Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 35 No. 2, 1990

LA TRANSFORMACIÓN INTEGRAL DE HANKEL-SCHWARTZ DE ORDEN ARBITRARIO Y LA IGUALDAD MIXTA DE PARSEVAL

A.M. SÁNCHEZ QUINTANA Y J.M.R. MÉNDEZ PÉREZ

1. Introducción

La transformación integral de Bessel o de Hankel-Schwartz

$$(B_\mu f)(y) = F(y) = \int_0^\infty x^{1+2\mu} b_\mu(xy) f(x)\,dx, \tag{1}$$

donde $b_\mu(z) = z^{-\mu} J_\mu(z)$ ($J_\mu(x)$ representa la función de Bessel de primera especie y orden μ) es una solución de la ecuación diferencial

$$\Delta_{\mu,x} b_\mu(xy) + y^2 b_\mu(xy) = 0, \tag{2}$$

simbolizando $\Delta_{\mu,x}$ el operador

$$\Delta_{\mu,x} = \Delta_\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1+2\mu}{x}\frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

fue estudiada clásicamente por Schwartz [10] y ha sido extendida a espacios de distribuciones por Dube y Pandey [2], Lee [4], Schuitman [9] y Altenburg [1], cuando el parámetro $\mu \geq -1/2$. Recientemente, Méndez [6] extiende la transformación (1) a cierto espacio de distribuciones de crecimiento lento para todo valor real de μ siguiendo la técnica descrita por Zemanian en [13]. Mas los métodos usuales en la literatura consultada para extender la transformación (1) a espacios de distribuciones presentan algunos inconvenientes, siendo los más corrientes o bien que la generalización no respeta las reglas de derivación de una distribución y el producto de ésta por una función regular, o bien que la transformación clásica no es un caso particular de la transformación generalizada. Por ello, en [7] y [8] se propone un nuevo procedimiento para extender transformaciones integrales del tipo Hankel ([3] y [11,p.456]) a espacios de funciones generalizadas, pero sólo bajo la restricción $\mu \geq -1/2$. Dicho procedimiento se basa en la existencia de una igualdad de Parseval que involucra dos transformadas integrales, denominada por esta causa igualdad mixta de Parseval.

El objetivo de este trabajo es definir la transformación (1) en un espacio de distribuciones para cualquier valor real de μ, mejorando los resultados conocidos en la literatura sobre este tema. A tal fin, se considera junto a (1) esta otra transformación:

$$(B^*_\mu g)(y) = G^*(y) = \int_0^\infty x^{-1-2\mu} b^*_\mu(xy) g(x)\,dx, \tag{4}$$

en cuyo núcleo comparece la función

$$b^*_\mu(xy) = (xy)^{1+2\mu} b_\mu(xy), \tag{5}$$

la cual satisface la ecuación diferencial (2), con Δ_μ reemplazado por Δ_μ^*, su operador adjunto, esto es,

$$\Delta_{\mu,x}^* = \Delta_\mu^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1+2\mu}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1+2\mu}{x^2} \tag{6}$$

La transformación B_μ^* es autorrecíproca cuando $\mu \geq -1/2$, es decir, $(B_\mu^*)^{-1} = B_\mu^*$. Esto fue probado en [5], donde se establece también el siguiente

TEOREMA (1). *Sea $\mu \geq -1/2$. Supongamos que $x^{\mu+1/2}f(x)$ e $y^{-\mu-1/2}G^*(y)$ son funciones absolutamente integrables en $(0,\infty)$. Si $F(y) = (B_\mu f)(y)$ y $g(x) = (B_\mu^{*-1}G^*)(x) = (B_\mu^* G^*)(x)$, se tiene:*

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \int_0^\infty F(y)G^*(y)dy = \int_0^\infty (B_\mu f)(y)(B_\mu^* g)(y)dy \tag{7}$$

Obsérvese que la ecuación (7) no tiene función peso alguna e involucra las dos transformaciones (1) y (4).

