Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 36, 1991

LAS RELACIONES DE ADEM

POR ALEJANDRO ADEM DIAZ DE LEON

Sea X un espacio topológico; un invariante calculable e importante de X es la *cohomología* $H^*(X, \mathbb{F}_2)$. El funtor

$$X \to H^*(X, \mathbb{F}_2)$$

le asocia a un espacio X un espacio vectorial (sobre $\mathbb{F}_2$) con graduación natural. Estos grupos difieren de la *homología* en que poseen una estructura de álgebra graduada, es decir vienen dotados de un producto, (suprimimos coeficientes de ahora en adelante):

$$\begin{aligned} H^p(X) \otimes H^q(X) &\to H^{p+q}(X) \\ x \otimes y &\to x \cup y. \end{aligned}$$

Es fácil convencerse de que la cohomología es un invariante más efectivo que la homología para distinguir espacios no homeomorfos o del mismo tipo de homotopía (por ejemplo para distinguir $S^n \bigvee S^n \bigvee S^{2n}$ de $S^n \times S^n$).

En la topología algebraica un problema central es el de entender las clases de homotopía de aplicaciones de un complejo X en otro, Y, denotado por

$$[X, Y] = \left\{ \begin{array}{l} \text{clases de homotopía de funciones} \\ \text{continuas } f : X \to Y \end{array} \right\}.$$

En particular si $X = S^n$ (la n esfera) y consideramos un punto base, se puede dotar a este conjunto de un producto, y obtenemos así

$$\pi_n(Y) = n\text{-ésimo grupo de homotopía de } Y.$$

Para analizar lo anterior, Eilenberg y MacLane introdujeron espacios denotados por $K(\pi, n)$ donde π es un grupo abeliano (si $n > 1$) tales que

$$\pi_j(K(\pi, n) \cong \begin{cases} \pi & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j \neq n. \end{cases}$$

Su relevancia se sigue de la relación

$$H^n(Y, \pi) \cong [Y, K(\pi, n)],$$

es decir, estos espacios *representan* a la cohomología.

Distinguir el tipo de homotopía de un espacio o de una aplicación puede ser sumamente dificil, aun con el uso de la cohomología. Este proceso depende de propiedades homotópicas difícilmente detectables sin alguna *estructura adicional.*

Steenrod introdujo esta estructura adicional, en la forma de sus célebres "cuadrados de Steenrod". Los Sq^i son transformaciones naturales de funtores

$$H^n(\ ,\mathbb{F}_2) \to H^{n+i}(\ ,\mathbb{F}_2)$$

es decir, sí $f : X \to Y$ es continua, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y,\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^i} & H^{n+i}(Y,\mathbb{F}_2) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ H^n(X,\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^i} & H^{n+i}(X,\mathbb{F}_2) \end{array}$$

conmuta. Estos cuadrados satisfacen los siguientes axiomas, y son caracterizados por ellos:

(1) Sq^i es un homomorfismo $\forall i \geq 0$
(2) Si dim $x = n$, $\mathrm{Sq}^n x = x^2$
(3) Si $i >$ dim x, $\mathrm{Sq}^i x = 0$
(4) $\mathrm{Sq}^0 = 1$
(5) (Fórmula de Cartan)

$$\mathrm{Sq}^k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{Sq}^i x \bullet \mathrm{Sq}^{k-i} y.$$

La siguiente es una construcción homológica de los Sq^i.

Sea X un espacio topológico, entonces $\mathbb{Z}_2$ actúa por permutación en el producto $X \times X$. Ahora sea $x \in H^n(X)$, representado por

$$f : C_*(X) \to F_2 \quad (f(u) = 0, \quad \text{si } u \notin C_n(X)).$$

Definimos

$$P : C^*(X) \to C^*(E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} (X \times X))$$

mediante

$$P(f)(w \otimes x_1 \otimes x_2) = \varepsilon(w) f(x_1) f(x_2)$$

donde $E\mathbb{Z}_2$ denota al $\mathbb{Z}_2$-espacio universal y $\varepsilon : C_*(E\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{F}_2$ la aumentación (nótese que esto se debe a que P es equivariante con respecto a la permutación anterior a nivel de cocadenas). Esto define una función natural

$$H^n(X) \to H^{2n}(E\mathbb{Z}/2 \times_{\mathbb{Z}/2} X \times X)$$

tal que si $i : X \times X \to E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} (X \times X)$ es la inclusión de la fibra del haz asociado, entonces $i^* P(f) = f \times f \in H^{2n}(X \times X)$.

