Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 35 No. 2, 1990

CATEGORÍA DÉBIL Y HOMOLOGÍA*

POR JUAN JULIÁN RIVADENEYRA PEREZ

1. Introducción

Los conceptos de categoría de Lusternik-Schnirelmann, cat X; de categoría débil, wcat X y de longitud, long X, de un espacio topológico X pueden ser definidos paralelamente (ver 2.1 abajo) y ellos satisfacen las siguientes relaciones

$$\operatorname{long} X \leq \operatorname{wcat} X \leq \operatorname{cat} X.$$

Por su definición y por las relaciones anteriores se puede pensar a long X como la primera aproximación de tipo homológico a los invariantes homotópicos wcat X y cat X.

Existen espacios X (ver 6.17 de [2]) para los cuales cat X – wcat X es tan grande como se quiera, también se han publicado ejemplos (ver [5]) que distinguen a long X de wcat X, en éstos se tiene (con la notación presente) que wcat $X - \operatorname{long} X = 1$. .

Respecto a lo anterior llaman la atención dos problemas:

Problema 1. Encontrar la mejor cota superior, que puede ser infinito, de los números wcat X – long X, donde X es cualquier *CW* complejo finito.

Problema 2. Establecer condiciones necesarias y/o suficientes para que se tenga la igualdad cat X = long X.

El único motivo para mencionar el primer problema, ya que no se tratará aquí, es el de llamar la atención hacia él, pues no existe literatura que le concierna explícitamente.

En lo referente al segundo problema se tiene el siguiente resultado de carácter general, que es el único en su género (ver [1]).

TEOREMA. (Bernstein-Schwarz). *Si X es un CW complejo finito con dimensión n, entonces* $\operatorname{cat} X = n+1$ *si y sólo si* $\operatorname{long} X = n+1$.

Por otra parte existe un resultado de Bernstein y Ganea (ver 4.2 abajo ó [3]) donde se dan condiciones suficientes que aseguran la igualdad entre wcat X y cat X. En este artículo se usará la teoría homotópica de obstrucción para establecer condiciones suficientes para que wcat X y long X sean iguales. Haciendo compatibles las hipótesis en el trabajo de Bernstein y Ganea con las del aquí desarrollado se obtendrán resultados en la dirección del problema 2.

---

* 1980 A.M.S. Subject Clasification: 55M30, 55S37

2. Generales

Todo lo que sigue se ubica en el universo de los CW complejos conexos localmente finitos y los mapeos continuos entre ellos, también la conmutatividad de un diagrama o la trivialidad de un mapeo, se entenderá que se satisfacen hasta homotopía.

Sean X un espacio topológico, $* \in X$ y X^n el producto cartesiano de n copias de X. En la siguiente definición se hará referencia al diagrama

$$\begin{tikzcd}
T^nX \arrow[r, "\iota"] & X^n \arrow[r, "\rho"] & X^{(n)} \\
& X \arrow[ul, dashed] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\tilde{\Delta}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde: $T^nX = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i = * \text{ para alguna } i\} \subset X^n$, ι es la inclusión, $X^{(n)}$ es el cono de ι, ρ es la inclusión de X^n, Δ es el mapeo diagonal y $\tilde{\Delta} = \rho \circ \Delta$

Definición 2.1

a) La categoría de X es el mínimo n para el cual existe algún mapeo que hace conmutativo el triángulo de la izquierda.

b) La categoría débil de X es el mínimo de los n para los cuales el mapeo $\tilde{\Delta}$, también llamado diagonal, es trivial.

c) La longitud singular de X es el mínimo n donde el mapeo $\tilde{\Delta}$ induce el homomorfismo cero en los grupos de cohomología singular, con cualquier grupo de coeficientes, de X.

Observaciones

1. Las relaciones expuestas en la introducción son una consecuencia de que el renglón en el diagrama anterior es una cofibración.

2. Tradicionalmente (ver [5] ó [6] por ejemplo) se ha definido a 'long X' como el mayor número de factores que dan un producto no trivial en la cohomología singular de X. Entonces el número 'long$X$' en 1.c) es una unidad más grande que aquel 'long$X$' definido en [5] y [6]. Realmente los tres invariantes definidos en 2.1 difieren en uno de los que se trabajaban en [5].

