SOBRE LA FORMULA DEL PRODUCTO PARA OPERACIONES COHOMOLOGICAS DE SEGUNDO ORDEN

POR JOSÉ ADEM[1]

Introducción

Hace algunos años, W. T. Wu sugirió la forma de construir la operación Φ, introducida por el autor en [3; (6.1)], por medio de las operaciones funcionales de Steenrod, como sigue. Sea $Y = K(Z, q)$ un complejo de Eilenberg-MacLane y $\gamma \in H^q(Y; Z)$ la clase fundamental. Si $u \in H^q(X; Z)$, es tal que $\mathrm{Sq}^2 u = 0$, consideramos $f: X \to Y$, donde $f^*\gamma = u$. Se tienen, $f^*\mathrm{Sq}^2\gamma = 0$, $\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2\gamma = 0$, y podemos definir

$$\Phi(u) = \mathrm{Sq}_f^2\mathrm{Sq}^2\gamma.$$

Ahora, se sigue de los resultados de Serre ([13]), sobre la cohomología de Y, que $f^*H^{q+3}(Y; Z_2) = 0$, y, por lo tanto, se tiene que

$$\Phi(u) \in H^{q+3}(X; Z_2)/\mathrm{Sq}^2H^{q+1}(X; Z_2).$$

Esta es la construcción de Wu para la operación Φ.[2]

En este trabajo, se generaliza el método de Wu y se la hace aplicable a la construcción de operaciones Φ asociadas con relaciones de grado r de la forma $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{Sq}^{2^k} = 0$, donde $r \leq 2^{n+1}$. En particular, estas operaciones incluyen a las operaciones $\Phi_{i,j}$ de Adams ([1]).

El uso de operaciones funcionales permite calcular cociclos representantes de $\Phi(u)$. Usando estos cociclos, se establece la siguiente fórmula del producto:

$$\Phi(u \otimes v) = \Phi(u) \otimes v + u \otimes \Phi(v).$$

Por consiguiente, Φ es una operación *primitiva*, y, en particular, también lo son las $\Phi_{i,j}$.

En §1 se generalizan las operaciones funcionales clásicas y en §2 se establece la construcción de Φ por medio de estas operaciones. En §3 se enuncian los resultados principales, entre ellos, la fórmula del producto para Φ. Esta última depende del resultado (3.6), análogo para operaciones funcionales, y cuya demostración se da en la última sección. El resto del trabajo se consagra, principalmente, a establecer el material necesario para demostrar (3.6).

Finalmente, el autor desea hacer patente su agradecimiento al Profesor F. P. Peterson por varias discusiones relacionadas con el presente trabajo.

1. Operaciones funcionales

Sea A el álgebra de Steenrod generada por los cuadrados y sus relaciones. Cada elemento homogéneo $\theta \in A$ determina una operación cohomológica

[1] Alfred P. Sloan Research Fellow.

[2] Lo anterior le fue comunicado al autor por J-P. Serre en 1952.

$\theta: H^q(X; Z_2) \to H^{q+r}(X; Z_2)$, donde r es el grado de θ. *Usaremos únicamente cohomología con coeficientes en Z_2 y en el futuro omitiremos el grupo de coeficientes.* Supongamos que

$$\theta = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k , \tag{1.1}$$

donde las α_k, β_k son elementos de A, respectivamente, de grados $r - r_k$, r_k. En forma análoga a la considerada por Cartan en [9], factorizamos θ mediante las operaciones

$$H^q(X) \xrightarrow{\beta} \textstyle\sum_{k=0}^{n} H^{q+r_k}(X) \xrightarrow{\alpha} H^{q+r}(X),$$

donde

$$\beta(v) = (\beta_0(v), \cdots, \beta_n(v)),$$
$$\alpha(u_0, \cdots, u_n) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(u_k),$$

para $v \in H^q(X)$, $u_k \in H^{q+r_k}(X)$. Claramente, $\theta = \alpha\beta$.

Sea $f: X \to K$ una transformación continua. Usando la misma notación de [15; p. 966] consideramos K_f, el espacio de la transformación cilíndrica de f, las inclusiones $i: X \subset K_f$, $k: K \subset K_f$, y la transformación $f': K_f \to K$ que comprime K_f en K. Recordamos que resultan: $f'i = f$, $f'k$ igual a la identidad de K en K, kf' homotópica a la identidad de K_f en K_f, y, por consiguiente, el par f', k constituye una equivalencia homotópica de K y K_f. Luego, formamos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to \sum_{k=0}^{n} H^{q+r_k-1}(X) & \xrightarrow{\delta} & \sum_{k=0}^{n} H^{q+r_k}(K_f, X) & \xrightarrow{j^*} & \sum_{k=0}^{n} H^{q+r_k}(K_f) & \xrightarrow{i^*} & \sum_{k=0}^{n} H^{q+r_k}(X) \to \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\
\to H^{q+r-1}(X) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+r}(K_f, X) & \xrightarrow{j^*} & H^{q+r}(K_f) & \xrightarrow{i^*} & H^{q+r}(X) \to
\end{array}$$