Por otro lado la inclusión de puntos fijos $j : X \to X \times X$ induce

$$j^*_{\mathbb{Z}_2} : H^{2n}(E\mathbb{Z}/2 \times_{\mathbb{Z}/2} X \times X) \to H^{2n}(B\mathbb{Z}/2 \times X)$$

donde $B\mathbb{Z}_2$ denota al espacio clasificante. Por definición,

$$j^*Px = \sum_{j=0}^{n} e^{n-j} \otimes \mathrm{Sq}^j x$$

donde $H^*(B\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{F}_2[e]$, con $\dim e = 1$.

Serre introdujo el concepto general de operaciones cohomológicas como transformaciones naturales de funtores

$$H^n(\ ,A) \to H^q(\ ,B)$$

y demostró que éstas corresponden en forma biunívoca con elementos del grupo

$$H^q(K(A,n),B) \cong [K(A,n),K(B,q)].$$

Si X es un espacio y

$$g_x : X \to K(A,n)$$

representa a $x \in H^n(X,A)$ tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\{\mathrm{id}\} \arrow[d] & H^n(K(A,n),A) \arrow[r, "g_x^*"] \arrow[d, "\epsilon(K(A,n))"] & H^n(X,A) \arrow[d, "\epsilon(X)"] \\
\alpha & H^q(K(A,n),B) \arrow[r, "g_x^*"'] & H^q(X,B)
\end{tikzcd}$$

El elemento $\epsilon(K(A,n))(\mathrm{id}) \in H^q(K(A,n),B)$ representa a la operación ϵ.

Serre demostró que las operaciones estables* (que conmutan con la suspensión y así dan lugar a *homomorfismos*) forman un álgebra, generada por los Sq^i, la denominada álgebra de Steenrod, $A(2)$. Esto significa que la estructura adicional, generalizando el producto, está contenida totalmente en el álgebra de Steenrod. Ante eso es evidente que conocer las relaciones *globales* entre estas operaciones es de singular importancia, ya que repercutirán en la cohomología de cualquier complejo.

En 1951, José Adem obtuvo una colección *completa* de relaciones entre los Sq^i. La formula exacta es la siguiente (los coeficientes binomiales se reducen módulo 2):

Para $0 < a < 2b$,

Relaciones de Adem

$$\mathrm{Sq}^a\mathrm{Sq}^b = \sum_{0\le c\le a/2} \binom{b-c-1}{a-2c} \mathrm{Sq}^{a+b-c}\mathrm{Sq}^c$$

---

* En el caso $A = B = \mathbb{F}_2$.

Adem tambien obtuvo relaciones parecidas entre las operaciones cohomológicas correspondientes a primos impares. Preferible a discutir la demostración, mencionaré algunas aplicaciones inmediatas.

TEOREMA (Adem): Sq^n *es descomponible si y solamente si* n *no es una potencia de 2; es decir los* Sq^{2^i} *generan el álgebra* $A(2)$. □

COROLARIO (1): *Si* $x \in H^q(X)$, $x^2 \neq 0$ *entonces existe alguna* i *tal que* $0 < 2^i \leq q$ *y* $\mathrm{Sq}^{2^i} x \neq 0$.

Demostración. $0 \neq x^2 = \mathrm{Sq}^q x = \sum$ monomios en $\mathrm{Sq}^{2^i} x$.