La herramienta fundamental a lo largo de este artículo es la torre conectiva de un espacio simplemente conexo Y, ésta no es otra cosa que la sucesión de fibraciones que se obtienen al factorizar, con el método de Moore y Postnikov, al mapeo $\{*\} \to Y$. Para un tratamiento general de las factorizaciones de Moore-Postnikov se recomienda ver [11] y [9]. Enseguida se plantearán las ideas fundamentales de la torre conectiva de un espacio simplemente conexo Y.

Si Y es un espacio simplemente conexo entonces la torre conectiva de Y es la siguiente sucesión de fibraciones principales, donde $K(G, n)$ denotará un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo (G, n).

$$\begin{tikzcd}
 & & K(\pi_m, m) \arrow[d, leftarrow, "\theta_m"'] & & \\
\cdots \arrow[r] & Y_m \arrow[r, "P_m"] & Y_{m-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_2 \arrow[r, "P_2"] & Y_1 \\
 & K(\pi_m, m-1) \arrow[u, "i_m"] & & & &
\end{tikzcd}$$

donde $Y_1 = Y$, $\pi_m = \pi_m(Y)$, Y_m es m-conexo y P_m induce un isomorfismo entre los grupos de homotopía de dimensión mayor que m. Cada θ_m se conoce como una clase característica de la torre.

Observe que si Y es $\ell - 1$ conexo entonces $Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_{\ell-1}$.

Si X es un espacio con dimensión $|X| = n$, entonces un mapeo $X \xrightarrow{f} Y$ es trivial si y sólo si existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & Y_n \arrow[d, "P_{2,n}"] \\
X \arrow[ur] \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

donde $P_{ij} = P_i \circ \cdots \circ P_j$, si $i \leq j$; esta situación se expresa diciendo que f tiene un levantamiento hasta el n-ésimo piso de la torre.

Suponga ahora que long $X = \ell$, entonces el mapeo diagonal $X \xrightarrow{\tilde{\Delta}} X^{(\ell)}$ induce el homomorfismo cero en cohomología singular y por lo tanto una condición suficiente para que exista un levantamiento de $\tilde{\Delta}$ hasta el n-ésimo piso de la torre de $X^{(\ell)}$ es que las clases características $\theta_3, \ldots, \theta_n$ provengan de $X^{(\ell)}$, es decir que existan clases θ_i' tales que $\theta_i = P_{2,i-1}^* \theta_i'$ para $i = 3, \ldots, n$.

3. La Torre Conectiva de $X^{(\ell)}$

En esta sección se establecen dos resultados (teoremas 1 y 4) donde se asegura que, en cierto rango, las clases características de la torre conectiva de $X^{(\ell)}$ provienen de $X^{(\ell)}$. En cierto sentido ellos son complementarios uno del otro.

El primer resultado se deriva de la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN (3.1). *Si un mapeo $K(G, m) \to K(H, n)$, con $m + 1 < n < 2m$, no es trivial, entonces existe algún número primo p tal que $G \otimes H \otimes \mathbb{Z}_p \neq 0$ y $2(p-1) \leq n - m$.*

Demostración: Es bien conocido que un mapeo no trivial $K(G, m) \to K(H, n)$ representa una clase distinta de cero en $H^n(K(G, m) : H)$. Descomponiendo a G y H en "p-grupos cíclicos" (Σ_i y S_j respectivamente) se obtiene que

$$H^n(K(G,m):H) \cong \bigoplus_{j=1}^{\ell} H^n(K(\Sigma_1,m)\times\cdots\times K(\Sigma_k,m):S_j)$$

entonces, por el teorema de Künneth y la condición de que $n < 2m$, se puede afirmar que existe un grupo no trivial de la forma $H^n(K(\Sigma_i,m):S_j)$. Además, por el teorema de Hurewicz "módulo $\mathcal{C}$" (ver capítulo 9 de [9]), deben existir números p, a y b tales que $\Sigma_i = \mathbf{Z}_{p^a}$ y $S_j = \mathbf{Z}_{p^b}$. Si $b = 1$, la condición $m+1 < n < 2m$ y por los trabajos de Cartan y Serre, (ver [4] y [8]) se puede asegurar que $2(p-1) \leq n-m$.