Siguiendo el método de Steenrod, con este diagrama definimos la operación funcional α_f. Así, sea $u \in \sum_{k=0}^{n} H^{q+r_k}(K)$ tal que $f^*u = 0$, $\alpha(u) = 0$. Si $u = (u_0, \cdots, u_n)$, donde cada $u_k \in H^{q+r_k}(K)$, estas condiciones son equivalentes con

$$f^*u_k = 0, \qquad \text{para } k = 0, \cdots, n,$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(u_k) = 0.$$

Ahora, si $u' = f'^*u$, se tiene que $i^*u' = 0$, $\alpha(u') = 0$, y por lo tanto, podemos definir $\alpha_f(u)$. Resulta,

$$\alpha_f(u) \in H^{q+r-1}(X)/[f^*H^{q+r-1}(K) + \alpha \textstyle\sum_{k=0}^{n} H^{q+r_k-1}(X)]. \tag{1.2}$$

Aquí, el módulo se define como en el caso clásico, además es obvio que

$$\alpha \textstyle\sum_{k=0}^{n} H^{q+r_k-1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H^{q+r_k-1}(X), \tag{1.3}$$

donde, a la izquierda la suma es directa, y a la derecha la suma representa el menor subgrupo de $H^{q+r-1}(X)$ conteniendo los subgrupos $\alpha_k H^{q+r_k-1}(X)$.

En forma análoga construímos operaciones funcionales asociadas con β. Se demuestra facilmente que

$$\beta_f = (\beta_{0f}, \cdots, \beta_{nf}).$$

Obviamente, para $n = 0$ resultan en ambos casos las operaciones funcionales clásicas. Se verifica en forma automática que las propiedades clásicas, con las modificaciones naturales, también se satisfacen para este tipo de operaciones.

Sean K, X, Y espacios topológicos, $f:X \to K$, $g:Y \to X$ transformaciones contínuas, consideremos como antes $\theta = \alpha\beta$, y suponemos que cada β_k es un monomio. Para $u \in H^q(K)$ suponemos que se tienen $(fg)^*u = 0$, $\theta(u) = 0$, $\beta(f^*u) = 0$. Con estas condiciones quedan definidas las operaciones funcionales $\theta_{fg}(u)$, $\alpha_f\beta(u)$, $\beta_g(f^*u)$. Sea $Q(Y)$ el subgrupo de $H^{q+r-1}(Y)$ definido por

$$Q(Y) = \theta H^{q-1}(Y) + g^*f^*H^{q+r-1}(K) + g^*\alpha \textstyle\sum_{k=0}^n H^{q+r_k-1}(X).$$

TEOREMA 1.4. *Módulo $Q(Y)$ se tiene,*

$$\theta_{fg}(u) = g^*\alpha_f\beta(u) + \alpha[\beta_g(f^*u)].$$

Claramente, $Q(Y)$ es el menor módulo común para las tres operaciones consideradas. La demostración de (1.4) se dará en §8.

2. Operaciones cohomológicas de segundo orden

Si en (1.1) consideramos $\theta = 0$, resulta la relación $\alpha\beta = 0$, o en forma equivalente,

$$\textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k\beta_k = 0,$$

donde r = grado $\alpha_k\beta_k$ para $k = 0, \cdots, n$. Supongamos que $\beta_k = \mathrm{Sq}^{2^k}$ y además que $r \leq 2^{n+1}$. Luego,

$$\alpha\beta = \textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k \mathrm{Sq}^{2^k} = 0. \tag{2.1}$$

Sea $K = K(\pi, q)$ un espacio de Eilenberg-MacLane donde π es un grupo cíclico de orden dos y sea $\gamma_q \in H^q(K)$ la clase básica. Dado $u \in H^q(X)$ consideramos $f:X \to K$ tal que $u = f^*\gamma_q$. Suponemos además que

$$\mathrm{Sq}^{2^k}u = 0, \qquad (k = 0, \cdots, n). \tag{2.2}$$

Luego, se tienen $\beta(u) = f^*\beta(\gamma_q) = 0$, $\alpha\beta(\gamma_q) = 0$, y, por lo tanto, podemos definir la operación funcional $\alpha_f\beta(\gamma_q)$. Puesto que $r \leq 2^{n+1}$, se sigue de (2.2) y de los resultados de Serre y Cartan ([13], [8]) sobre la cohomología de $K(\pi, q)$ que $f^*H^{q+r-1}(K) = 0$. Por lo tanto, el módulo (1.2) de $\alpha_f\beta(\gamma_q)$ se reduce a (1.3). Luego, si definimos

$$\Phi(u) = \alpha_f\beta(\gamma_q), \tag{2.3}$$

resulta

$$\Phi(u) \in H^{q+r-1}(X)/\textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k H^{q+2^k-1}(X). \tag{2.4}$$