Con frecuencia utilizaremos las fórmulas

$$D_y[y^{2\mu}b_\mu(xy)] = y^{2\mu-1}b_{\mu-1}(xy); \quad D_y b_\mu(xy) = -yx^2 b_{\mu+1}(xy) \tag{8}$$

En este trabajo seguimos la notación y terminología de A.H. Zemanian [14]

2. El espacio de funciones prueba H y la transformación de Hankel-Schwartz B_μ de orden arbitrario

En esta sección enunciamos algunas definiciones y resultados conocidos, para futura referencia. Más información se puede hallar, por ejemplo, en [1] y [6].

H es el espacio de todas las funciones complejas $\varphi(x)$ infinitamente diferenciables definidas sobre el intervalo real $I = (0,\infty)$ tal que

$$\gamma_{m,n}\varphi(x) = \sup_{x\in I} |x^m(x^{-1}D)^n\varphi(x)|$$

existe para cada par de enteros no negativos m y n. La topología de H es la inducida por la familia de seminormas $\{\gamma_{m,n}\}$. H es un espacio de Fréchet. H' es el espacio dual de H y sus elementos son funciones generalizadas de crecimiento lento.

PROPOSICIÓN (1). *Para todo $\mu \in \mathbf{R}$, las siguientes operaciones definen aplicaciones lineales y continuas de H en sí mismo:*

(i) $\varphi(x) \to M_2\varphi(x) = x^2\varphi(x) \quad (M_\lambda\varphi(x) = x^\lambda\varphi(x))$

(9) (ii) $\varphi(x) \to P_\mu\varphi(x) = x^{-2\mu-1}Dx^{2\mu+2}\varphi(x)$

(iii) $\varphi(x) \to \Delta_\mu\varphi(x)$, definido anteriormente.

(10) (iv) $\varphi(x) \to T\varphi(x) = x^{-1}D\varphi(x)$.

Además, esta última aplicación es un automorfismo sobre H, cuyo operador inverso es:

$$T^{-1}\varphi(x) = \int_{\infty}^{x} t\varphi(t)dt, \quad \varphi \in H \tag{11}$$

Nótese que los operadores definidos en (9) y (10) tienen adjuntos en H dados por

$$P_{\mu}^{*}\varphi(x) = -x^{2\mu+2}Dx^{-2\mu-1}\varphi(x) \tag{12}$$

$$T^{*}\varphi(x) = -Dx^{-1}\varphi(x) \tag{13}$$

Si A es un operador lineal y continuo en H, usando la dualidad entre H y H', podemos definir un operador generalizado A^{*} en H' mediante

$$\langle A^{*}f(x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), A\varphi(x)\rangle, \quad f \in H', \quad \varphi \in H.$$

Este A^{*} es también lineal y continua de H' en sí mismo. Haciendo esta construcción con los operadores de la Proposición (1), obtenemos operadores generalizados M_{μ}^{*}, P_{μ}^{*}, Δ_{μ}^{*}, T^{*} en H' lineales y continuos, siendo el último de ellos un automorfismo sobre H'.

Sea ahora μ cualquier número real fijado y elíjase un entero positivo r tal que $\mu + r \geq -1/2$. Introducimos en H los operadores

$$(B_{\mu,r}\varphi)(y) = \phi(y) = (-1)^{r}B_{\mu+r}((x^{-1}D)^{r}\varphi(x))(y), \quad \varphi \in H, \tag{14}$$

y

$$(B_{\mu,r}^{-1}\phi)(x) = \varphi(x) = (-1)^{r}(T^{-1})^{r}B_{\mu+r}(\phi(y))(x), \quad \phi \in H. \tag{15}$$