La demostración del caso general $b \geq 1$ se completa inductivamente usando la sucesión exacta de Bockstein asociada a la sucesión de coeficientes

$$0 \to \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_{p^b} \to \mathbf{Z}_{p^{b-1}} \to 0.$$

Sea $\mathcal{C}_p$ la clase de los grupos abelianos finitos de orden primo a p. Otra referencia para la teoría de clases de grupos abelianos es [7].

TEOREMA (3.2). *Sean ℓ y n dos números naturales con $\ell < n < 2\ell$. Si X es un espacio tal que $H_i(X:\mathbf{Z}) \in \mathcal{C}_p$ para $1 \leq i \leq max\,\{1, \frac{n-2(p-2)}{\ell} - 1\}$, donde p es cualquier primo no mayor que $\frac{n-\ell+1}{2}+1$, entonces las clases características de la torre conectiva de $X^{(\ell)}, \theta_3, \ldots, \theta_n$ provienen de $X^{(\ell)}$.*

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre $k = n-\ell$ haciendo referencia al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & K(\pi_n,n) & & & & \\
\cdots \arrow[r] & X^{(\ell)}_{n-1} \arrow[r, "P_{n-1}"] \arrow[ur, "\theta_n"] & X^{(\ell)}_{n-2} \arrow[u, "\tilde{\theta}_n"'] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X^{(\ell)}_{m} \arrow[r] \arrow[ull, "\tilde{\tilde{\theta}}_n"'] & X^{(\ell)}_{m-1} \arrow[r] \arrow[ulll, "\theta'_n"'] & \cdots \\
 & K(\pi_{n-1},n-2) \arrow[u, "i_{n-1}"] & & & K(\pi_m,m-1) \arrow[u, "i_m"] & &
\end{tikzcd}$$

Si $k = 1$, $n-2 = \ell - 1$ y por hipótesis $H_1(X:\mathbf{Z}) \in \mathcal{C}_2$, entonces por los teoremas de Künneth y de "Whitehead mod $\mathcal{C}_2$," $\pi_i(X^{(\ell)}) \in \mathcal{C}_2$ para $i \leq 2\ell - 1$. En particular $\pi_{n-1} \in \mathcal{C}_2$ y por la proposición 3.1, $\theta_n \circ i_{n-1}$ es trivial y de la $H^*(\ :\pi_n)$-sucesión exacta (de Serre) de la fibración P_{n-1} se puede concluir que existe algún $\tilde{\theta}_n$ que hace conmutativo el diagrama anterior.

Si $k > 1$, suponga que $\theta_n = \tilde{\tilde{\theta}}_n \circ P_{m+1,n-1}$. Si p es un primo tal que $2(p-1) \leq n-m+1$, entonces $p \leq \frac{n-\ell+1}{2}+1$, pues $m \geq \ell$ y de las hipótesis se deduce fácilmente que $\pi_m \in \mathcal{C}_p$, luego, de la proposición 3.1, $\tilde{\tilde{\theta}}_n \circ i_m$ es trivial y por la $H^*(\ :\pi_n)$-sucesión exacta de P_m se puede concluir que existe θ'_n tal que $\tilde{\tilde{\theta}}_n = P^*_m\theta'_n$, y $\theta_n = \theta'_n \circ P_{m,n-1}$. Si se continua así, se llega a que θ_n proviene de $X^{(\ell)}$. La demostración se concluye usando las hipótesis de inducción.