Demostraremos a continuación que Φ satisface los axiomas de Adams y que, por consiguiente, es una operación cohomológica estable de segundo orden asociada con la relación (2.1). En forma más precisa, usando los conceptos introducidos por Adams en [2], tomamos C_0, C_1 como los módulos graduados y libres sobre A, generados, el primero por c de grado 0, y el segundo por c_k con $k = 0, \cdots, n$, donde el grado $c_k = 2^k$, y definimos $d: C_1 \to C_0$ con $dc_k = \mathrm{Sq}^{2^k}c$. Si $z = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k c_k$, resulta $dz = 0$, y se tiene el siguiente

TEOREMA 2.5. *La operación Φ definida por* (2.3) *es una operación cohomológica estable de segundo orden asociada con* (d, z). *Además, Φ como operación cohomológica es única.*

DEMOSTRACIÓN: Para la primera parte del Teorema necesitamos comprobar los 5 axiomas de Adams [1]. El axioma (1), que se refiere al dominio de definición de Φ, se satisface trivialmente. El axioma (2) se sigue de (2.4). El axioma (3), que se refiere a la naturalidad de Φ, se sigue de la naturalidad para las operaciones funcionales.

Consideremos el axioma (4). Sea (X, Y) un par y $g^*: H^q(X) \to H^q(Y)$ el homomorfismo inducido por la inclusión. Sea $u \in H^q(X)$ tal que $g^*u = 0$. Claramente, si $\Phi(u)$ está definida, entonces también lo está $\beta_g(u)$. En estas condiciones, el axioma (4) afirma que

$$(2.6) \qquad g^*\Phi(u) = \alpha[\beta_g(u)], \qquad \bmod g^*\alpha \textstyle\sum_{k=0}^{n} H^{q+2^k-1}(X).$$

La demostración de (2.6) es inmediata a partir de (1.4), tomando $\theta = 0, f: X \to K(\pi, q), g: Y \subset X$. El módulo $Q(Y)$ se reduce al de (2.6) puesto que en nuestro caso $f^*H^{q+r-1}(K) = 0$.

El axioma (5) afirma que Φ conmuta con la suspensión. Claramente, al definir $\Phi(u)$ podemos tomar $K(\pi, q) = \Omega K(\pi, q+1)$, donde $\Omega K(\pi, q+1)$ es el espacio de curvas cerradas basadas en un punto y_0. Sea $Y = K(\pi, q+1)$ y LY el espacio de curvas que parten de y_0. Sean CX, SX, respectivamente, el cono sobre X y la suspensión reducida de X. Dada $f: X \to \Omega Y$, sean $g: SX \to Y$, $h: CX \to LY$ las transformaciones asociadas con f de acuerdo con [2; Lemma 3.3.4]. Con h definimos la transformación $F: (CX, X) \to (LY, \Omega Y)$. Sea $p: (LY, \Omega Y) \to (Y, y_0)$ la proyección de curvas en su punto terminal y sea $t: (CX, X) \to (SX, x_0)$ la transformación que comprime X en x_0. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
H^q(\Omega Y) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f^*"] & H^{q+1}(LY, \Omega Y) \arrow[d, "F^*"] & H^{q+1}(Y) \arrow[l, "p^*"'] \arrow[d, "g^*"] \\
H^q(X) \arrow[r, "\delta"] & H^{q+1}(CX, X) & H^{q+1}(SX) \arrow[l, "t^*"']
\end{tikzcd}$$

donde $\sigma = t^{*-1}\delta$ es la suspensión geométrica y $\sigma' = \delta^{-1}p^*$ es la suspensión en el espacio fibrado $LY \to Y$. Si γ_{q+1} es la clase básica en $H^{q+1}(Y)$ resulta $\gamma_q = \sigma'\gamma_{q+1}$ como clase básica en $H^q(\Omega Y)$. Es inmediato que si $\Phi(u)$ está definida, entonces $\Phi(\sigma u)$ está definida y necesitamos demostrar que $\sigma\Phi(u) = \Phi(\sigma u)$. Utilizando propiedades de las operaciones funcionales, resulta

$$\begin{aligned}\sigma\Phi(u) &= \sigma\alpha_f[\beta(\gamma_q)] = t^{*-1}\delta\alpha_f[\beta(\delta^{-1}p^*\gamma_{q+1})]\\ &= t^{*-1}\alpha_F[\beta(p^*\gamma_{q+1})] = \alpha_g[\beta(\gamma_{q+1})] = \Phi(\sigma u).\end{aligned}$$

Por último, la demostración de la unicidad de Φ es inmediata a partir de un resultado de Adams ([1; Theorem 3]), puesto que se tiene $(C_0/dC_1)_{r-1} = 0$.

Observaciones:

(1) La fórmula (2.3) es la generalización directa del método de W. T. Wu mencionado en la Introducción.

(2) Un caso especial de (2.6) fue establecido por primera vez, por Shimada en [14; (6.1)]. Resultados análogos son los demostrados por Peterson y Stein en [12; (6.1)], y por el autor en [5; (17.5)].

