

SINGULARIDADES DE SISTEMAS DIFERENCIALES ANALITICOS EN EL PLANO

POR SAMUEL BAROCIO
(Dedicado a S. Lefschetz)

INDICE

Introducción.....	1
§1. Consideraciones generales.....	2
§2. Sobre las trayectorias de acceso y su determinación.....	6
§3. Retrato fase local. Discusión general.....	10
§4. Descripción de los retratos-fase posibles en el caso regular.....	12
§5. Puntos singulares irregulares.....	17
§6. Algunas aplicaciones.....	22
Bibliografía.....	25

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo discutimos un par de ecuaciones diferenciales reales:

$$\dot{x} = X(x, y) \quad \dot{y} = Y(x, y),$$

donde X y Y son holomorfas en el origen, se anulan ahí, y el origen es una intersección aislada.

Hemos logrado una clasificación completa del comportamiento de las trayectorias en la vecindad del origen. Esto se ha hecho módulo la estructura llamada *abanico*, la cual, cuando menos es un caso importante no se puede eliminar, ya que de hecho se presenta, como se demostrará mediante un ejemplo.

La clasificación es estrictamente geométrica y se obtiene por medio de esquemas típicos.

Para demostrar el alcance del método general, lo hemos aplicado a cuatro ejemplos.

- a) El caso en que X y Y tienen términos lineales, y cuya matriz tiene ambas raíces características diferentes de cero, éste caso corresponde a las llamadas singularidades elementales.
- b) El caso conocido como sistema de Bendixson en el cual X y Y tienen términos de primer grado, cuya matriz sin embargo tiene sólo una raíz característica diferente de cero.
- c) El caso análogo con ambas raíces características iguales a cero, pero no obstante con matriz no nula.
- d) El caso en que X y Y comienzan con términos de segundo grado. Ya que en éste último caso el número de tipos es excesivo, solamente hemos considerado un par de casos particulares.

No faltan en la literatura investigaciones sobre éstos temas. Existe la bien conocida obra de Bendixson de principios del siglo. Sin embargo su sistema de clasificación, se basa sobre transformaciones analíticas de variables y no les da realmente una interpretación como hechos geométricos. De fecha más reciente

es la obra de Foerster. Esta se refiere a un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X_m(x, y) + A(x, y) \\ \dot{y} &= Y_m(x, y) + B(x, y)\end{aligned}$$

donde X_m y Y_m son polinomios homogéneos de grado m y A, B son relativamente pequeñas respecto a X_m, Y_m cerca del origen. Sin embargo, en vista de las pocas suposiciones respecto a A, B se puede esperar muy poca precisión. Para dar sólo un ejemplo, si X_m y Y_m son ambos de la forma $(x + y)^m$, se puede decir muy poco en el caso de Foerster. Sin embargo, si A y B son analíticas y comienzan con términos de grado mayor que m , entonces, en general X y Y consisten cerca del origen de un número de ramas distintas, y el conocimiento de esas ramas nos dará la clave para una descripción completa de la singularidad.

Convenciones sobre Series de Potencias. Tendremos ocasión repetidamente de usar series convergentes de potencias $g(x, y)$ en dos variables reales x, y .

Usaremos las siguientes notaciones y convenciones. Si g comienza con términos de grado no menor que n la denotaremos genéricamente por $[x, y]_n$.

Una serie $g(x, y)$ tal que $g(0, 0) \neq 0$ se llamará *unidad* y se designará genéricamente por $E(x, y)$.

Una serie $g(x, y)$ tal que $g(0, 0) = 0$ se llamará *no unidad*.

Las mismas designaciones se usarán por supuesto para series $g(x)$ en una variable.

Numeración de las figuras. Los números (arábigos) de las figuras, precedidos por un número romano, indican que tal figura se encontrará en la lámina correspondiente al número romano p.ej. III-27 se refiere a la lámina III fig. 27.

El trabajo expuesto en este artículo fué patrocinado por las siguientes dos instituciones: Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, e Instituto Nacional de la Investigación Científica.

Este trabajo constituye una tesis doctoral presentada en 1957 ante la facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

El autor desea expresar su agradecimiento al Profesor Solomon Lefschetz por su valiosa dirección y estímulo durante esta investigación.

§1. CONSIDERACIONES GENERALES

1. Nos ocuparemos en el presente trabajo de un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$(1.1) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= X = [x, y]_p \\ \dot{y} &= Y = [x, y]_q,\end{aligned}$$

Siempre supondremos p y $q \geq 1$, de modo que el origen sea un punto singular. Supondremos siempre que éste es un punto singular aislado. Nuestro problema fundamental será la descripción de los varios retratos-fase alrededor del origen (retratos-fase locales).

El método consistirá en dividir la vecindad del origen en sectores en los cuales

X y Y tienen un signo fijo. Estos sectores estarán por supuesto limitados por los arcos de lugares $X = 0$, $Y = 0$ que parten del origen. Debemos por lo tanto discutir antes que todo la construcción de estos arcos límites.

2. Supongamos que

$$(2.1) \quad \begin{aligned} X &= X_p + X_{p+1} + \dots \\ Y &= Y_q + Y_{q+1} + \dots \end{aligned}$$

donde X_r y Y_r son términos homogéneos de grado r en X y Y .

Aplicaremos a continuación una transformación lineal de coordenadas. Observemos que esta transformación no cambiará el mínimo de los dos números p , q . Si r es el mínimo, diremos que el punto singular es de *orden* r .

Apliquemos pues, una transformación lineal

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_1 &= ax + by \\ y_1 &= cx + dy, \quad ad - bc \neq 0. \end{aligned}$$

y su inversa:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \beta y_1 \\ y &= \gamma x_1 + \delta y_1 \end{aligned}$$

En consecuencia x_1 , y_1 satisfarán las ecuaciones diferenciales

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= aX_p + bY_q + \dots \\ \dot{y}_1 &= cX_p + dY_q + \dots \end{aligned}$$

Supongamos primero que $p \neq q$ y digamos que $p < q$. Entonces nuestro nuevo sistema, escribiendo sólo los términos de grado más bajo toma la forma:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= aX_p(\alpha x_1 + \beta y_1, \gamma x_1 + \delta y_1) + \dots \\ \dot{y}_1 &= cX_p(\alpha x_1 + \beta y_1, \gamma x_1 + \delta y_1) + \dots \end{aligned}$$

Los términos de grados más bajos en x_1 y y_1 tiene por coeficientes

$$\begin{aligned} aX_p(\alpha, \gamma), & \quad aX_p(\beta, \delta) \\ cX_p(\alpha, \gamma), & \quad cX_p(\beta, \delta) \end{aligned}$$

Resulta claro que podemos escoger nuestro nuevo sistema de coordenadas de modo que ninguno de estos coeficientes sea cero. Esto significa que podemos suponer desde el principio que el sistema básico tiene ahora la forma donde X_p contiene ahora términos tanto en x^p como en y^p . En particular, entonces ninguno de los ejes será parte de los lugares $X = 0$, $Y = 0$.

El mismo argumento valdrá también para el caso $p = q$ y $X_p = kY_q$, de modo que no necesitamos repetirlo.

3. Supongamos ahora que $p = q$, $X_p \neq kY_p$.

Nuestras ecuaciones toman ahora la forma explícita

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= aX_p(\alpha x_1 + \beta y_1, \gamma x_1 + \delta y_1) \\ &\quad + bY_p(\alpha x_1 + \beta y_1, \gamma x_1 + \delta y_1) + \dots \\ \dot{y}_1 &= cX_p(\alpha x_1 + \beta y_1, \gamma x_1 + \delta y_1) \\ &\quad + dY_p(\alpha x_1 + \beta y_1, \gamma x_1 + \delta y_1) + \dots \end{aligned}$$

No queremos que éste sistema tome la forma

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= kx_1^p + [x_1, y_1]_{p+1}, \\ \dot{y}_1 &= ly_1^p + [x_1, y_1]_{p+1}. \end{aligned}$$

Para evitar ésto será suficiente hacer que la primera ecuación de (3.1) contenga un término en y_1^p y la segunda un término en x_1^p .

Este requiere entonces que

$$(3.3) \quad \begin{aligned} aX_p(\beta, \delta) + bY_p(\beta, \delta) &\neq 0 \\ cX_p(\alpha, \gamma) + dY_p(\alpha, \gamma) &\neq 0 \end{aligned}$$

Ya que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la inversa de $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ los términos a, b, c, d son proporcionales a $\delta, -\beta, -\gamma, \alpha$. Reemplazando en (3.3) a, b, c, d por los valores proporcionales, obtenemos

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \delta X_p(\beta, \delta) - \beta Y_p(\beta, \delta) &\neq 0 \\ \gamma X_p(\alpha, \gamma) - \alpha Y_p(\alpha, \gamma) &\neq 0. \end{aligned}$$

Pongamos

$$(3.5) \quad \Delta(x, y) = yX_p(x, y) - xY_p(x, y)$$

Llamaremos al polinomio homogéneo Δ , *polinomio indicador* del punto singular.