TEOREMA (2). *Sea μ cualquier número real y denote r un entero positivo tal que $\mu + r \geq -1/2$. Entonces, la transformación $B_{\mu,r}$, definida por* (14), *es un automorfismo sobre H cualquiera que sea el valor real de μ. La correspondiente transformación inversa $B_{\mu,r}^{-1}$ viene dada por* (15). *Finalmente, $B_{\mu,r}$ coincide sobre H con la transformación de Hankel-Schwartz B_{μ}, dada por* (1), *cuando $\mu \geq -1/2$.*

Finalmente, resumimos las principales reglas operacionales de la transformación $B_{\mu,r}$:

PROPOSICIÓN (2). *Sea μ cualquier número real fijado y sea r un entero positivo tal que $\mu + r \geq -1/2$. Para todo $\varphi \in H$ se tiene*:

$$\begin{array}{lcl}
B_{\mu,r}(P_{\mu}\varphi) = y^{2}B_{\mu+1,r}\varphi & ; & P_{\mu}(B_{\mu+1,r}\varphi) = B_{\mu,r}(x^{2}\varphi) \\
\Delta_{\mu}(B_{\mu,r}\varphi) = B_{\mu,r}(-x^{2}\varphi) & ; & B_{\mu,r}(\Delta_{\mu}\varphi) = -y^{2}B_{\mu,r}(\varphi) \\
B_{\mu+1,r}(T\varphi) = -B_{\mu,r}\varphi & ; & T(B_{\mu,r}\varphi) = -B_{\mu+1,r}\varphi.
\end{array}$$

3. El espacio de funciones prueba H_μ y la transformación de Hankel-Schwartz B_μ^* de orden arbitrario

Para todo $\mu \in \mathbb{R}$, H_μ es el espacio de Fréchet de todas las funciones complejas infinitamente diferenciables $\psi(x)$ definidas sobre I, dotado de la topología engendrada por la colección de seminormas

$$(16) \qquad \gamma_{m,k}^{\mu}(\psi) = \sup_{x\in I} |x^m(x^{-1}D)^k x^{-2\mu-1}\psi(x)| = \gamma_{m,k}(x^{-2\mu-1}\psi(x)) < \infty$$

H'_μ denota el espacio dual de H_μ y sus elementos también son funciones generalizadas de crecimiento lento.

Se pueden establecer resultados análogos a los de la Proposición (1):

PROPOSICIÓN (3). *Para todo $\mu \in \mathbb{R}$, se tiene:*

(i) $\psi(x) \to M_2\psi(x)$ *es un isomorfismo de H_μ en $H_{\mu+1}$.*

(ii) $\psi(x) \to P_\mu^*\psi(x)$ *es un isomorfismo de H_μ en $H_{\mu+1}$, siendo el operador inverso*

$$P_\mu^{*-1}\psi(x) = x^{2\mu+1}\int_x^\infty t^{-2\mu-2}\psi(t)dt$$

(iii) $\psi(x) \to T^*\psi(x)$ *es una aplicación lineal y continua de $H_{\mu+1}$ en H_μ.*

(iv) $\psi(x) \to \Delta_\mu^*\psi(x)$ *es una aplicación lineal y continua de H_μ en sí mismo.*

Recurriendo ahora, como en la anterior sección, a la dualidad entre los espacios H_μ y H'_μ, resulta que los operadores generalizados M_2^* y P_μ son isomorfismos del espacio $H'_{\mu+1}$ en H'_μ, mientras que T es una aplicación lineal y continua de H'_μ en $H'_{\mu+1}$ y Δ_μ una aplicación lineal y continua de H'_μ en sí mismo.