COROLARIO (3.3). *Con las hipótesis del teorema anterior, el homomorfismo de Hurewicz de $X^{(\ell)}$ es inyectivo hasta dimensión n.*

Demostración. Ya que $\theta_{\ell+1}$ es el inverso del isomorfismo de Hurewicz del espacio $X^{(\ell)}_{\ell+i-1}$ y como también viene desde $X^{(\ell)}$, entonces debe existir un homomorfismo σ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\pi_{\ell+i}(X^{(\ell)}_{\ell+i-1}) & \xleftarrow{\theta_{l+i}} & H_{\ell+i}(X^{(\ell)}_{\ell+i-1} : \mathbb{Z}) \\
\cong\Big\downarrow \alpha=(P_{2,\ell+i-1})_* & & \Big\downarrow \beta=(P_{2,\ell+i-1})_* \\
\pi_{\ell+i}(X^{(\ell)}) & \xleftarrow{\sigma} & H_{\ell+i}(X^{(\ell)} : \mathbb{Z})
\end{array}$$

luego β es inyectivo y en consecuencia el homomorfismo de Hurewicz de $X^{(\ell)}$, que es la composición $\beta \circ \theta^{-1}_{\ell+i} \circ \alpha^{-1}$, es inyectivo. Se concluye así la demostración del corolario.

Si se considera la $\mathcal{A}_p$-estructura de $H^*(Y : \mathbb{Z}_p)$ se pueden obtener resultados que complementan al teorema (1). Los argumentos que siguen son válidos para cualquier primo. Ellos se darán para el primo 2, principalmente porque en el ejemplo que se da al final únicamente aparece 2-torsión.

En lo que resta de esta sección; $\mathcal{A}^*$, $H_*(X)$ y $H^*(X)$ denotarán el álgebra de Steenrod, la homología y la cohomología de X con coeficientes $\mathbb{Z}_2$.

Sea Y un espacio $\ell - 1$ conexo tal que $H_*(Y : \mathbb{Z})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$ en el rango $1 \leq i \leq a$ $(a > 1)$. Sean

$$H^i(Y) = \bigoplus_{j<i} \quad \text{y} \quad H^{i,*}(Y) = \mathcal{A}^*(H^i(Y)/\mathcal{A}H^i(Y)).$$

Entonces $H^{i,*}(Y)$ es un $\mathcal{A}$-módulo.

Definición. (3.4). Si $x_1, \ldots, x_r$ es una $\mathbb{Z}_2$-base de $H^{i,0}(Y)$ entonces: $n_i(Y) = \min\{n | \exists a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{A}^{n+1}$ no todos cero, tales que $\Sigma a_j x_j = 0$ en $H^{i,*}(Y)\}$.

LEMA (3.5). *El número $n_i = n_i(Y)$ no depende de la base que se use en su definición.*

Demostración. La demostración es fácil.

LEMA (3.6). *El homomorfismo $P_{\ell *} : H_i(Y_\ell : \mathbb{Z}) \to H_i(Y : \mathbb{Z})$ es inyectivo si $i \leq \min\{n_\ell + \ell - 1, 2\ell - 1\}$.*

Demostración. De la definición de n_ℓ y de la H^*-sucesión exacta de la fibración $Y_\ell \to Y$ se deduce que $H^{j-1}(\pi_\ell, \ell - 1) \xrightarrow{\tau^*} H^j(Y)$ es 1 a 1 si $j \leq n_\ell + \ell$ y entonces, dualizando, $H_j(Y) \to H_{j-1}(\pi_\ell, \ell - 1)$ es sobre en el mismo rango, esto equivale a que $H_j(Y_\ell) \to H_j(Y)$ es inyectivo si $j \leq n_\ell + \ell - 1$. Por el teorema de coeficientes universales y lo anterior se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 0 \\ & & & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_i(Y_\ell : \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & H_i(Y_\ell) \\ & & \downarrow{\scriptstyle P_{\ell*} \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle P_{\ell*}} \\ 0 & \longrightarrow & H_i(Y : \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & H_i(Y) \end{array}$$

Entonces, como $H_j(Y_\ell : \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \cong H_j(Y_\ell : \mathbb{Z})$ y $H_j(Y : \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \cong H_j(Y : \mathbb{Z})$, se puede concluir que $P_{\ell*} : H_j(Y_\ell : \mathbb{Z}) \to H_j(Y : \mathbb{Z})$ es 1 a 1 en el rango señalado. Esto completa la demostración.

Ahora ya se puede exponer el segundo resultado importante de la sección.