Supongamos que $\Delta(x, y) \neq 0$. Entonces uno puede escoger pares de valores (β, δ) y (α, γ) tales que (3.4) valga, y que además

$$(3.6) \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Porque si (3.6) no vale, los puntos $A(\alpha, \gamma)$ y $B(\beta, \delta)$ son colineales con el origen y recíprocamente. Consideremos las líneas l_1, \dots, l_{p+1} representadas por $\Delta(x, y) = 0$. Tomemos dos líneas l', l'' distintas unas de otras y de las líneas l_h , ($h = 1, \dots, p + 1$). Si A es un punto de l' y B un punto de l'' (y ninguno de ellos es el origen), se satisfarán (3.4) y (3.6).

Por lo tanto nuestra transformación operará como la considerada arriba.

Supongamos ahora que $\Delta \equiv 0$, entonces claramente $X_p = R_{p-1} \cdot x$, $Y_p = R_{p-1} \cdot y$.

Cuando ésto suceda, nuestras transformaciones lineales no nos permitirán descartar a x como posible factor de X y a y como posible factor de Y . Veremos, sin embargo, que en éste caso no será difícil descubrir el retrato-fase local.

Será conveniente introducir la siguiente definición: Un punto singular cuyo

indicador $\Delta(x, y) \neq 0$ se llamará *regular*, mientras que si $\Delta(x, y) \equiv 0$, diremos que el punto singular es *irregular*. Nuestro plan general consistirá en investigar completamente los puntos singulares regulares de un orden dado, después de lo cual será fácil manejar el tipo irregular.

4. Supongamos ahora que tenemos un punto regular singular de orden p .

De lo que se ha demostrado concluimos que en un sistema adecuado de coordenadas, nuestras ecuaciones tomarán la forma:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= X = X_p + X_{p+1} + \dots \\ \dot{y} &= Y = Y_p + Y_{p+1} + \dots \end{aligned}$$

donde tanto X_p como Y_p contienen términos en x^p y y^p . Uno puede aplicar ahora el teorema de preparación de Weierstrass ([4] §98 p. 233) a X y Y y poner el sistema en la forma

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y^p + A_1(x)y^{p-1} + \dots)E_1(x, y) \\ \dot{y} &= \beta(y^p + B_1(x)y^{p-1} + \dots)E_2(x, y) \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta \neq 0$, $E_i(0, 0) = 1$ y las A_i, B_j son no-unidades.

Podemos ahora aplicar el teorema de Puiseux ([4] §99 p. 237) y factorizar los polinomios en y en series de potencias fraccionarias de x .

Cada factor será de la forma

$$y - x^{r/n} E(x^{1/n})$$

Estos factores pueden ser complejos, y de ser éste el caso se asociarán en pares conjugados de la misma multiplicidad. Podemos, por lo tanto, escribir

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha F(x, y) \Pi(y - x^{p_i/m_i} E_i(x^{1/m_i}))^{\sigma_i} \\ \dot{y} &= \beta G(x, y) \Pi(y - x^{q_i/n_i} E_j(x^{1/n_i}))^{\tau_i} \end{aligned}$$

donde F y G son series de potencias en y y alguna potencia fraccionaria de x que se anulan en el origen y excepto en éste punto son positivas en cualquier vecindad del origen y los factores bajo los signos del producto son todos reales.

5. En vista de que nos interesaremos esencialmente en los signos de \dot{x}, \dot{y} cerca del origen, podemos reducir en (4.3) los exponentes σ_i, τ_j módulo 2, simplemente incluyendo los factores omitidos pares en F y G . Así pues, nuestro sistema básico tomará la forma

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha F(x, y) \Pi(y - x^{p_i/m_i} E_i(x^{1/m_i})) \\ \dot{y} &= \beta G(x, y) \Pi(y - x^{q_i/n_i} E_j(x^{1/n_i})) \end{aligned}$$

donde F y G son como antes: positivas cerca del origen.

Obsérvese que los factores bajo los dos signos de producto son todos distintos porque en caso contrario $X = 0$ y $Y = 0$ tendrían en común un arco completo de ceros, y así el origen no sería una singularidad aislada.

§2. SOBRE LAS TRAYECTORIAS DE ACCESO Y SU DETERMINACIÓN

6. Tenemos hasta este momento un lugar geométrico $\dot{x}\dot{y} = 0$ definido por las ecuaciones (5.1). Este lugar divide a una vecindad del origen en sectores, en los cuales los signos de \dot{x} y de \dot{y} permanecen fijos. El siguiente problema del que vamos a ocuparnos ahora es el de la determinación de todas las trayectorias que entran al, o salen del origen; y a las cuales llamaremos curvas o trayectorias “de acceso”, ya que a través de ellas el origen es accesible desde fuera de una vecindad de éste punto (cambiándole de signo al tiempo, si es necesario). En inglés hemos llamado “TO-curves” a las trayectorias de acceso siguiendo la terminología de Niemitzki-Stepanov de “O-curvas”.

Podría pensarse *a priori* que estas trayectorias de acceso pueden presentarse en cualquier sector definido por el lugar $\dot{x}\dot{y} = 0$, sin embargo, más adelante vamos a encontrar dos condiciones necesarias aunque no suficientes para la existencia de tales trayectorias de acceso.

Tomemos ahora un punto $P(x, y)$ sobre una trayectoria de acceso. Entonces $\overrightarrow{OP} = (x, y)$, pero para $|\overrightarrow{OP}|$ suficientemente pequeño los signos $\text{sgn } x$ y $\text{sgn } y$ permanecen fijos, ésto es, P permanece en un cuadrante fijo.

Por otra parte, en cada sector definido por el lugar $\dot{x}\dot{y} = 0$, $\text{sgn } \dot{x}$ y $\text{sgn } \dot{y}$ permanecen fijos. Pero cuando $P \rightarrow 0$ sobre la trayectoria de acceso la posición límite de la secante \overrightarrow{OP} es la tangente a la curva de acceso en 0.

De aquí se sigue inmediatamente que una condición necesaria para la existencia de una curva de acceso en un sector dado es que en tal sector $\text{sgn } y/\text{sgn } x = \text{sgn } \dot{y}/\text{sgn } \dot{x}$ o lo que es lo mismo $\text{sgn } x \text{sgn } y = \text{sgn } \dot{x} \text{sgn } \dot{y}$, o más aún $\text{sgn } xy = \text{sgn } \dot{x}\dot{y}$.

Aquellos sectores en los cuales se cumpla la condición anterior se llamarán “sectores ambiguos”, porque la colección de ramas asociada al lugar $\dot{x}\dot{y} = 0$ no será suficiente para determinar el comportamiento completo de las trayectorias en dichos sectores, como se verá después.

La otra condición necesaria, será la de que no pueden existir trayectorias de acceso que no sean descubiertas por el método de Briot-Bouquet que se describirá dentro de un momento.

Estos dos criterios simplificarán grandemente la aplicación de la condición suficiente más complicada obtenida del método descrito al final de esta sección.

El método de Briot-Bouquet es de hecho muy general porque localiza las trayectorias de acceso posibles a priori o también sistemas continuos de curvas de acceso, los llamados *abanicos*.

En su gran clásico, [10] Briot y Bouquet dieron un método para aproximar curvas de acceso con precisión arbitrariamente grande. Tomemos el sistema (1.1) y reemplacémoslo por el equivalente

$$(6.1) \quad X \frac{dy}{dx} - Y = 0$$

Buscamos todos los sistemas posibles

$$(6.2) \quad y = a_1 x^{\lambda_1} + a_2 x^{\lambda_1 + \lambda_2} + \dots$$

que cuando menos formalmente satisfagan el sistema (6.1). Los términos de grado inferior en (6.1) deben cancelarse. Estos son los mismos que los términos de grado menor en $yX - xY = x^a y^b Z(x, y)$, donde $Z(x, 0)$ y $Z(0, y)$ son ambos $\neq 0$. Construimos entonces el polígono de Newton para

$$Z(x, y) = \sum c_{pq} x^p y^q.$$

Recordemos su construcción:—Se marcan los puntos de coordenadas p, q y se traza el polígono tal (fig II-1) que no haya puntos (p, q) debajo de él; ya que Z contiene puntos en x sola y en y sola el polígono tendrá un vertice en cada eje.

Si CD es uno de los lados que contiene vértices tanto de yX cuanto de xY , su pendiente será $\mu = -s/r$ donde r, s , son enteros positivos relativamente primos y un valor posible de λ_1 es $\lambda_1 = r/s$. Encontramos a_1 substituyendo $y = a_1 x^{r/s}$ y anulando los coeficientes de los términos de grado menor.

Supongamos que ya hemos escogido $a_1 x^{r/s}$. Hagamos el cambio de variables

$$x = x_1^s, \quad y = y_1 x_1^r.$$

Este dará lugar a una relación

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{Y_1(x_1, y_1)}{X_1(x_1, y_1)}$$

análoga a (6.1) y cuya solución comenzará por un término $a_2 x_1^{s\lambda_2}$. El mismo proceso da a_2 y λ_2 , etc. Se puede pues ir tan lejos como se desee. Estrictamente hablando, la construcción anterior descansa en la hipótesis de que a lo largo de una trayectoria de acceso, y tiene un orden definido en x . Esto ha sido probado por S. Lefschetz recientemente [véase: On a Theorem of Bendixson, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Abril de 1956 pp. 13-27].