COROLARIO (2): *Si* $H^*(X)$ *es un anillo polinomial o un anillo polinomial truncado generado por* $x \in H^q(X)$, *y* $x^2 \neq 0$, *entonces* $q = 2^k$ *para alguna* k

Demostración. Como $H^*(X)$ es polinomial,

$$H^{q+2^i}(X) = 0, \quad 0 < 2^i < q$$
$$\Rightarrow \mathrm{Sq}^{2^i} x = 0 \text{ para } 0 < 2^i < q$$

y el corolario anterior implica que $q = 2^k$. □

Ahora consideraremos algunas aplicaciones concretas de estos resultados. Sea

$$f : S^{2n-1} \to S^n$$

una función continua; construimos el complejo

$$X_f = S^n \bigcup_f e^{2n}$$

tal que

$$H^*(X_f) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & * = 0, n, 2n \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}.$$

Definimos el invariante de Hopf módulo 2 de f como sigue: si $H^n(X_f) = \langle a \rangle$, $H^{2n}(X_f) = \langle b \rangle$.

$$a^2 = H(f) \bullet b$$

Una pregunta clásica de la topología es la de saber para qué valores de n existe un mapeo f con $H(f) \neq 0$. La importancia de este problema puede verse por su relación a un problema algebraico: ¿para qué valores de n admite $\mathbb{R}^n$ una estructura de álgebra de división? Esta segunda propiedad implica la existencia de un mapeo f con $H(f) \neq 0$ (se usa $S^{n-1} \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n - \{0\} \to S^{n-1}$ y una construcción de Hopf para obtener

$$f : S^{2n-1} = S^{n-1} * S^{n-1} \to SS^{n-1} = S^n.$$

Por otro lado la existencia de tal f es equivalente a la existencia de una estructura de "grupo salvo homotopía" (H-espacio) en S^{n-1}. Por otro lado si S^{n-1} tiene estructura de H-espacio, entonces es paralelizable. Los resultados de Adem implican

TEOREMA (Adem): *Los únicos valores de n tales que*
(1) *Existe $f : S^{2n-1} \to S^n$ con $H(f) \neq 0$, o*
(2) *$\mathbb{R}^n$ admite estructura de álgebra de división, o*
(3) *S^{n-1} tiene estructura de H-espacio, o*
(4) *S^{n-1} es paralelizable*
son de la forma $n = 2^k$ $k \geq 0$. □

Estos resultados son un modelo del poder de la topología algebraica cuando se aplica a ciertos problemas geométricos.

Inspirado por los resultados de Adem, J. F. Adams extendió este teorema en forma notable, obteniendo una de las mas impresionantes aplicaciones de métodos algebraicos en la topología hasta la fecha:

TEOREMA (Adams): *En el teorema anterior n es $1, 2, 4, 8$. En (2) se tienen los reales, complejos, cuaternios y octonios de Cayley.* □

La demostración del teorema de Adams utiliza en forma esencial las operaciones cohomológicas, en particular la noción de operaciones secundarias introducidas por Adem.

Quizás más importante que el resultado fue la herramienta que Adams introdujo (la sucesión espectral de Adams) para calcular clases de homotopía a partir de la cohomología como módulo sobre el álgebra de Steenrod. La idea seminal de esta revolucionaria técnica radica en los resultados descritos anteriormente, y el trabajo de Adem fue una fuente importante de motivación.

Podemos concluir observando que los resultados de Adem no solamente son de interés general, sino tambien representan un trayecto fundamental en la evolución de la teoría de la homotopía a su estado actual.

UNIVERSIDAD DE WISCONSIN
MADISON, E.U.A.

REFERENCIAS

[A] ADEM, JOSÉ, The relations on Steenrod powers of cohomology classes, Algebraic Geometry and Topology (a symposium in honor of Solomon Lefschetz), Princeton University Press, Princeton NJ 1957.

[S-E] STEENROD, N. E. AND EPSTEIN, D., *Cohomology Operations*. Annals of Mathematics Studies **50**, Princenton University Press, Princenton NJ 1962.

[W] Whitehead, G. W., *Fifty years of homotopy theory*. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 8 No. 1, 1-29 (1983).