TEOREMA (3.7). *Si Y es $\ell - 1$ conexo, $k < \ell$ y $n_{\ell+i} \geq k - i + 1$ para $0 \leq i < k$, entonces el homomorfismo de Hurewicz de Y es inyectivo en dimensiones no mayores que $\ell + k$. Además las primeras $\ell + k$ clases características de la torre conectiva vienen desde Y.*

Demostración. Se dará un argumento inductivo sobre k.

i) Sea $k = 1$, en este caso $i = 0$ y $n_\ell \geq 2$. Del lema (3.6) se sigue que $H_{\ell+1}(Y_\ell : \mathbb{Z}) \xrightarrow{P_{\ell*}} H_{\ell+1}(Y : \mathbb{Z})$ es 1 a 1 y por lo tanto el homomorfismo de Hurewicz, $\pi_{\ell+1}(Y) \simeq \pi_{\ell+1}(Y_\ell) \simeq H_{\ell+1}(Y_\ell : \mathbb{Z}) \xrightarrow{P_{\ell*}} H_{\ell+1}(Y : \mathbb{Z})$, es un monomorfismo.

ii) Sea $k > 1$. Por el lema (3.6) se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^{i-1}(\pi_\ell, \ell - 1) \longrightarrow H^i(Y) \longrightarrow H^i(Y_\ell) \longrightarrow 0$$

para $i \leq n_\ell + \ell - 1$ y entonces

$$H^{i,*}(Y) \cong H^{i,*}(Y_\ell)$$

como $\mathcal{A}$-módulos, en un rango conveniente de dimensiones de $\mathcal{A}$, para $i \leq n_\ell + \ell - 1$. Poniendo $m_{\ell+1+i} = n_{\ell+1+i}(Y_\ell)$ se obtiene que $m_{\ell+1+i} \geq k - i$ para $1 \leq i + 1 \leq k$, es decir

$$m_{\ell+1+i} \geq k - i \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq k - 1$$

Además recuerde que $H_*(Y_\ell : \mathbb{Z})$ es un $\mathbb{Z}_2$-módulo si $* \leq n_\ell + \ell + 1$, luego Y_ℓ satisface las hipótesis inductivas y por lo tanto se puede concluir que el homomorfismo de Hurewicz, para Y_ℓ, es 1 a 1 en dimensiones no mayores que $\ell + 1 + k - 1 = \ell + k$. Entonces el homomorfismo de Hurewicz de Y es inyectivo, ya que es la composición de inyecciones, en el rango señalado. Esto concluye la demostración de la primera parte del teorema.

Para la segunda parte recuérdese que $\theta_{\ell+j}$ es el inverso del homomorfismo de Hurewicz $\pi_{\ell+j}(Y_{\ell+j-1}) \to H_{\ell+j}(Y_{\ell+j-1} : \mathbb{Z})$, entonces, como $H_{\ell+j}(Y : \mathbb{Z})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$ y el homomorfismo de Hurewicz $\pi_{\ell+j}(Y) \to$

$H_{\ell+j}(Y : \mathbb{Z})$ es 1 a 1, éste debe tener un inverso por la izquierda σ. Entonces $\theta_{\ell+j} = (P_{2,\ell+j-1})_*^{-1} \cdot \sigma \cdot (P_{2,\ell+j-1})_* = \hom((P_{2,\ell+j-1})_*, 1)((P_{2,\ell+j-1})_*^{-1} \cdot \sigma)$. Esto equivale a que $\theta_{\ell+j}$ viene desde Y. Se concluye así la demostración del teorema.

4. Longitud y categoría débil

Ahora se utilizarán los resultados de la sección anterior para establecer condiciones que aseguren la igualdad entre wcat X y long X.

TEOREMA (4.1). *Sea X un CW complejo finito con dimensión n y longitud ℓ y supóngase que $H_i(X : \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}_p$ para $1 \leq i \leq \max\{1, \frac{n-2(p-2)}{\ell} - 1\}$ donde p es cualquier primo menor o igual a $\frac{n-\ell+1}{2} + 1$. Entonces* wcat $X =$ long X.