(3) Con $\theta = 0$, el Teorema (1.4) puede interpretarse, mediante (2.3), como generalización de un caso especial del resultado [12; (7.1)] de Peterson y Stein.

3. La fórmula del producto

Sea $\alpha\beta = 0$ con $r \leq 2^{n+1}$, como en (2.1). Dados dos espacios topológicos X, Y, sean $u \in H^p(X)$, $v \in H^q(Y)$, dos clases no nulas, tales que

(3.1) $$\beta(u) = \beta(v) = 0.$$

Como es bien sabido, las operaciones de la forma Sq^{2^k} constituyen un sistema de generadores del álgebra de Steenrod ([3]). Combinando este resultado con la fórmula de Cartan ([7]),

(3.2) $$\mathrm{Sq}^i(u \otimes v) = \textstyle\sum_{j=0}^{i} \mathrm{Sq}^{i-j}u \otimes \mathrm{Sq}^j v,$$

se demuestra fácilmente que (3.1) es equivalente con

(3.3) $$\beta(u \otimes v) = 0.$$

Luego, con (3.1) podemos definir $\Phi(u)$, $\Phi(v)$, $\Phi(u \otimes v)$.

Si $f: X \to K(\pi, p)$, $g: Y \to K(\pi, q)$ son tales que $f^*\gamma_p = u$, $g^*\gamma_q = v$, de acuerdo con (2.3), se tienen

(3.4) $$\Phi(u) = \alpha_f\beta(\gamma_p), \qquad \Phi(v) = \gamma_g\beta(\gamma_q).$$

Consideremos la composición

$$X \times Y \xrightarrow{f \times g} K(\pi, p) \times K(\pi, q) \xrightarrow{h} K(\pi, p + q),$$

donde h es tal que $h^*\gamma_{p+q} = \gamma_p \otimes \gamma_q$. Si $t = h(f \times g)$, se tiene $t^*\gamma_{p+q} = (f^* \otimes g^*)h^*\gamma_{p+q} = u \otimes v$, luego

$$\Phi(u \otimes v) = \alpha_t\beta(\gamma_{p+q}).$$

Por otra parte,

$$\alpha_t\beta(\gamma_{p+q}) = \alpha_{f\times g}\beta(h^*\gamma_{p+q}) = \alpha_{f\times g}\beta(\gamma_p \otimes \gamma_q),$$

y por consiguiente,

$$\Phi(u \otimes v) = \alpha_{f \times g}\beta(\gamma_p \otimes \gamma_q). \tag{3.5}$$

En general, usaremos un mismo símbolo, digamos X, para representar, un espacio topológico, un complejo de celdas asociado con el espacio y el complejo de cadenas enteras asociadas con un complejo de celdas. Salvo isomorfismo, el módulo de (3.5) es

$$M(X \otimes Y) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H^{p+q+2^k-1}(X \otimes Y).$$

Las relaciones entre (3.4) y (3.5) están expresadas por el siguiente

TEOREMA 3.6. *Módulo $M(X \otimes Y)$ se tiene,*

$$\alpha_{f \times g}\beta(\gamma_p \otimes \gamma_q) = \alpha_f\beta(\gamma_p) \otimes g^*\gamma_q + f^*\gamma_p \otimes \alpha_g\beta(\gamma_q).$$

La demostración de (3.6) se dará en §11.

Interpretando (3.6) por medio de las operaciones cohomológicas (3.4) y (3.5), se demuestra el

TEOREMA 3.7. *Sea $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{Sq}^{2^k} = 0$ una relación de grado r, con $r \leq 2^{n+1}$. Sea Φ la operación cohomológica de segundo orden asociada con esta relación. Si $u \in H^p(X)$, $v \in H^q(Y)$ son tales que $\mathrm{Sq}^{2^k}u = \mathrm{Sq}^{2^k}v = 0$ para $0 \leq k \leq n$, entonces, están definidas $\Phi(u)$, $\Phi(v)$, $\Phi(u \otimes v)$, y, módulo $M(X \otimes Y)$, se tiene que*

$$\Phi(u \otimes v) = \Phi(u) \otimes v + u \otimes \Phi(v).$$

Si $X = Y$, la fórmula (3.7) vale al sustituir $\smile$-productos en lugar de $\otimes$. Esto es inmediato, ya que Φ conmuta con los homomorfismos inducidos por las transformaciones continuas. En particular, si $u = v$, y si u^m denota la m potencia de u en el sentido del $\smile$-producto, se obtiene el

COROLARIO 3.8. *Si la operación $\Phi(u)$ está definida, entonces, también lo está $\Phi(u^m)$, y se tiene,*

$$\Phi(u^m) = mu^{m-1}\Phi(u).$$

Adams, en sus importantes trabajos sobre operaciones cohomológicas ([1], [2]), introduce una familia de operaciones $\Phi_{i,j}$, donde $0 \leq i \leq j$, $j \neq i + 1$. Las $\Phi_{i,j}$ están definidas por medio de ciertas relaciones de la forma $\sum_{k=0}^{j} \alpha_k \mathrm{Sq}^{2^k} = 0$, donde $r = 2^i + 2^j$. Claramente resulta $r \leq 2^{j+1}$, y obtenemos el

COROLARIO 3.9. *El Teorema 3.7 vale para las operaciones de Adams $\Phi_{i,j}$.*

Observación:

Bajo condiciones muy generales, Adams establece en [2] una fórmula del producto. Sin embargo, su fórmula, además de los términos de (3.7), contiene una expresión de la forma $\sum_t \Phi_t'(u) \otimes \Phi_t''(v)$, donde Φ_t', Φ_t'' son operaciones de segundo orden no conocidas explícitamente.