A continuación se consideran los operadores:

$$(17) \qquad (B_{\mu,r}^*\psi)(y) = \Psi(y) = y^{-2r}B_{\mu+r}^*[P_{\mu+r-1}^*\cdots P_{\mu+1}^*P_\mu^*\psi(x)$$

y

$$(18) \qquad (B_{\mu,r}^{*-1}\Psi)(x) = \psi(x) = P_\mu^{*-1}P_{\mu+1}^{*-1}\cdots P_{\mu+r-1}^{*-1}B_{\mu+r}^*[y^{2r}\Psi(y)]$$

TEOREMA (3). *Sean μ un número real arbitrario y r un entero positivo tal que $\mu + r \geq -1/2$. La transformación $B_{\mu,r}^*$ definida por (17) es un automorfismo sobre H_μ, independientemente del valor de μ. La correspondiente fórmula de inversión viene dada por el operador $B_{\mu,r}^{*-1}$ descrito en (18). Finalmente, $B_{\mu,r}^*$ coincide sobre H_μ con la variante de la transformación de Hankel dada por (4) cuando $\mu \geq -1/2$.*

Demostración. La aplicación sucesiva de los operadores P_μ^*, $P_{\mu+1}^*$, ... y $P_{\mu+r-1}^*$ lleva $\psi(x) \in H_\mu$ al espacio $H_{\mu+r}$ donde, al ser $\mu + r \geq -1/2$, es lícito utilizar la transformación $B_{\mu+r}^*$. En efecto, de (16) se infiere que la aplicación

$\varphi(x) \in H \to \psi(x) = M_{2\lambda+1}\varphi(x) \in H_\lambda$ (con $\lambda = \mu + r$) es un isomorfismo entre los espacios H y H_λ; y de la relación existente, a tenor de las definiciones (1) y (4), entre las transformaciones B_λ y B_λ^*:

$$(B_\lambda^*\psi)(y) = y^{2\mu+1}B_\lambda(x^{-2\mu-1}\psi)(y), \quad \psi \in H_\lambda,$$

se colige que B_λ^* es un automorfismo sobre H_λ, puesto que B_λ es un automorfismo sobre el espacio H por el Teorema 2. En virtud de estas consideraciones y de la Proposición 3, (i) y (ii), se infiere la primera parte del aserto.

Supongamos que $\mu \geq -1/2$ y que $r = 1$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
(B_{\mu,1}^*\psi)(y) =& y^{-2}B_{\mu,1}^*(P_\mu^*\psi) = -y^{-2}\int_0^\infty xb_{\mu+1}^*(xy)Dx^{-2\mu-1}\psi(x)dx \\
=& -y^{2\mu+1}\int_0^\infty x^{2\mu+2}b_{\mu+1}(xy)Dx^{-2\mu-1}\psi(x)dx \\
=& -y^{2\mu+1}\left\{[xb_{\mu+1}(xy)\psi(x)]_0^\infty - \int_0^\infty x^{2\mu+1}b_\mu(xy)x^{-2\mu-1}\psi(x)dx\right\} \\
=& \int_0^\infty x^{-2\mu-1}b_\mu^*(xy)\psi(x)dx = (B_\mu^*\psi)(y),
\end{aligned}$$

tras integrar por partes, tener en cuenta (8) y comprobar que los términos entre corchetes se anulan. Luego, $B_{\mu,1}^* = B_\mu^*$. El caso general $B_{\mu,r}^* = B_\mu^*$ cuando $\mu \geq -1/2$ sigue por inducción sobre r.

Nota 1. Las definiciones (17) y (18) son independientes del entero positivo r. Desde este momento, y en virtud del Teorema 3, nos referiremos al operador $B_{\mu,r}^*$ como la transformación de Hankel-Schwartz de orden arbitrario μ.

A continuación se resumen las principales reglas operacionales de la transformación $B_{\mu,r}^*$:

PROPOSICIÓN (4). *Sea μ un número real cualquiera fijado y elíjase un entero positivo r tal que $\mu + r \geq -1/2$. Si $\psi \in H_\mu$ se tiene*

$$(19) \qquad B_{\mu+1,r}^*(P_\mu^*\psi) = y^2B_{\mu,r}\psi \quad ; \quad P_\mu^*B_{\mu,r}^*\psi = B_{\mu+1,r}^*(x^2\psi)$$

$$(20) \qquad \Delta_\mu^*B_{\mu,r}^*\psi = B_{\mu,r}^*(-x^2\psi) \quad ; \quad B_{\mu,r}^*(\Delta_\mu^*\psi) = -y^2B_{\mu,r}^*\psi$$