Además, si el proceso es efectivo, este no prueba que exista una trayectoria de acceso real del orden dado. Por ejemplo uno puede encontrarse con que la curva de acceso es compleja; no hay nada en el método de Briot-Bouquet que excluya esta posibilidad.

7. Denotemos por Γ_V y Γ_H a las ramas representadas respectivamente por $\dot{x} = 0$ y $\dot{y} = 0$ cerca del origen. Es decir, estas son las ramas representadas respectivamente en (5.1) por las relaciones:

$$\Gamma_V : y - x \frac{p_i}{m_i} E_i \left(\frac{1}{x^{m_i}} \right) = 0$$

$$\Gamma_H : y - x \frac{q_j}{n_j} E_j \left(\frac{1}{x^{n_j}} \right) = 0.$$

Refiriéndonos al campo vectorial (\dot{x}, \dot{y}) , vemos que en las intersecciones con una rama Γ_V , las trayectorias tendrán tangentes verticales, y en las intersecciones con una rama Γ_H , tendrán tangentes horizontales. Estas propiedades de tangencia implican inmediatamente que las ramas no son soluciones. Además, por razones clásicas de analiticidad, ninguna es intersectada por una solución en un número infinito de puntos cerca del origen. En consecuencia estas ramas

dividen a la vecindad del origen en sectores tales que las trayectorias de acceso sólo pueden estar contenidas en el interior de dichos sectores. Nuestro primer problema consistirá naturalmente en buscar las trayectorias de acceso en los sectores individuales.

Se puede anticipar que el método a seguir revelará en cada caso si uno trata con una sola trayectoria de acceso, o con una familia continua de tales curvas, ésto es, un abanico. De hecho la descripción se reduce paso a paso hasta tener al final un caso conocido o fácil de manejar en que la presencia o ausencia de abanicos se determina automáticamente.

Ahora, nos propondremos analizar completamente un sector limitado por dos ramas Γ_H en el primer cuadrante. Los otros casos se pueden tratar con modificaciones insignificantes en el argumento, tales como intercambio de coordenadas, etc. El método seguido aquí, está inspirado en la nota de S. Lefschetz (loc. cit.). De acuerdo con esta nota, sin ninguna reducción mod. 2 en los exponentes σ_i , τ_j , y en un sistema adecuado de coordenadas, podemos escribir

$$(7.1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} = E(x, y) \frac{\Pi(y - A_j(x))}{\Pi(y - B_k(x))}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n$$

donde nuestras dos $\Gamma_H: \Gamma_H^1$ y Γ_H^2 corresponden a A_1 y A_2 . Sean en particular A_1 y A_2 series en $x^{1/p}$. Poniendo $x = u^p$, tendremos $A_1 = \varphi(u) + au^s + \dots$, $A_2 = \varphi(u) + bu^s + \dots$, $\varphi(u) = mu^p + \dots + \alpha u^{s-1}$, así que $s > p$.

Podemos ahora dividir las $A_j(x)$ como sigue:—Un cierto conjunto A_1, \dots, A_f será de la misma forma que A_1 . El resto B_{f+1}, \dots, B_n será de la forma

$$B_h = \psi(x) + c_h x^p + \dots,$$

donde $\varphi - \psi$ es de orden $< \mu = s/p$. El mismo número $A_1^*, \dots, A_f^*, B_{f+1}^*, \dots, B_n^*$ corresponderá al denominador X , con las A_h, A_h^* correspondiendo a φ , y B_h, B_h^* a la misma ψ . Nótese también que los productos $\Pi(y - B_h)$, $\Pi(y - B_h^*)$, contienen respectivamente para cada B_h, B_h^* sus conjugados y en consecuencia son series de potencias en x, y .

Si aplicamos ahora la transformación

$$x = u^p, \quad y = \varphi(u) + u^s y_1$$

entonces un cálculo simple muestra que (7.1) toma la forma

$$(7.2) \quad \frac{dy_1}{dx} = E(u, y_1) \frac{F(u, y_1)}{F^*(u, y_1)} u^\sigma, \quad \sigma \geq 2$$

donde F, F^* son polinomios especiales de grado f en y_1 y en particular F^* tiene por raíces las $u^{-s}(A_j^* - \varphi(u))$.

Ahora, (7.2) tiene la solución $u = 0$. Las imágenes de las curvas de acceso que hemos estado considerando son soluciones de (7.2) que tienden a puntos singulares sobre el eje y_1 . Estos puntos son las raíces de

$$(7.3) \quad F(0, y_1) = 0$$

y hay a lo más $f \leq n$ puntos distintos. Podemos ahora distinguir dos clases de raíces:

(a) Las raíces de $F(0, y_1)$ que no son raíces de $F^*(0, y_1)$. Sea ξ una raíz real de éstas $a \leq \xi \leq b$. Si ponemos $y_1 - \xi = y^*$ entonces (7.3) se reemplaza por una relación

$$(7.4) \quad \frac{dy^*}{du} = E(u, y^*) \frac{G(u, y^*)}{u^s}$$

donde G es un polinomio especial de grado $g \leq f \leq n$ en y^* .

En particular, si $g = 1$, ésto es, si ξ es raíz simple de $F(0, y_1)$, entonces el punto $u = 0, y_1 = \xi$ es un punto de Bendixson $a \leq \xi \leq b$. (Para una discusión de tales puntos véase No. 14). Por lo tanto, hay una trayectoria de acceso o un abanico entre Γ_H^1 y Γ_H^2 . Se puede determinar fácilmente de (7.4) cual de los dos es.

Notemos que si $F(0, y_1)$ tiene más de una raíz, entonces $y < f \leq n$. Procediendo de esta manera se llega finalmente a un sistema con $f = 1$, o bien a un sistema como (7.4) pero del tipo

$$\frac{dy^*}{du} = E(u, y^*) \frac{(y - A(u))^f}{u^s}$$

$$A(u) = u^\sigma(\alpha_0 + \alpha_1 u + \dots)$$

Supongamos primero que $A \neq 0$. Haciendo el cambio de variables $y^* = A(u) + z$ obtenemos

$$\frac{dz}{du} = \frac{E(u, z)z^f - A'(u)u^s}{u^s}$$

$$= E(u, z) \frac{z^f - \gamma u^\sigma E_1(u, z)}{u^s}$$

$$\sigma \geq s, \quad E_1(0, 0) = 1.$$

Ahora bien, de

$$z^f - \gamma u^\sigma E_1(u, z)$$

deducimos

$$z = \gamma^{1/f} u^{\sigma/f} E_2(u, z),$$

donde $\gamma^{1/f}$ es cualquier raíz f -ésima de γ .

Sea $\sigma/f = \sigma^2/f^2$, donde σ^2, f^2 son relativamente primos. Podemos resolver (7.7) para z en la forma

$$z = \gamma^{1/f} u^{\sigma/f} E(u^{1/\sigma^2})$$

donde $E(u^{1/\sigma^2})$ es real si y sólo si $\gamma^{1/f}$ es real. Poniendo $u = u'\sigma^2$, si $\gamma^{1/f}$ es real obtenemos un sistema como el (7.4) con u' en lugar de u , y con tantos puntos

del tipo de Bendixson como determinaciones reales tenga $\gamma^{1/f}$, e igual número de trayectorias de acceso o abanicos, decidiéndose fácilmente de cual de las dos posibilidades se trata

Si $A(u) \equiv 0$ entonces (7.4) toma la forma

$$(7.5) \quad \frac{dy}{du} = \alpha E(u, y^*) \frac{y^*}{u^s}, \quad E(0, 0) = 1.$$

La naturaleza de esta singularidad en el origen, en los cuadrantes 1° y 4°, (que son los que nos interesan) se determina como sigue—Primero los ejes son trayectorias. Después, en la siguiente tabla se indican las diferentes posibilidades. C quiere decir cuadrante y SN, SH, sector nodal y sector hiperbólico respectivamente

	1°C	4°C
+, r impar	SN	SN
+, r par	SN	SH
-, r impar	SH	SN
-, r par	SH	SH

En el último caso hay solamente una trayectoria de acceso en el sector inicial en consideración

(b) supongamos ahora que ξ es también raíz de $G^*(0, y_1) = 0$. Entonces todo sucede como antes excepto si tenemos (7.5). Pero tomando entonces du/dy^* se sigue una relación del tipo (7.4) la cual puede estudiarse fácilmente resolviéndose las mismas cuestiones.