4. Construcciones auxiliares

Para demostrar los Teoremas (1.4) y (3.6) estableceremos fórmulas en cocadenas, análogas a las de [15], que permitan el cálculo de α_f. Con este fin, desarrollaremos primero cierto material auxiliar.

Sea π el grupo cíclico de orden 2 y generador x y V el complejo canónico π-libre y acíclico con $\{e_i\}$ como π-base y operador frontera definido por $\partial e_{2i+1} = \Delta e_{2i}$, $\partial e_{2i+2} = \sum e_{2i+1}$, donde $\Delta = x - 1$, $\sum = x + 1$.

Si $S(2^n)$ es el grupo simétrico de grado 2^n, denotaremos por G_n su 2-subgrupo de Sylow construído en [17; p. 214]. Este subgrupo puede construirse inductivamente como sigue. Primero, $G_1 = \pi$. Ahora, suponiendo construido G_{n-1} hacemos operar π en el producto directo $G_{n-1}^2 = G_{n-1} \oplus G_{n-1}$ mediante la permutación de los factores. Luego, G_n es la *extensión separable* de G_{n-1}^2 por π.

Describiremos un sistema de generadores de G_n. Tomamos 2^n objetos escritos en renglón y los dividimos en 2^{n-i} bloques iguales, cada bloque con 2^i objetos. Como grupo de permutaciónes, un sistema de generadores de G_n es

$$x_i^j \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq 2^{n-i}, \tag{4.1}$$

donde x_i^j opera en el bloque j e intercambia los 2^{i-1} primeros objetos de dicho bloque con los 2^{i-1} últimos.

Usando el complejo V, construiremos por inducción un complejo W_n que resulta G_n-libre y acíclico. En efecto, podemos tomar

$$W_n = V \otimes V^2 \otimes \cdots \otimes V^{2^{n-1}}, \tag{4.2}$$

donde V^k es el producto tensorial de k copias de V. Para justificar esto, supongamos construido W_{n-1} como en (4.2) En forma natural $W_{n-1} \otimes W_{n-1}$ resulta un G_{n-1}^2-complejo y también un π-complejo al operar π como permutación de los factores (ver [4; p. 211], [17; p. 215]). Luego, $W_{n-1} \otimes W_{n-1}$ es un G_n-complejo acíclico que es G_{n-1}^2-libre. Por otra parte, si consideramos que G_{n-1}^2 opera en V como la identidad, V resulta un G_n-complejo acíclico que es π-libre. El producto $V \otimes W_{n-1}^2$ con las operaciones diagonales resulta G_n-libre y acíclico. Finalmente con el isomorfismo natural,

$$\kappa_n : V \otimes W_{n-1}^2 \to W_n, \tag{4.3}$$

que intercambia los factores da W_{n-1}^2, se obtiene W_n como complejo G_n-libre y acíclico. Esta construcción permite determinar las operaciones de G_n en W_n. En particular, se pueden precisar las operaciones de los generadores x_i^j en W_n.

Sea X un complejo de celdas regular y sea X^{2^n} el producto tensorial con 2^n factores, considerado como G_n-complejo al operar permutando los factores según (4.1). Igual que en [17; p. 198], tomamos una aproximación diagonal G_n-equivariante

$$\psi_n' : W_n \otimes X \to X^{2^n}. \tag{4.4}$$

Partiendo de una aproximación diagonal π-equivariante

$$\varphi' : V \otimes X \to X^2,$$

construimos ψ'_n por inducción, definiendo

(4.5) $$\psi'_n = \psi'^2_{n-1}\nu(1 \otimes \varphi')\mu(\kappa_n^{-1} \otimes 1),$$

donde κ_n es el isomorfismo (4.3) y

$$\mu: V \otimes W^2_{n-1} \otimes X \to W^2_{n-1} \otimes V \otimes X, \qquad \nu: W^2_{n-1} \otimes X^2 \to (W_{n-1} \otimes X)^2,$$

son las transformaciones naturales que intercambian los factores.