En cambio, si $\psi \in H_{\mu+1}$ resulta

$$(21) \qquad B_{\mu,r}^*(T^*\psi) = B_{\mu+1,r}^*\psi \quad ; \quad T^*(B_{\mu+1,r}^*\psi) = -B_{\mu,r}^*\psi$$

Demostración. Para verificar la primera de las fórmulas (19) obsérvese que, según (17),

$$B^*_{\mu+1,r}(P^*_\mu\psi) = y^{-2r}B_{\mu+1+r}\left[P^*_{\mu+r}\dots P^*_{\mu+2}P^*_{\mu+1}(P^*_\mu\psi)\right]$$
$$= -y^{2\mu+3}\int_0^\infty x^{2\mu+2r+2}b_{\mu+r+1}(xy)D\left\{x^{-2\mu-2r-1}P^*_{\mu+r-1}\dots P^*_{\mu+1}P^*_\mu\psi\right\}dx$$
$$= -y^{2\mu+3}\left\{\left[xb_{\mu+r+1}(xy)P^*_{\mu+r-1}\dots P^*_{\mu+1}P^*_\mu\psi\right]_0^\infty\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty b_{\mu+r}(xy)P^*_{\mu+r-1}\dots P^*_{\mu+1}P^*_\mu\psi dx\right\}$$
$$= y^2y^{-2r}\int_0^\infty x^{-2\mu-2r-1}b^*_{\mu+r}(xy)P^*_{\mu+r-1}\dots P^*_\mu\psi dx$$
$$= y^2y^{-2r}B^*_{\mu+r}\left[P^*_{\mu+r-1}\dots P^*_{\mu+1}P^*_\mu\psi\right] = y^2B^*_{\mu,r}\psi,$$

tras integrar por partes, y tener en cuenta (8) y que los términos con límites se anulan. En efecto, $\psi(x)$ es de rápido decrecimiento cuando $x \to \infty$, mientras que toda la función del corchete es una $O(x^{2\mu+2r+2})$ si $x \to 0^+$, siendo $2\mu + 2r + 2 \geq 1$.

A fin de obtener la primera de las fórmulas (21) conviene previamente ver, mediante unos simples cálculos, y a la vista de las definiciones (12) y (13), que

$$P^*_{\mu+r-1}\dots P^*_\mu T^*\psi = -(-1)^r x^{2\mu+2r+1}[x^2(x^{-1}D)^{r+1}x^{-2\mu-3}\psi +$$
$$(2\mu+2r+2)(x^{-1}D)^r x^{-2\mu-3}\psi] = -(-1)^r D_x[x^{2\mu+2r+2}(x^{-1}D)^r x^{-2\mu-3}\psi(x)]$$

Por tanto,

$$B^*_{\mu,r}(T^*\psi) = -y^{-2r}\int_0^\infty b^*_{\mu+r}(xy)[x^2(x^{-1}D)^{r+1}$$
$$+ (2\mu+2r+2)(x^{-1}D)^r](x^{-2\mu-3}\psi)dx \tag{22}$$

Ahora bien, integrando por partes resulta:

$$-B^*_{\mu+1,r}\psi = -y^{2\mu+1}\int_0^\infty xy^2 b_{\mu+r+1}(xy)x^{2\mu+2r+2}(x^{-1}D)^r x^{-2\mu-3}\psi(x)dx$$
$$= y^{2\mu+1}\left\{\left[b_{\mu+r}(xy)x^{2\mu+2r+2}(x^{-1}D)^r x^{-2\mu-3}\psi(x)\right]_{x\to 0^+}^{x\to\infty}\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty b_{\mu+r}(xy)D_x\left[x^{2\mu+2r+2}(x^{-1}D)^r x^{-2\mu-3}\psi(x)\right]dx\right\} \tag{23}$$
$$= -y^{-2r}\int_0^\infty b^*_{\mu+r}(xy)\left[x^2(x^{-1}D)^{r+1} + (2\mu+2r+2)(x^{-1}D)^r\right](x^{-2\mu-3}\psi)dx$$

Comparando (22) y (23) se llega al resultado deseado. Análogamente se procede para probar las segundas reglas operacionales de (19) y (21). Las fórmulas (20) se infieren inmediatamente de las otras, debido a que $\Delta^*_\mu = T^*P^*_\mu$.