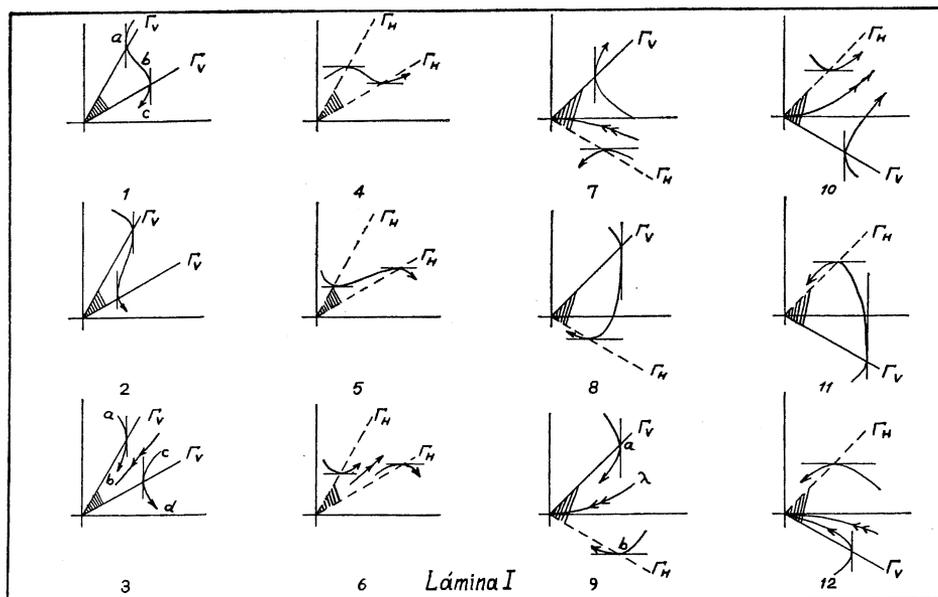
En la etapa presente podemos decir que hemos determinado completamente el sistema total de las trayectorias de acceso.

§3. RETRATO-FASE LOCAL. DISCUSIÓN GENERAL

8. Se entiende generalmente por retrato-fase local la colección global de las trayectorias en la vecindad del origen. Podemos decir que el resultado principal de este trabajo es que la descripción de las trayectorias se determina completamente desde el punto de vista topológico módulo los abanicos mediante las dos colecciones de curvas Γ y curvas de acceso.

En el caso en que el análisis por medio de las ramas (el cual es más sencillo en la práctica) sea suficiente para revelar la situación completa en un sector dado, no será necesario recurrir al análisis de las trayectorias de acceso. Habrá sin embargo, un cierto número de casos de sectores donde el análisis de las ramas Γ simplemente será insuficiente, y en consecuencia se necesitará utilizar ahí el análisis más fino de las trayectorias de acceso. Esto son los sectores que se mencionaron ya en el No. 6 con el nombre de “ambiguos”.

Vamos ahora a comenzar con el análisis de las ramas Γ . Cada rama Γ divide su vecindad en el plano cerca de la singularidad en dos regiones en las cuales \dot{x} (o \dot{y}) son de signo contrario. De aquí se sigue inmediatamente que el número de ramas de cada clase (Γ_V o Γ_H) es par. La vecindad del origen, queda pues



dividida en sectores por las ramas Γ . Nuestro problema está en investigar la manera en que las trayectorias cruzan cada sector. Esto requerirá un estudio detallado de las diferentes posibilidades. Sólo necesitaremos discutir el lado derecho del eje de las y , ya que el lado izquierdo se puede obtener por simetría.

En la lámina I, los sectores en discusión están sombreados cerca del origen.

Consideremos primero un sector entre dos ramas Γ_V . Estos corresponden a las figuras I-1, I-2, I-3. Consideremos la figura I-1; comenzando en el punto a , la trayectoria cruza Γ_V hacia abajo, con tangente vertical y con y decreciendo todo el tiempo ya que no hay ninguna rama Γ_H en este sector. Cuando se llega a b , la trayectoria no puede tender al origen en la zona considerada, ya que esto implicaría la existencia de una nueva rama Γ_V ahí. La trayectoria no puede comportarse de manera "hiperbólica" allí, porque entonces habría allí una nueva rama Γ_H . En consecuencia, la única posibilidad para la trayectoria es que cruce toda la zona. Es decir, que ésta se debe comportar como se indica en I-1.

Pasemos ahora al caso de I-2, es decir, al de un movimiento como el que se ilustra allí: x decrece en la zona, tenemos esta vez la posibilidad de una curva de acceso. Se excluye la trayectoria hiperbólica como en el caso precedente, porque se necesitarían en la zona nuevas ramas Γ_V y Γ_H .

Si no hay curva de acceso, entonces la situación es la misma que en I-1. Supongamos ahora que hay una curva de acceso o un abanico de tales curvas como se ilustra en la figura I-3. Ya que esta trayectoria no puede ser cruzada desde fuera y cerca del origen por ninguna otra trayectoria, la trayectoria ab sólo se puede comportar como se indica en I-3 y análogamente para la trayectoria cd . Para precisar, a lo largo de ab , y decrece continuamente y ya que el arco no

puede volver a cruzar la rama Γ_V superior, la única posibilidad para ab es que tienda al origen. Análogamente, el único comportamiento posible para cd es el indicado.

El mismo argumento vale para dos ramas Γ_H consecutivas sobre el eje de las x como se muestra en las figuras I-4, I-5, I-6.

Consideremos ahora el caso de dos ramas adyacentes Γ_V y Γ_H . Si están ambas en el primer cuadrante, la situación no es ambigua y las trayectorias sólo se pueden comportar de manera única. La situación es diferente, sin embargo, si las dos ramas Γ_V y Γ_H están separadas por el eje de las x (Figs. I-7 a I-12).

Examinemos primeramente las figuras I-7, I-8, I-9; con la rama Γ_V sobre el eje de las x . Se ve de nuevo que la figura I-7 no es ambigua. Quedan I-8 y I-9. Si no hay trayectoria de acceso en el sector, tenemos la figura I-8. Al entrar al sector la trayectoria sólo puede ir hacia abajo hasta que alcance la rama Γ_H , de modo que su comportamiento concuerda con la fig. I-8. Supongamos que hay una trayectoria de acceso λ en el sector. Como desde a en la figura I-9 la trayectoria sólo puede bajar sin cruzar λ , su comportamiento sólo puede ser al de la figura I-9. Análogamente, la trayectoria desde b sólo puede subir hacia λ .

El tratamiento de las figuras I-10, I-11, y I-12 sigue esencialmente la misma pauta que para las figuras I-7, I-8, I-9 y no necesitamos pues, describirlas en detalle.

Observación Importante. En todos los esquemas de la lámina I, las curvas de acceso que aparecen, se pueden igualmente reemplazar por abanicos.

La siguiente regla general, que se deriva directamente de la condición $\text{sgn } xy = \text{sgn } \dot{x}\dot{y}$, y que es bastante clara a primera vista, es muy ventajosa al dibujar las figuras. Siempre que en cualquier zona particular limitada por dos ramas Γ el vector (\dot{x}, \dot{y}) apunte en un cuadrante (o en el opuesto) que contenga una zona o parte de una zona en consideración puede presentarse una posible trayectoria de acceso (figs. I-2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12) o aún una necesaria (figs. I-7, 10).

Los sectores que acabamos de discutir en detalle pueden muy bien servir como modelos para sectores posteriores, de manera que podremos dejar la mayoría de los detalles al lector.

La discusión de los casos que se acaban de considerar ha puesto en evidencia la siguiente propiedad importante.

Llamaremos *ramas Γ_V consecutivas*, a las que no están separadas por trayectorias de acceso ni por el eje de las y . Análogamente para *ramas Γ_H consecutivas* y el eje de las x en lugar del eje de las y . Entonces, desde el punto de vista topológico, si hay un número par de ramas consecutivas de la misma especie, éstas se pueden suprimir enteramente, mientras que si hay un número impar se pueden reemplazar por una sólo rama de la misma clase.

§4. DESCRIPCIÓN DE LOS RETRATOS-FASE LOCALES EN EL CASO REGULAR

9. Regresemos ahora al argumento de la sección 2; describiremos en la medida que sea posible los varios retratos-fase que se pueden presentar, cuando menos en el caso analítico.

Ahora bien, el número total de casos posibles es, de hecho muy grande. En consecuencia, será necesario simplificar el asunto mediante un simbolismo algo extenso.

Lo que hemos hecho, es construir una tabla bastante completa, con dos renglones para cada caso. Usando esta tabla es muy fácil trazar los esquemas correspondientes. Se pueden hacer las siguientes observaciones:

A) Nuestra constante hipótesis de trabajo es que los ejes no son ramas ni tangentes a tales ramas.

B) Ya que se puede cambiar siempre t en $-t$ no se pierde nada de generalidad en suponer que a través de la rama Γ_V superior a la derecha \dot{x} va de $+$ a $-$, $+$ arriba, $-$ debajo. Entonces, hay dos posibilidades para la siguiente rama Γ_H cuando uno se mueve a la derecha cruzando esa rama: \dot{y} yendo de $+$ a $-$ o de $-$ a $+$. Esto se indica por uno de los dos símbolos $+-$, $-+$.