Por simplicidad, el dual de φ' lo consideramos ya compuesto con la transformación

$$\zeta: V \otimes_\pi X^{*2} \to V \otimes_\pi X^{2*},$$

de [17; p. 197], donde $X^* = \mathrm{Hom}\,(X, Z_2)$. Resulta,

(4.6) $$\varphi: V \otimes_\pi X^{*2} \to X^*.$$

Análogamente, con el dual de ψ'_n se obtiene,

(4.7) $$\psi_n: W_n \otimes_{G_n} X^{*2^n} \to X^*.$$

A partir de (4.5) se demuestra que,

(4.8) $$\psi_n = \varphi(1 \otimes \varphi^2(1 \otimes \varphi^2(\cdots)))\lambda,$$

donde, $\lambda: W_n \otimes X^{*2^n} \to V \otimes (V \otimes (\cdots \otimes (V \otimes X^{*2})^2 \cdots)^2)^2$ es la transformación natural que intercambia los factores (ver [17; p. 215]).

Sea u una q-cocadena de X^*. Con una φ fija, definimos

$$\mathrm{Sq}^j u = \varphi(e_i \otimes u^2), \qquad \text{donde } i = q - j.$$

Ahora, sea $\alpha \in A$ un elemento homogéneo, y supongamos que

(4.9) $$\alpha(u) = \sum \mathrm{Sq}^{j_1} \cdots \mathrm{Sq}^{j_t} u,$$

donde, en general, t puede variar en la suma. Se sigue de (4.8) que existen elementos bien determinados,

(4.10) $$z_t = e_{i_1} e_{i_2}^2 \cdots e_{i_t}^{2^{t-1}}$$

tales que

(4.11) $$\alpha(u) = \sum \psi_t(z_t \otimes u^{2^t}).$$

Estudiaremos el siguiente problema. Si $u = \delta a$, encontrar $\alpha^*(a)$ tal que

(4.12) $$\delta\alpha^*(a) = \alpha(\delta a).$$

Claramente, si $\alpha = \mathrm{Sq}^j$ podemos tomar (ver [5; p. 197])

(4.13) $$\alpha^*(a) = \mathrm{p}^j(a) = \varphi(e_{i-1} \otimes a^2) + \varphi(e_i \otimes a\delta a)$$

Luego, si α es como en (4.9), tomamos

(4.14) $$\alpha^*(a) = \sum \mathrm{p}^{j_1} \cdots \mathrm{p}^{j_t}(a).$$

Se comprueba inmediatamente que $\delta\alpha^*(a) = \alpha(\delta a)$. Además, usando (5.3), se establece por inducción en t que

$$\xi_t^F(d \otimes z_t \otimes m^{2^t}) = \mathrm{p}^{j_1} \cdots \mathrm{p}^{j_t}(a).$$

Por consiguiente, (5.6) coincide con (4.14).

Estableceremos dos lemas que se aplicarán posteriormente.

Lema 5.7. *Si variamos a por un $(q - 1)$-cociclo c de X^*, resulta,*

$$\alpha^*(a + c) \sim \alpha^*(a) + \alpha(c),$$

donde $\sim$ significa igualdad módulo una cofrontera.

Demostración: Es inmediata a partir de (4.14), observando primero que $\mathrm{p}^j(a + c) \sim \mathrm{p}^j(a) + \mathrm{Sq}^j(c)$, $\mathrm{p}^j(a + \delta b) \sim \mathrm{p}^j(a)$, y luego iterando estos resultados.

En el segundo lema compararemos $\alpha^*(a + a')$ con $\alpha^*(a)$, donde $\delta a'$ es otra q-cofrontera de X^*. Primero, construimos $H: I \otimes M \to X^*$ donde $H(d \otimes m) = a + a'$, $H(d_0 \otimes m) = \delta(a + a')$, $H(d_1 \otimes m) = 0$. Consideramos la suma $F + H$ y los productos tensoriales de estas transformaciones. Luego, en los términos del desarrollo del producto tensorial $(F + H)^{2^t}$ operamos con G_t mediante sus generadores x_i^j descritos en (4.1). Si $\Sigma_i^j = x_i^j + 1$, se demuestra por inducción que

$$(5.8) \qquad (F + H)^{2^t} = F^{2^t} + H^{2^t} + \textstyle\sum_{i=1}^{t} \{\Sigma_i^1 \cdots \Sigma_i^{2^{t-i}}(A_i)^{2^{t-i}}\},$$

donde cada A_i es una suma de términos, cada uno producto de 2^i factores no todos iguales, y cada factor F o H. Además, mod 2, se tiene que $\Sigma_k^j(A_i)^{2^{t-i}} = 0$ para $k \neq i$ y toda $1 \leq j \leq 2^{t-k}$.