Nota 2. Cuando $\mu \geq -1/2$ el Teorema 3 y la Proposición 4 reproducen, respectivamente, la fórmula de inversión y las reglas operacionales clásicas de la transformación B_μ^*, tal como figuran en [5] y [8], pues en tal situación $B_{\mu+1,r}^* = B_{\mu+1}^*$ y $B_{\mu,r}^* = B_\mu^*$.

4. La transformación generalizada de Hankel-Schwartz de orden arbitrario

Recordemos que toda función f tal que $x^{2\mu+1}f(x)$ sea absolutamente integrable sobre $I = (0,\infty)$ origina una función generalizada regular en H'_μ mediante

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_I f(x)\varphi(x)dx, \qquad \varphi \in H_\mu$$

En efecto, siendo la linealidad obvia, la continuidad se infiere de

$$|\langle f,\varphi\rangle| \leq \gamma_{0,0}^\mu(\varphi)\int_I x^{2\mu+1}|f(x)|dx$$

En particular, todo elemento f de H generará una distribución regular en H'_μ. Además, dos elementos de H que den lugar a la misma función generalizada regular en H'_μ, han de ser idénticos. En este sentido debe entenderse la inclusión $H \subset H'_\mu$.

Nota 3. Análogamente se puede probar que $H_\mu \subset H'$. Obsérvese que lo habitual en la literatura matemática ([1], [4], [9] y [12]) es que $H \subset H'$ y $H_\mu \subset H'_\mu$. Naturalmente que ello sigue siendo cierto en nuestro caso. Pero las inclusiones cruzadas que acabamos de obtener permiten justificar algunos resultados y dar un nuevo procedimiento para extender una transformación clásica a un espacio de distribuciones. Así, por ejemplo, comparando los resultados obtenidos se concluye que los mismos operadores diferenciales que actúan desde un punto de vista clásico en el espacio H, se convierten en operadores generalizados cuando lo hacen sobre el espacio de distribuciones H'_μ. Ello tiene sentido gracias a la inclusión $H \subset H'_\mu$. Recíprocamente, y a tenor de la inclusión $H\mu \subset H'$, los operadores convencionales sobre H_μ se comportan como generalizados cuando operan sobre H'.

Para $\mu \in \mathbf{R}$ cualquiera, definimos B'_μ sobre el espacio H'_μ como el operador adjunto de $B_{\mu,r}^*$ en H_μ, esto es,

$$\langle B'_\mu f,\psi\rangle = \langle f, B_{\mu,r}^*\psi\rangle, \qquad f \in H'_\mu, \qquad \psi \in H_\mu, \tag{24}$$

donde r representa un entero positivo tal que $\mu + r \geq -1/2$. Del Teorema 3 y de [14, Th. 1.10.2] sigue inmediatamente

TEOREMA (4). *La transformación generalizada de Hankel-Schwartz B'_μ, definida según* (24), *es un automorfismo sobre H'_μ independientemente del valor de μ.*

PROPOSICIÓN (5). *Sea μ un número real cualquiera. Si $f \in H'_\mu$ se tiene*

$$B'_\mu(P_\mu f) = y^2 B'_{\mu+1} f \quad ; \quad P_\mu(B'_{\mu+1} f) = B'_\mu(x^2 f)$$
$$\Delta\mu(B'_\mu f) = B'_\mu(-x^2 f) \quad ; \quad B'_\mu(\Delta_\mu f) = -y^2 B'_\mu f$$