C) Sólo están trazadas en los esquemas las mitades a la derecha del eje de las y . A cada configuración en el hemiplano derecho podemos asociar su imagen bajo una reflexión en el eje de las y . Será entonces posible "pegar" ciertas mitades derechas con ciertas mitades izquierdas formando un retrato-fase completo. Ahora, observemos que en las zonas entre dos ramas sucesivas los signos de \dot{x} y \dot{y} permanecen fijos. Entonces, en un retrato fase completo, si existen ramas en cada mitad, habrá dos zonas entre una rama extrema de la mitad derecha y una rama extrema de la mitad izquierda. Uno de estos pares de zonas contendrá al semieje superior de las y , y el otro al semieje inferior de las y . Ahora, una condición necesaria y suficiente para pegar dos mitades de un retrato-fase es que los signos de \dot{x} y \dot{y} sean los mismos para las mitades izquierda y derecha en las zonas limitadas por el mismo semieje de las y . En estas zonas el vector (\dot{x}, \dot{y}) apunta en un cuadrante fijo.

D) La tabla ha sido construída con el siguiente criterio. En cada caso particular la primera línea representa la distribución de los signos de \dot{x} . Las barras verticales representan las ramas Γ_V , y los signos simplemente cambian al cruzar éstas. Análogamente, para la segunda línea y \dot{y} , salvo que ahora las barras verticales representan ramas Γ_H . Por supuesto que no están representadas las ramas consecutivas que aparecen un número par de veces en el mismo cuadrante.

E) Las últimas dos columnas contienen los signos de los vectores extremos (vectores en los puntos sobre el eje de las y), al reflejarse sobre el eje de las y . Así en el caso 19 los signos \mp en la columna II se determinan de la siguiente manera:—es el opuesto del signo que aparece al comienzo del renglón \dot{x} ; $+$ es el mismo signo que aparece al comienzo del renglón \dot{y} . Análogamente para la columna III y los signos finales de los renglones \dot{x} , \dot{y} . La colocación de estos signos en las columnas II, III es para señalar como se pueden pegar mitades izquierdas y derechas.

Observación General. Al describir las posibles mitades izquierda y derecha de los esquemas y dar condiciones para poder pegarlas, estamos dando condiciones necesarias, que no se deben interpretar como condiciones suficientes para la

DESCRIPCIÓN TABULAR DE LOS ESQUEMAS TÍPICOS

Los números marginales son consecutivos a los de algunos esquemas del texto

Esquema N°	sgn	Cuadrantes		(Eje de las "y")	Signos de las mitades reflejadas sobre el eje de las "y"		
		I	IV		II	III	
9	\dot{x}	fijo (no hay					
	\dot{y}	fijo ramas)					
10a	\dot{x}	+	-			-	+
	\dot{y}		-			-	-
10b	\dot{x}	+	-			-	+
	\dot{y}		+			+	+
11a	\dot{x}		-			+	+
	\dot{y}	+	-			+	-
11b	\dot{x}		+			-	-
	\dot{y}	+	-			+	-
12a	\dot{x}		+			-	-
	\dot{y}	-	+			-	+
12b	\dot{x}		-			+	+
	\dot{y}	-	+			-	+
13a	\dot{x}		-			+	+
	\dot{y}	+	-	-	+	+	+
13b	\dot{x}		+			-	-
	\dot{y}	+	-	-	+	+	+
14a	\dot{x}		+	+	-	-	-
	\dot{y}	-	+	+	-	-	-
14b	\dot{x}		-	-	-	+	+
	\dot{y}	-	+	+	-	-	-
15	\dot{x}		+	-		-	+
	\dot{y}	+	-			+	-
16	\dot{x}		+	-		-	+
	\dot{y}	+	+			-	+
17	\dot{x}		-			-	+
	\dot{y}	+	-			+	-
18	\dot{x}	+	-			-	+
	\dot{y}	-	+			-	+
19	\dot{x}	+	-			-	+
	\dot{y}	+	-	-	+	+	+
20	\dot{x}	+	-			-	+
	\dot{y}	-	+	+	-	-	-
21	\dot{x}		+	-		-	+
	\dot{y}	-	+	-		-	-
22	\dot{x}		+	-		-	+
	\dot{y}	+	-	+		+	+
23	\dot{x}		+	-		-	+
	\dot{y}	-	+	-	-	+	+
24	\dot{x}		+	-		-	+
	\dot{y}	+	-	+	+	-	-
25	\dot{x}		+	-	-	+	-
	\dot{y}	+	-			+	-

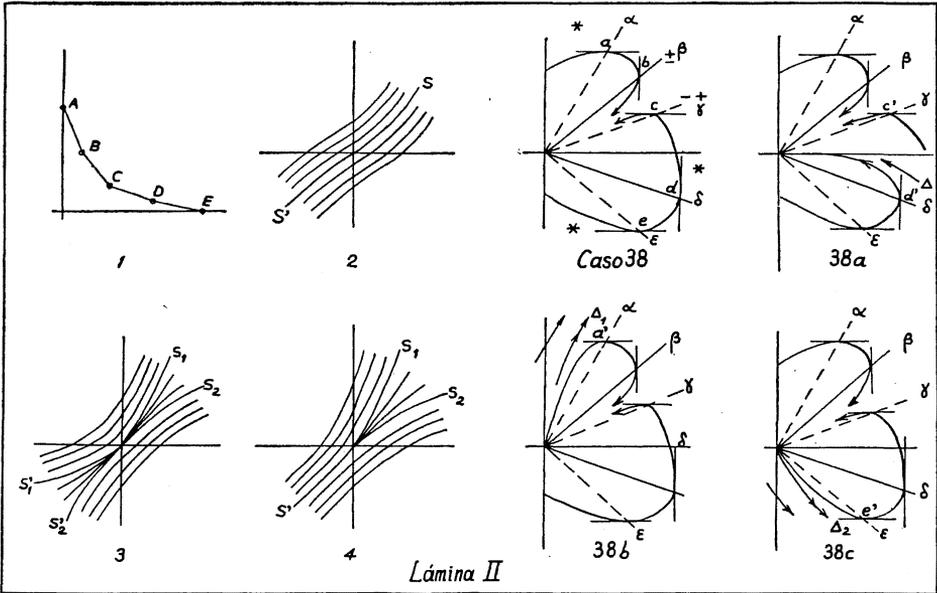
DESCRIPCIÓN TABULAR DE LOS ESQUEMAS TÍPICOS

Esquema N°	sgn	Cuadrantes		(Eje de las "y")	Signos de las mitades reflejadas sobre el eje de las "y"			
		I	IV		II	III		
26	\dot{x}	+		-		+	-	-
	\dot{y}	-		+			-	+
27	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	+		-	-		+	+
28	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	-		+		-	-	-
29	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	-		+		-	-	-
30	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	+		-	+		+	+
31	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	-		+	-		+	+
32	\dot{x}	+		-	+		+	-
	\dot{y}	+		-	+		+	-
33	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	+		-	-		+	+
34	\dot{x}	+		-	+		+	-
	\dot{y}	-		+	+		-	+
35	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	+		-		+	+	-
36	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	-		+	+		+	+
37	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	-		+	-		+	+
38	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	+		-	+		-	+
39	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	-		+	-		+	-
40	\dot{x}	+		-	-		+	-
	\dot{y}	+		-	+		+	+

existencia actual de un sistema con determinadas mitades pegadas del modo indicado. La existencia de mitades izquierda o derecha por si mismas es trivial, puesto que las ramas se pueden realizar por medio de líneas rectas.

10. Se presentan ahora dos situaciones especiales que constituyen excepciones en nuestra descripción general: cuando hay ramas de una sólo clase o cuando no hay ramas de ninguna clase. En los casos 10 a 14 hemos descrito lo que ocurre cuando hay ramas de una sólo clase. Pueden entonces presentarse dos tipos posibles de trayectorias, que constituyen los subcasos *a* y *b*.

El caso con una mitad izquierda y una derecha ambas sin ramas Γ es más complicado. Implica que el vector (\dot{x}, \dot{y}) apunta dondequiera hacia el mismo cuadrante. Ahora bien, los únicos sectores posibles alrededor del origen son abanicos e hiperbólicos. Debe haber algunos sectores hiperbólicos ya que de otro



modo el origen sería un nodo simple y esta posibilidad evidentemente queda excluida, ya que hay sectores hiperbólicos, deben existir cuando menos dos separatrices. Examinando las configuraciones posibles se encuentra que deben ser de alguno de los tres tipos representados en las figs. II-2, II-3, II-4, con dos, cuatro o tres separatrices.

Observación. Se ha supuesto siempre en los casos 9–40 de la tabla que las alternativas discutidas en conexión con los esquemas de la lámina I, figs. 3, 6, 7, 8, 9 no se presentan. Para precisar, en los casos 9–40 hemos excluido la posibilidad de trayectorias de acceso que perturben la reducción general de ramas Γ_V , Γ_H módulo 2.

11. Para ilustrar la utilización de la tabla, consideremos uno de los casos más complicados: el número 38.

Suponemos pues, como se ha dicho antes que se han podido hacer todas las reducciones de ramas Γ módulo 2, sin considerar posibles trayectorias de acceso. Sin embargo, a fin de tener una discusión completa en esta caso particular, ciertos sectores se han marcado con * (fig. II-38). Estos sectores son los que se pueden afectar esencialmente por la presencia de nuevas trayectorias de acceso—sectores “ambiguos”—Las diferentes posibilidades que se pueden presentar, están descritas por las figuras II-38a, b, c.

