

[2] J. GIRAUD, *Etude locale des singularités*, Cours de 3ème cycle, 1971-72, Université París.

[3] H. HIRONAKA, *Introduction to the theory of infinitely near singular points*, Memorias de Matemáticas del Instituto Jorge Juan. C.S.I.C. Madrid, 1974.

[4] M. LEJEUNE-JALABERT ET B. TEISSIER, *Quelques calculs utiles pour la resolution des singularités*, Ecole Polytechnique. París, 1972.

[5] C. ROMO SANTOS, *Resolución de singularidades de variedades algebroides sobre un cuerpo de característica cualquiera*, Tesis doctoral, Departamento de Algebra, Universidad Complutense, Madrid, (1976).

[6] ———, *Resolución de singularidades de variedades algebroides sobre un cuerpo de característica cualquiera*, Monografías y Memorias de Matemáticas X, Instituto Jorge Juan, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1977.