Demostración. Por la definición de longitud se tiene que $H^*(X^{(\ell)} : G) \xrightarrow{\tilde{\Delta}^*} H^*(X : G)$ es trivial para cada G y entonces, por el teorema (3.2), $\tilde{\Delta}$ tiene un levantamiento hasta el n-ésimo piso de la torre conectiva de $X^{(\ell)}$ y como $|X| = n$, se concluye que $\tilde{\Delta}$ es trivial. Esto concluye la demostración del teorema (4.1).

El siguiente resultado (ver [3]) permitirá dar soluciones (ver (4.3) y (4.5)) al problema 2 de la introducción.

TEOREMA (4.2). (Bernstein-Ganea). *Sea X un CW complejo finito, $k-1$ conexo con dimension $|X| \leq (\ell+1)k - 2$ $(k \geq 2)$. Si* wcat $X \leq \ell$ *entonces* cat $X \leq \ell$.

COROLARIO (4.3). *Sea X un CW complejo finito $k-1$ conexo con dimensión n y longitud ℓ. Supóngase además que*: i) $n \leq (\ell+1)k - 2$ $(k \geq 2)$ *y que* ii) $H_i(X : \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}_p$ *para* $1 \leq i \leq \max\{1, \frac{n-2(p-2)}{2} - 1\}$, *donde p es cualquier primo no mayor que* $\frac{n-\ell+1}{2} + 1$. *Entonces* cat $X =$ long X.

Demostración. Por el teorema (4.1) y las condiciones en ii) se puede asegurar que wcat $X =$ long X. Además, las hipótesis en i) y el teorema de Bernstein y Ganea permiten afirmar que cat $X =$ wcat $X =$ long X, lo que termina la demostración.

Ahora suponga que $H_i(X : \mathbb{Z})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$ para $1 \leq i \leq \alpha - 1$. Entonces $\bar{H}^*(X^{(\ell)} : \mathbb{Z})$ es un $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial en dimensiones $\leq \ell\alpha - 1$.

TEOREMA (4.4). *Sea X un CW complejo finito, $k-1$ conexo, con longitud ℓ y dimensión $|X| = n \leq \ell\alpha - 1$. Supóngase que $n_i = n_i(X^{(\ell)}) \geq n - i + 1$ para $\ell k \leq i \leq n$. Entonces* wcat $X =$ long X.

Demostración. La demostración se sigue fácilmente del teorema 3.7.

COROLARIO (4.5). *Sea X un CW complejo finito $k-1$ conexo con longitud ℓ y dimensión $|X| = n \leq min\{\ell\alpha - 1, (\ell+1)k - 2\}$. Si $n_i(X^{(\ell)}) \geq n - i + 1$ para $\ell k \leq i \leq n$, entonces* long $X =$ cat X.

Demostración. Los argumentos son parecidos a los dados en la demostración de 4.3.

Ejemplo. Sea X la variedad de Stiefel $O(12,7) = O(12)/O(7)$. X es 6-conexo y del capítulo IV de [10] se sabe que $\bar{H}^*(X)$ está generado por las clases $[m] \in H^{m-1}(X)$, $8 \le m \le 12$, sujetas a las relaciones

$$[m][m] = \begin{cases} [2m-1] & \text{si } 2m-1 \le 12 \\ 0 & \text{si } 2m-1 > 12 \end{cases}$$

y el producto no trivial con mayor número de factores es $U = [8]\cdots[12]$, por lo tanto long $X = 6$ y por dualidad de Poincaré, $|X| = 45$.

Además, aplicando el hecho de que $\mathrm{sq}^i[m] = \binom{m-1}{i}[m+i]$ puede mostrarse que $n_{42} \ge 4$, $n_{43} \ge 3$ y $n_{44} \ge 2$ y por 4.5 se tiene que cat $X =$ long $X = 6$.