Las ramas Γ del esquema se denotan por $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$. Examinemos ahora el esquema. A través de α, γ aumenta primero y disminuye después. La trayectoria sólo puede descender hasta que alcanza β . Entre α y β no puede dar vuelta hacia el origen, ya que el vector (\dot{x}, \dot{y}) siempre apunta en el cuarto cuadrante, e igualmente en toda la zona.

Por lo tanto la trayectoria debe alcanzar β , después de lo cual x disminuye, y como la trayectoria no puede cruzar γ , debe tender hacia el origen. Comenzando ahora en c , la trayectoria de nuevo solamente puede tender hacia el origen. Trazándola hacia atrás, sin embargo, y ya que por hipótesis en la zona $\delta\gamma$ no hay trayectoria de acceso, tenemos que llegar a un punto d sobre δ . Yendo nuevamente hacia atrás y ya que en la zona $\delta\epsilon$ el vector (\dot{x}, \dot{y}) está en el primer cuadrante, es decir, apunta a través de la zona, la única posibilidad para el arco de trayectoria es que alcance ϵ en un cierto punto e (yendo hacia atrás). Esto dá el análisis completo del esquema. Vamos ahora a discutir el efecto producido por nuevas trayectorias de acceso posibles en las zonas marcadas con asterisco (fig. II-38).

Hay tres sectores de esta clase: Entre el semieje superior de las y y α ; sector $\delta\epsilon$; y sector entre ϵ y el semieje inferior de las y .

La segunda zona es la más interesante. El efecto de la trayectoria de acceso se muestra en la figura II-38a. Como la nueva trayectoria de acceso Δ no puede ser cruzada por ninguna otra trayectoria, el arco trazado hacia atrás desde c' debe tender hacia Δ . El arco trazado hacia adelante desde d' sólo puede tender hacia el origen, o sea, que es una trayectoria de acceso.

El efecto de las trayectorias de acceso en los otros dos sectores ambiguos se indica en las figuras II-38b y II-38c. Por ejemplo en la fig. II-38b el arco trazado hacia atrás desde a' sólo puede tender al origen, ya que no puede cruzar la nueva trayectoria de acceso Δ_1 . Análogamente para la figura II-38c y el arco trazado hacia atrás desde e' .

Recordemos que las trayectorias de acceso Δ muy bien pueden representar abanicos de tales curvas.

§5. PUNTOS SINGULARES IRREGULARES

12. Refiriéndonos a nuestro análisis del comienzo (Nº 3), en el caso irregular era imposible eliminar los factores x, y en los segundos miembros X, Y de las ecuaciones diferenciales o en sus primeros términos X_p, Y_p . Esto significa que las ramas Γ podían ser tangentes a los ejes o aún más, coincidir con uno u otro de los ejes. Estrictamente hablando, ésto no introduce ninguna diferencia mayor en el argumento, y lo que hemos dicho para el caso regular, también se aplica con pequeñas modificaciones al caso irregular. Hay sin embargo otro enfoque interesante del asunto basado en el uso de coordenadas polares y que nos proponemos bosquejar en su aplicación al caso irregular. No hay duda que este método es también aplicable al caso regular, pero la situación geométrica total se hace más nebulosa.

Recordemos que los puntos singulares irregulares se caracterizan por la propiedad de que el indicador $\Delta = xY_p - yX_p \equiv 0$, para ver lo que ocurre es conveniente expresar x y y en coordenadas polares. Aplicando las bien conocidas fórmulas

$$(12.1) \quad \begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ r^2\dot{\theta} &= x\dot{y} - y\dot{x} \end{aligned}$$

obtenemos inmediatamente

$$(12.2) \quad \begin{aligned} r\dot{r} &= (xX_p + yY_p) + \dots \\ r^2\dot{\theta} &= (xY_p - yX_p) + \dots = \Delta(x, y) + \dots \end{aligned}$$

Podemos escribir el sistema (12.2) en la forma

$$(12.3) \quad \begin{aligned} r\dot{r} &= U_{p+1}(x, y) + U_{p+2}(x, y) + \dots \\ r^2\dot{\theta} &= \Delta_{p+1}(x, y) + \Delta_{p+2}(x, y) + \dots \end{aligned}$$

con $\Delta = \Delta_{p+1}$, y los demás términos con significado evidente. Denotando por $U_j(\theta)$, $\Delta_j(\theta)$ al resultado de reemplazar en $U_j(x, y)$ y $\Delta_j(x, y)$, x y y por $\sin \theta$ y $\cos \theta$ obtenemos

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= r^{p+1}U_{p+1}(\theta) + r^{p+2}U_{p+2}(\theta) + \dots \\ r^2\dot{\theta} &= r^{p+1}\Delta_{p+1}(\theta) + r^{p+2}\Delta_{p+2}(\theta) + \dots \end{aligned}$$

Introduzcamos el cambio en la variable tiempo definido por $dt_1 = r^{p-1} dt$.

Escribiendo todavía t en lugar de t_1 por comodidad, el sistema se vuelve:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= rU_{p+1}(\theta) + r^2U_{p+2}(\theta) + \dots \\ \dot{\theta} &= \Delta(\theta) + r\Delta_{p+2}(\theta) + \dots \end{aligned}$$

donde nuevamente hemos escrito Δ en lugar de Δ_{p+1} . Ya que $\Delta \equiv 0$ el sistema toma la forma:

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= r^2R_{p-1} + Z_{p+2} + \dots \\ r^2\dot{\theta} &= U_{p+2} + \dots \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $dt_1 = r^{pdt}$ y escribiendo nuevamente t en lugar de t_1 , se sigue el sistema

$$(12.4) \quad \begin{aligned} \dot{r} &= R_{p-1}(\theta) + rZ_{p+2}(\theta) + \dots \\ \dot{\theta} &= U_{p+2}(\theta) + rU_{p+3}(\theta) + \dots \end{aligned}$$

Las únicas singularidades posibles sobre la línea $r = 0$ ocurren para las soluciones comunes de las ecuaciones

$$(12.5) \quad R_{p-1}(\theta) = 0, \quad U_{p+2}(\theta) = 0.$$

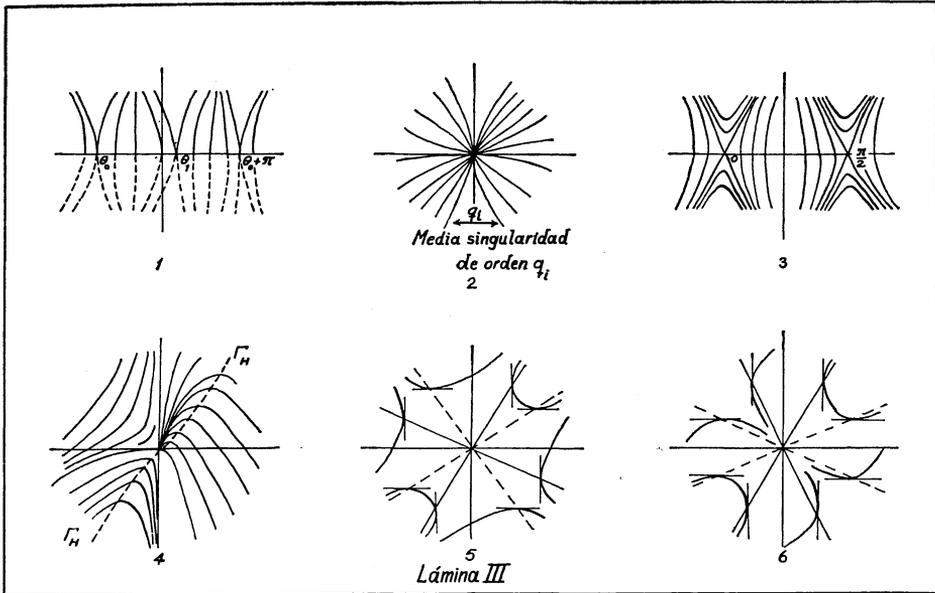
Tenemos ahora dos posibilidades:

I. El sistema (12.5) no tiene soluciones reales. Entonces el eje de las θ consiste sólo de puntos ordinarios. Cada punto de este eje es cruzado por una sola trayectoria. El retrato fase (x, y) consiste entonces de un nodo con una sola trayectoria de acceso en cada dirección.

II. El sistema (12.5) tiene soluciones reales. Sea θ_0 una tal solución. Si ponemos $\theta - \theta_0 = \xi$, $r = \eta$ el sistema toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \alpha\xi^q + \dots \\ \dot{\xi} &= \beta\xi r + \dots \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta \neq 0$ y $q \leq p - 1$. En consecuencia el origen en el plano (ξ, η) o lo



que es lo mismo el punto $\theta = \theta_0$, $r = 0$ es una singularidad de orden $< p$. Si suponemos conocidos todos los tipos de puntos singulares de orden $< p$, conoceremos el tipo de la singularidad presente, o más bien, la mitad de esta singularidad en un lado de uno de los ejes. Puede presentarse un número finito de tales singularidades de orden $< p$ distribuidas a lo largo del eje, las cuales conjuntamente servirán para caracterizar de un modo completo la singularidad irregular de orden p .