En cambio, cuando $f \in H'_{\mu+1}$ *resulta*

$$B'_{\mu+1}(Tf) = -B'_\mu f \ ; \ T(B'_\mu f) = -B'_{\mu+1} f$$

Demostración. Fijado μ arbitrariamente, elíjase un entero positivo r de modo que $\mu + r \geq -1/2$. Probemos sólo la primera fórmula. En virtud de la definición (24), de la Proposición 3(ii) y de la segunda de las reglas operacionales (19) sigue para todo $\psi(y) \in H_\mu$:

$$\langle B'_\mu(P_\mu f), \psi\rangle = \langle P_\mu f, B^*_{\mu,r}\psi\rangle = \langle f, P^*_\mu B^*_{\mu,r}\psi\rangle$$
$$= \langle f, B^*_{\mu+1,r}(y^2\psi) = \langle B'_{\mu+1} f, y^2\psi\rangle = \langle y^2 B'_{\mu+1} f, \psi\rangle.$$

Las restantes fórmulas se obtienen procediendo de forma similar, con la ayuda de los resultados de la Proposición 4.

Nota 4. Obsérvese que $H \subset H'_\mu$ y $H \subset H'_{\mu+1}$. Por tanto, las reglas operacionales generalizadas de la Proposición (5) coinciden con las correspondientes de la transformación clásica en la Proposición 2. Ello no ocurre para la transformación de Hankel-Schwartz B'_μ de orden $\mu \geq -1/2$ tal como se considera en [1, Lemas 8 y 9], ni para la misma transformación de orden arbitrario μ en el modo que se trata en [6, Proposiciones 1 y 2].

Nota 5. El cálculo operacional generado por las transformaciones $B_{\mu,r}$ y B'_μ, y recogido en las Proposiciones 2 y 5, permite resolver el problema planteado por W.Y. Lee [4,p.431] independientemente de cual sea el valor real de μ. Para ello se procedería en forma similar a [13,14].

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
38271 LA LAGUNA (TENERIFE). ESPAÑA

REFERENCIAS

[1] G. ALTENBURG, *Bessel-Transformationen in Räumen von Grundfunktionen über dem Intervall* $\Omega = (0, \infty)$ *und deren Dualräumen*, Math. Nachr. **108** (1982), 197-218.
[2] L.S. DUBE AND J.N. PANDEY, *On the Hankel transform of distributions*, Tôhoku Math. J. **27** (1975), 337-354.
[3] H. HANKEL, *Die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunktionen*, Math. Ann. **VIII** (1875), 471-494.
[4] W.Y. LEE, *On Schwartz's Hankel transformation of certain spaces of distributions*, SIAM J. Math. Anal. **6**(2) (1975), 427-432.
[5] J.M.R. MÉNDEZ-PÉREZ, *On the Bessel transforms*, Jñānābha, **17** (1987), 79-88.
[6] ———, *On the Bessel transformation of arbitrary order*, Math. Nachr. **136** (1988), 233-239.
[7] ———, *A mixed Parseval equation and the generalized Hankel transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 619-624.
[8] ———AND A.M. SÁNCHEZ QUINTANA, *The Schwartz's Hankel transformations on certain spaces of generalized functions* (Aparecerá en Journ. Inst. Math. & Com. Sci., Math. Ser.)

[9] A. Schuitman, *On a certain test function space for Schwartz's Hankel transform*, Delft Progrm. Rep. **2** (1977), 193-206.

[10] A.L. Schwartz, *An inversion theorem for Hankel transforms*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 713-717.

[11] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

[12] A.H. Zemanian, *A distributional Hankel transformation*, J. SIAM Appl. Math. 14 (3) (1966), 561-576.

[13] ———, *Hankel transform of arbitrary order*, Duke Math. J. **34** (1967), 761-769.

[14] ———, Generalized integral transformations, Interscience Publishers, New York, 1968.