Los argumentos son un tanto engorrosos pero accesibles, por ejemplo:

Si $x_i = P_i^*[8]$; $y_i = P_i^*[9] = \mathrm{sq}^1 x_i$; $z_i = P_i^*[10] = \mathrm{sq}^2 x_i$, $w_i = P_i^*[11] = \mathrm{sq}^3 x_i$ y $v_i = P_i^*[12] = \mathrm{sq}^4 x_i$, $1 \le i \le 6$, donde P_i es la proyección de X^n sobre el i-ésimo factor y se tiene que:

$$\mathrm{sq}^1(x_1\cdots x_6) = \Sigma y_i(x_1\cdots x_6)_i \neq 0,$$

donde $(x_1,\ldots,x_n)_{k\ell\cdots}$ denota el producto de las x_t para $t \neq k, \ell, \cdots$.

$$\mathrm{sq}^2(x_1\cdots x_6) = \Sigma z_i(x_1\cdots x_6)_i + \Sigma y_i y_j(x_1\cdots x_6)_{ij} \neq 0$$

$$\alpha\mathrm{sq}^3(x_1\cdots x_6) + \beta\mathrm{sq}^2\mathrm{sq}^1(x_1\cdots x_6) = \alpha\Sigma w_i(x_1\cdots x_6)_i + (\alpha+\beta)\Sigma y_i z_j(x_1\cdots x_6)_{ij}$$
$$+(\alpha+\beta)\Sigma y_i y_j y_k(x_1\cdots x_6)_{ijk} = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ y por lo tanto } \beta = 0.$$

$$\alpha\,\mathrm{sq}^4(x_1\cdots x_6) + \beta\,\mathrm{sq}^3\,\mathrm{sq}^1(x_1\cdots x_6) = \alpha(\Sigma v_i(x_1\cdots x_6)_i + \Sigma z_i z_j(x_1\cdots x_6)_{ij} +$$
$$\Sigma z_i y_j y_k(x_1\cdots x_6)_{ijk} + \Sigma y_i y_j y_k y_\ell(x_1\cdots x_6)_{ijk\ell}) + (\alpha+\beta)\Sigma w_i y_j(x_1\cdots x_6)_{ij} = 0$$
$$\Rightarrow \alpha = 0 \text{ y por lo tanto } \beta = 0.$$

Ya que el homomorfismo $H^*(X^{(6)}) \to H^*(X^6)$ es mono, se puede concluir que $n_{42} \ge 4$.

Comentarios. 1. El principal objetivo al emprender este trabajo fue el aplicar la teoría homotópica de obstrucción para estudiar el problema 2 y los resultados obtenidos son satisfactorios. Ahora lo que parece conveniente e interesante es el desarrollar métodos para calcular los números $n_i(X^{(\ell)})$.

2. Observe que en la sección 4 no se argumenta trascendentalmente respecto al mapeo diagonal. Parece natural esperar que con esto se obtendrán resultados mejores.

3. Con la definición de long X que se da aquí, este número aparece como un invariante estable, aspecto que no se percibe con la definición tradicional.

4. De todo lo anterior parece natural el estudio de la conducta estable del mapeo $X \xrightarrow{\tilde{\Delta}} X^{(\ell)}$, donde ℓ es la longitud de X.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
APDO. POSTAL 55-534, C.P. 09340

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
PUEBLA, PUE. MÉXICO

REFERENCIAS

[1] I. BERSTEIN, *The Lusternik-Schnirelmann category of the Grassmanians*, Math. Proc. Cambridge **79**(1976) 129-134.

[2] ——— AND T. GANEA, *Homotopical nilpotency*, Illinois J. Math. **5** (1961) 99-130.

[3] ———, *On the homotopy-commutativity of suspensions*, Illinois J. Math. **6** (1962) 336-340.

[4] H. CARTAN, Seminaire H. Cartan 1954-1955, París.

[5] W. J. GILBERT, *Some examples for weak category and conilpotency*, Illinois J. Math. **12** (1968) 421-432.

[6] I. M. JAMES, *On category in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978) 331-349.

[7] R. E. MOSHER AND M. C. TANGORA, Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper and Row, New York, 1968.

[8] J. P. SERRE, *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane*, Comm. Math. Helv. **27** (1953) 198-231.

[9] E. H. SPANIER, Algebraic Topology, McGraw-Hill, New York, 1966.

[10] N. STEENROD AND D. B. A. EPSTEIN, Cohomology Operations, Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton: 1962.

[11] E. THOMAS, Seminar on fibre spaces. *Lecture Notes in Mathematics*, **13** Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.