Los esquemas III-1 y III-2 ilustran la situación, en el esquema III-2 tenemos $\sum q_i < p$.

Observación evidente: Ya que los órdenes de los nuevos puntos singulares son $< p$ el proceso terminará a lo más después de p etapas.

Es interesante notar que en el caso de una singularidad irregular se puede tener un abanico que no incluya ninguna rama Γ_V o Γ_H . El procedimiento que vamos a seguir también servirá para demostrar que existen de hecho, singularidades irregulares que no son meros nodos.

13. Supongamos que hemos obtenido relaciones de la forma

$$(13.1) \quad \begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} = F(x, y) \\ r^2\dot{\theta} &= x\dot{y} - y\dot{x} = G(x, y) \end{aligned}$$

donde F y G son no unidades. Nos preguntamos bajo que condiciones se pueden resolver para \dot{x} , \dot{y} , también como no unidades. Resolviendo (13.1) para \dot{x} , \dot{y} encontramos

$$(13.2) \quad \begin{aligned} xF(x, y) - yG(x, y) &= \dot{x}r^2 = M(x, y)r^2 \\ yF(x, y) + xG(x, y) &= \dot{y}r^2 = N(x, y)r^2, \end{aligned}$$

donde M y N son de la forma:

$$\begin{aligned} M &= M_m + M_{m+1} + \dots, \\ N &= N_m + N_{m+1} + \dots, \end{aligned}$$

en que M_i y N_i son polinomios homogéneos de grado i .

Resolviendo ahora (13.2) para F y G y cancelando r^2 , obtenemos:

$$\begin{aligned} (13.3) \quad F &= Mx + Ny = \sum_{\mu=m}^{\infty} M_{\mu}x + N_{\mu}y, \\ G &= Nx - My = \sum_{\mu=m+1}^{\infty} N_{\mu}x - M_{\mu}y, \end{aligned}$$

donde $M_mx + N_my$ en la primera ecuación tiene raíces reales y

$$(13.4) \quad N_mx - M_my \equiv 0$$

en la segunda, porque queremos tener una singularidad irregular.

De (13.4) se sigue inmediatamente

$$N_m = R_{m-1}y, \quad M_m = R_{m-1}x.$$

Substituyendo estos valores en la forma de grado menor de F en (13.3) obtenemos como término de grado mínimo $R_{m-1}x^2 + R_{m-1}y^2 = R_{m-1}r^2$, así que podemos expresar (13.3) en la forma

$$\begin{aligned} (13.5) \quad F &= R_{m-1}r^2 + \dots \\ G &= 0 + N_{m+1}x - M_{m+1}y + \dots \end{aligned}$$

Es claro que podemos escoger

$$\begin{aligned} R_{m-1}(\theta) &= \alpha \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ M_{m+1}(\theta) &= \beta \cos \theta (\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta) \\ N_{m+1}(\theta) &= \gamma \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta) \\ N_{m+2}(\theta) &= \delta (\operatorname{sen}^5 \theta + \cos^5 \theta) = M_{m+2} \end{aligned}$$

Las únicas singularidades posibles sobre la línea $r = 0$ están en los puntos $\operatorname{sen} \theta = 0$, $\cos \theta = 0$. Por lo tanto $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ son puntos singulares y no hay otros entre ellos.

Vamos a escoger ahora las constantes de manera que en el plano (r, θ) tengamos dos puntos puertos en los puntos $r = 0$, $\theta = 0$, y $r = 0$, $\theta = \pi/2$.

Ya que el eje de las θ no es trayectoria, las separatrices de los puntos puerto en el plano (r, θ) , cruzarán este eje. El eje de las θ fuera de éstos puntos puerto consistirá de puntos ordinarios. Las configuraciones en el plano (r, θ) serán en consecuencia como en la fig. III-3.

Tenemos ahora:

$$\dot{r} = \alpha \operatorname{sen} \theta \cos \theta + r\{\beta \cos^2 \theta (\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta) + \gamma \operatorname{sen}^2 \theta (\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta)\}$$

$$= \alpha \theta + \beta r + \dots$$

$$\dot{\theta} = (\gamma \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta) - \beta \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta)$$

$$+ r\{(\delta \cos \theta (\operatorname{sen}^5 \theta + \cos^5 \theta) - \delta \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen}^5 \theta + \cos^5 \theta)\}$$

$$= (\gamma - \beta) \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta) + r\delta (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta) \cdot$$

$$\cdot (\operatorname{sen}^5 \theta + \cos^5 \theta) = (\gamma - \beta)\theta + r\delta + \dots$$

Pongamos ahora $\theta^* = \pi/2 - \theta$, substituyamos arriba y desarrollemos ahora en potencias de r y θ^* .

Tenemos entonces:

$$\dot{r} = \alpha \operatorname{sen} \theta^* \cos \theta^* + r(\beta \operatorname{sen}^2 \theta^* + \gamma \cos^2 \theta^*) \cdot$$

$$\cdot (\operatorname{sen}^3 \theta^* + \cos^3 \theta^*) = \alpha \theta^* + \gamma r + \dots$$

$$-\dot{\theta}^* = (\gamma - \beta) \operatorname{sen} \theta^* \cos \theta^* (\operatorname{sen}^3 \theta^* + \cos^3 \theta^*)$$

$$+ r\delta (\operatorname{sen} \theta^* - \cos \theta^*) (\operatorname{sen}^5 \theta^* + \cos^5 \theta^*)$$

$$= (\gamma - \beta)\theta^* - r\delta + \dots$$

$$\dot{\theta}^* = (\beta - \gamma)\theta^* + r\delta + \dots$$

Recapitulando, tenemos en el punto $r = \theta = 0$, el sistema

$$\dot{\theta} = (\gamma - \beta)\theta + r\delta + \dots$$

$$\dot{r} = \alpha\theta + \beta r + \dots$$

y en el punto $r = 0$, $\theta^* = 0$ (i.e. $\theta = \pi/2$) el sistema

$$\dot{\theta}^* = (\beta - \gamma)\theta^* + r\delta + \dots$$

$$\dot{r} = \alpha\theta^* + \gamma r + \dots$$

La condición para que haya punto puerto es que el determinante de los términos de primer grado sea negativo. Para nuestros dos puntos se necesita entonces

$$\beta(\gamma - \beta) - \alpha\delta < 0$$

$$\gamma(\gamma - \beta) + \alpha\delta > 0.$$

Los siguientes valores evidentemente satisfacen ambas desigualdades:

$$\alpha = \delta = 1, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{4}$$

En consecuencia, esta elección de valores dará lugar a la configuración de la figura III-3. La imagen de esta figura en coordenadas cartesianas da claramente el tipo de abanico que se busca.

Como la dirección de aproximación incluye todos los valores entre 0 y $\pi/2$, el abanico construido no incluye ramas Γ_V o Γ_H .

§6. ALGUNAS APLICACIONES

14. Vamos ahora a aplicar a algunos ejemplos los varios métodos desarrollados.

Los dos primeros ejemplos son los puntos singulares elementales u ordinarios y el punto de Bendixson. Estrictamente hablando estos dos tipos no se pueden considerar como ilustraciones completas ya que su conocimiento se ha supuesto de hecho en la discusión. Sin embargo, los discutiremos simplemente para demostrar que nuestro método general puede dar alguna información interesante aunque simple en estos casos.

Primer ejemplo. Sistema con términos lineales y ambas raíces características no nulas. Este es de la forma

$$(14.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + [x, y]_2 \\ \dot{y} &= cx + dy + [x, y]_2; \quad ad - bc \neq 0. \end{aligned}$$

Discutamos simplemente el caso en que las raíces características λ, μ , son reales y distintas. Una transformación lineal simple reduce el sistema a la forma

$$(14.2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + A(x, y) \\ \dot{y} &= \mu y + B(x, y) \end{aligned}$$

donde A, B son de la forma $[x, y]_2$.

Hay una sola Γ_V y una sola Γ_H ; Γ_V es tangente al eje de las y , y Γ_H al de las x . Notemos que estamos apartándonos aquí de la "posición general" de Γ_V y Γ_H . Como en casi todos los métodos matemáticos generales es conveniente no ser demasiado rígidos y hacer simplificaciones en los casos elementales.

Si λ, μ son del mismo signo, los vectores apuntan dondequiera en la dirección general de las bisectrices y el retrato-fase es el de un nodo. Si λ y μ son de signos contrarios, los vectores en los cuadrantes I y III apuntan en la dirección general de la segunda bisectriz y en los cuadrantes II, IV en la dirección general de la primera bisectriz, y así el retrato-fase resulta ser el de un puerto. Estos resultados, bien conocidos por cierto, se obtienen aquí sin ningún trabajo; ésto es suficiente para ilustrar el método de las ramas Γ .

Por supuesto que no se obtienen los "puntos finos" de la situación. Esto, sin embargo, requiere un tratamiento un poco más analítico, el cual no es necesario abordar aquí.