Finalmente, usando (5.8) y la equivariancia de las ξ_t, se demuestra fácilmente que

$$[\xi_t^{(F+H)} + \xi_t^F + \xi_t^H](d \otimes z_t \otimes m^{2^t}) \sim 0.$$

Combinando este resultado con (5.6) se obtiene el siguiente

Lema 5.9.

$$\alpha^*(a) + \alpha^*(a + a') \sim \sum \xi_t^{(F+H)}(d \otimes z_t \otimes m^{2^t}).$$

6. Fórmulas para α_f en complejos simpliciales

Denotemos con el mismo símbolo X un complejo simplicial y su realización geométrica como espacio topológico. Si $S(X)$ es el complejo singular del espacio, como es bien sabido ([10; p. 201]), existe una equivalencia homotópica $\lambda': X \to S(X)$, que induce una equivalencia de cocadenas $\lambda: S^*(X) \to X^*$. Sean φ_1', φ' las transformaciones equivariantes que determinan las fórmulas simpliciales para los $\smile_i$-productos, respectivamente, para los complejos singular y simplicial. Es conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V \otimes S(X) & \xrightarrow{\varphi_1'} & S(X) \otimes S(X) \\ \uparrow{\scriptstyle 1 \otimes \lambda'} & & \uparrow{\scriptstyle \lambda'^2} \\ V \otimes X & \xrightarrow{\varphi'} & X \otimes X \end{array}$$

además, cada φ_1', φ' conmuta, respectivamente, con homomorfismos $f_{\#}: S(X) \to S(K)$, inducidos por transformaciones continuas, y con transformaciones simpliciales $f_{\#}: X \to K$ (ver [6; p. 169]). Sean φ, φ_1 los duales de φ', φ_1' ya combinados con la transformación ζ, como en (4.6). Se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_\pi S^*(X)^2 & \xrightarrow{\varphi_1} & S^*(X) \\ \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \lambda^2} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ V \otimes_\pi X^{*2} & \xrightarrow{\varphi} & X^* \end{array}$$

Sea $f: X \to K$ una transformación continua, y

$$\alpha: \textstyle\sum_{k=0}^{n} H^{q_k}(K) \to H^r(K)$$

una operación cohomológica análoga a la α considerada en §1. Por conveniencia, representamos con $\bar{u}_k \in H^{q_k}(K)$ una clase de cohomología, donde u_k denota un representante de la clase. Si $\bar{u} = (\bar{u}_0, \cdots, \bar{u}_n)$,

$$\alpha(\bar{u}) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(\bar{u}_k)$$

donde cada α_k es un elemento homogéneo de A. Supongamos que se tienen

$$f^*(\bar{u}) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha(\bar{u}) = 0, \tag{6.1}$$

de modo que, como en (1.2), se pueda definir la operación funcional $\alpha_f(\bar{u})$. Siguiendo directamente los pasos de Steenrod en [15; p. 979], determinaremos fórmulas para calcular cociclos representantes de $\alpha_f(\bar{u})$.

Consideraremos primero fórmulas para la teoría singular de cohomología y luego las extenderemos a la teoría simplicial. De (6.1), se sigue que existen cocadenas singulares $a_k \in C^{q_k-1}(X)$ $b \in C^{r-1}(K)$, tales que

$$f^{\#}u_k = \delta a_k \qquad (k = 0, \cdots, n), \tag{6.2}$$

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(u_k) = \delta b.$$

Luego definimos

$$w = f^{\#}b + \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^*(a_k), \tag{6.3}$$

donde $\alpha_k^*(a_k)$ se construye, indistintamente, con (4.14) o con (5.6).

TEOREMA 6.4. *La $(r-1)$-cocadena w, definida en (6.3), es un cociclo de $S(X)$ y su clase de cohomología $\bar{w}$ es un representante de $\alpha_f(\bar{u})$. Lo anterior es también* *cierto usando cocadenas simpliciales cuando X y K son complejos simpliciales y f es una transformación simplicial.*

DEMOSTRACIÓN: En esencia, la demostración es igual al a del Teorema 16.3 de [15]. La damos a continuación por contener algunos pasos técnicamente diferentes.

Es inmediato que w resulta un cociclo, ya que $f^{\#}\alpha(u) = \alpha(f^{\#}u)$.

Si variamos b sumándole un cociclo o si variamos cada a_k sumándole un cociclo (ver 5.7), la clase $\bar{w}$ se altera únicamente por un elemento del módulo de $\alpha_f(\bar{u})$. Por lo tanto, podemos demostrar (6.4) con cualquier elección conveniente de las a_k.

En lo que sigue nos referiremos a la notación y al diagrama introducido en §1 para definir $\alpha_f(\bar{u})$ y tomaremos cociclos representantes en cada etapa de la construcción.

Si $u_k' = f'^{\#}u_k$, resultan $i^{\#}u_k' = \delta a_k$, $\alpha(u') = f'^{\#}b$. Extendemos cada $a_k \in C^{q_k-1}(X)$ en $a_k' \in C^{q_k-1}(K_f)$ definiendo el valor de a_k' como cero en los simplejos singulares de $S(K_f)$ que no están en $S(X)$. Claramente, $i^{\#}a_k' = a_k$ y se tiene $i^{\#}(u_k' + \delta a_k') = 0$. Luego, cada $u_k' + \delta a_k' \in Z^{q_k}(K_f, X)$, y si $v_k = \{u_k' + \delta a_k'\}$ representa su clase, se tiene $j^*v_k = f'^*\bar{u}_k$.