15. *Segundo ejemplo. El sistema de Bendixson.*

Este es un punto singular con una raíz característica diferente de cero. Ya ha sido tratado por Bendixson [3] pp. 45-58 y por Lefschetz en su libro de ecuaciones diferenciales [12]. Lefschetz demostró que el sistema se puede reducir a la forma

$$(15.1) \quad \frac{dx}{dt} = y - A(x), \quad \frac{dy}{dt} = \{y - B(x)\}E(x, y); \quad E(0, 0) = 1.$$

Los principales aspectos revelados por el estudio del sistema son:

a) Hay cuatro direcciones de aproximación para las trayectorias de acceso: Las dos direcciones a lo largo de la primera bisectriz y las dos direcciones a lo largo del eje de las x .

b) Hay exactamente dos trayectorias de acceso que tienden a la primera bisectriz en las dos direcciones opuestas. Todas las otras trayectorias de acceso tienden al eje de las x siguiendo las dos direcciones opuestas.

c) Sea R_1 la región abajo de la primera bisectriz y R_2 la región sobre la primera bisectriz. Los retratos-fase en cada una pueden ser de los siguientes tipos: Un sector nodal, o bien dos sectores hiperbólicos separados por una sola separatriz. Estos dos sectores se pueden combinar de tres maneras posibles.

Teniendo presentes los hechos anteriores, el análisis de un punto singular de Bendixson expresado en sistemas diferentes de (15.1) se vuelve muy simple. Por ejemplo, consideremos un sistema de un tipo que se presenta frecuentemente en las aplicaciones, a saber

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + [x, y]_2}{x^{2s}}, \quad s \geq 1.$$

Supondremos que $b > 0$, $a < 0$, así que la Γ_H está en los cuadrantes 1° y 3°. Como el eje de las y es solución, la única posibilidad es un nodo a la derecha del eje de las y y dos sectores hiperbólicos a la izquierda. Si tuviéramos $b < 0$ y $a > 0$ los dos lados estarían intercambiados. El esquema III-4 ilustra el primer caso.

Recordemos la siguiente propiedad debida a Bendixson:

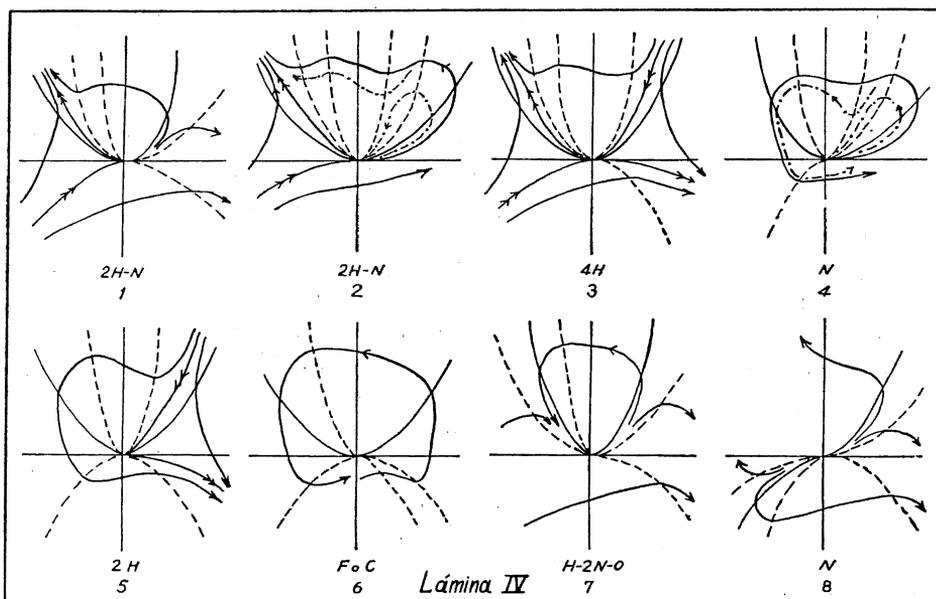
Teorema: El retrato fase local de un punto crítico aislado con una sola raíz característica no nula es de los siguientes tres tipos: nodo, punto puerto (cuatro separatrices), o dos sectores hiperbólicos y un abanico (tres separatrices). Los índices correspondientes son 1, -1, 0, de modo que pueden servir para distinguir los tres tipos.

16. *Tercer ejemplo.* Las raíces características de los términos lineales son ambas nulas, pero su matriz no es idénticamente nula. El sistema se puede reducir en un sistema adecuado de coordenadas a la forma

$$(16.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + [x, y]_2, & \lambda &\neq 0 \\ \dot{y} &= [x, y]_2. \end{aligned}$$

En una nota previa (Contributions to the theory of non linear oscillations Vol. III, Annals of Math. Studies, Princeton U.P) el autor ha estudiado el sistema (16.1). Su propiedad principal es que se puede reducir mediante transformaciones analíticas adecuadas, a un sistema ortogonal a uno del tipo de Bendixson en la forma:

$$(16.2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [y^2 - 2A(x)y + B(x)]E(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= y - C(x), \end{aligned}$$



donde $A(x) = [x]_1$, B y C son del tipo $[x]_2$. Ahora bien, el sistema (16.1) se analiza muy fácilmente tomando en cuenta las observaciones anteriores y orthogonalizando. Se han deducido las ocho configuraciones posibles, (Lamina IV). Se han presentado sin embargo, algunos casos ambiguos, indicado por líneas $- \cdot - \cdot - \cdot - \cdot -$ en los esquemas IV-2 y IV-4 dando lugar en particular, a posibles sectores ovales. En una nota en el vol IV de las "Contributions" mencionadas antes, S. Lefschetz ha eliminado estas ambigüedades mediante un análisis bastante difícil.

Hay que observar que en los esquemas: H, N, O, F, C significan respectivamente: Sector hiperbólico, sector modal, (abanico), sector oval, foco y centro.

Del examen de los esquemas resulta claro que IV-1 y IV-2 son esencialmente equivalentes, quedando en realidad siete tipos distintos.

17. *Cuarto ejemplo.* Los segundos miembros son de la forma $[x, y]_2$.

Suponiendo presentes los términos de segundo grado, podemos, mediante nuestras transformaciones, poner el sistema en la forma

$$\dot{x} = (y^2 + A_1(x)y + A_2(x))E_1(x, y)$$

$$\dot{y} = (y^2 + B_1(x)y + B_2(x))E_2(x, y).$$

Todo depende de los factores de los paréntesis. Claramente hay muchos casos especiales y no sería de interés real considerarlos todos, problema que en sí no presentaría dificultad.

Ya que simplemente estamos buscando ilustraciones de la teoría general, vamos a seleccionar dos casos especiales. Como primer caso supongamos que las ramas Γ_V y Γ_H tienen la disposición de la figura III-5. Es decir, las ramas

Γ_V y Γ_H existen en los cuatro cuadrantes y se separan entre sí. También suponemos que los signos que tienen las ramas Γ_V y Γ_H en el primer cuadrante son respectivamente \pm y $+-$. En esta configuración tenemos seis sectores hiperbólicos.

La figura III-6 corresponde al caso en que hay ramas en los cuatro cuadrantes, pero no se separan entre sí. La disposición de los signos que tienen las ramas Γ del primer cuadrante es como en el caso anterior. En esta configuración hay dos sectores hiperbólicos y dos nodos.

Examinando las figuras III-5 y III-6 se ve que en ambos ejemplos, módulo abanicos, no se presentan ambigüedades.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO E
INSTITUTO NACIONAL DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA DE MÉXICO

BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. LEFSCHETZ, Lectures on Differential Equations, Annals of Mathematics Study No. 14, Princeton University Press, 1946.
- [2] W. HUREWICZ, Ordinary Differential Equations with Emphasis on Geometric Methods, Brown University, Providence, R. I., 1943.
- [3] I. BENDIXSON, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Mathematica (Stockholm), vol. 24 (1901), pp. 1-88.
- [4] E. GOURSAT, A Course in Mathematical Analysis, Vol. II, part I (English edition), Ginn and Company, Boston, etc., 1904.
- [5] S. BOCHNER AND W. T. MARTIN, Several Complex Variables, Princeton Mathematical Series No. 10, Princeton University Press, 1948.
- [6] J. J. STOKER, Non Linear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems, Interscience Publishers, New York, 1950.
- [7] M. FROMMER, *Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen*, Mathematische Annalen, vol. 99 (1928), pp. 222-272.
- [8] H. POINCARÉ, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Oeuvres de Henri Poincaré, Tome I, Gauthier-Villars, Paris, 1928, pp. 90-222.
- [9] H. FORSTER, *Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes*, Mathematische Zeitschrift, vol. 43 (1937-38), pp. 271-320.
- [10] BRIOT ET BOUQUET, *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles*, Journal de l'Ecole Polytechnique, t. 36 (1856), pp. 133-198.
- [11] S. LEFSCHETZ, *On the critical points of a class of differential equations*, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. IV, Annals of Mathematics Studies No. 41, Princeton University Press, 1958, pp. 19-28.
- [12] —, Differential Equations: Geometric Theory, Interscience Publishers, New York, 1957.