Siguiendo con la construcción, necesitamos ahora encontrar una cocadena $w_1 \in C^{r-1}(K_f)$ tal que $w = i^{\#}w_1$ y que $\delta w_1 \in Z^r(K_f, X)$ sea un representante de $\alpha(v)$, donde $v = (v_0, \cdots, v_n)$.

En general, cada operación α_k es de la forma considerada en (4.9), y para construir $\alpha_k^*(a_k)$, de acuerdo con (5.6) tomamos un complejo M_k generado por una q_k-cocadena m_k con $\delta m_k = 0$ y definimos $F_k: I \otimes M_k \to X^*$ como en (5.4). Sea $H_k: I \otimes M_k \to K_f^*$ la transformación definida por $H_k(d \otimes m_k) = a_k'$, $H_k(d_0 \otimes m_k) = u_k' + \delta a_k'$, $H_k(d_1 \otimes m_k) = u_k'$. Se comprueba que $F_k = i^{\#}H_k$. Sea

$$\xi_t^{H_k}: I \otimes W_t \otimes M_k^{2^t} \to K_f^*,$$

la transformación definida como en (5.5) pero con H_k en lugar de F_k. Resulta

$$i^{\#}\xi_t^{H_k} = \xi_t^{F_k}.$$

Ahora, definimos

$$w_1 = f'^{\#}b + \textstyle\sum_{k=0}^{n} \left(\sum \xi_{t_k}^{H_k}(d \otimes z_{t_k} \otimes m_k^{2^{t_k}})\right).$$

Se verifica fácilmente que

$$\delta w_1 = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(u_k' + \delta a_k'),$$

Además, se tiene $w = i^{\#}w_1$; lo que demuestra que (6.3) es un cociclo representante de $\alpha_f(\bar{u})$ para la teoría singular.

Para demostrar la segunda parte del teorema, que se refiere a complejos simpliciales, observamos primero que (6.3) vale para cocadenas simpliciales que son λ-imágenes (ver [15; p. 983]), donde $\lambda: S^*(X) \to X^*$ es la equivalencia de cocadenas mencionada al principio de esta sección. Para completar la demostración necesitamos probar que la clase lateral de $\bar{w}$ es independiente de la elección de las cocadenas u_k, a_k, b. Con las u_k fijas, los cambios en a_k, b ya fueron analizados al principio de la demostración. Supongamos ahora que variamos cada u_k y sean $u_k' = u_k + \delta v_k$ los nuevos representantes de $\bar{u}_k$. Necesitamos determinar cocadenas a_k', b' que verifiquen (6.2) para las u_k', y que nos permitan comparar con la w. Claramente, podemos tomar

$$a_k' = a_k + f^{\#}v_k .$$

Para la b' la situación es un poco más complicada. Con M_k como antes, definimos $B_k: I \otimes M_k \to K^*$, donde $B_k(d \otimes m_k) = v_k$, $B_k(d_0 \otimes m_k) = u_k'$, $B_k(d_1 \otimes m_k) = u_k$. Es fácil ver que se puede elegir

$$b' = b + \textstyle\sum_{k=0}^{n} \left(\sum \xi_{t_k}^{B_k}(d \otimes z_{t_k} \otimes m_k^{2^{t_k}})\right).$$

Ahora, si

$$w' = f^{\#}b' + \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^*(a_k'),$$

demostraremos que $w \sim w'$. Se comprueba fácilmente que $f^{\#}B_k = F_k + F_k'$, donde F_k y F_k' son, respectivamente, las transformaciones que se utilizan para construír $\alpha_k^*(a_k)$ y $\alpha_k^*(a_k')$, de acuerdo con (5.6). Luego, aplicando el Lema 5.9 se obtiene que

$$\alpha_k^*(a_k') + \alpha_k^*(a_k) \sim f^{\#} \textstyle\sum \xi_{t_k}^{B_k}(d \otimes z_{t_k} \otimes m_k^{2^{t_k}}),$$

y de aquí, es inmediato comprobar que $w \sim w'$, lo que demuestra la segunda parte del teorema.

7. Fórmulas para α_f en complejos regulares

El producto de dos complejos simpliciales es un complejo regular y se utilizará en la demostración de (3.6). Por lo tanto, necesitamos extender el Teorema (6.4) para complejos regulares.

Sean X, K dos complejos regulares y $f: |X| \to |K|$ una transformación propia, que induce un homomorfismo de cadenas $f_{\#}: X \to K$ (ver [17; p. 205]). Con la notación de §4, formamos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
W_t \otimes X & \xrightarrow{1 \otimes f_{\#}} & W_t \otimes K \\
\downarrow{\scriptstyle \psi_t'} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{1t}'} \\
X^{2^t} & \xrightarrow{f_{\#}^{2^t}} & K^{2^t}
\end{array}$$

donde ψ_t' y ψ_{1t}' están construídas de acuerdo con (4.5). En general, este diagrama no es conmutativo y existe una homotopía G_t-equivariante $\nu_t': W_t \otimes X \to K^{2^t}$, tal que

$$\partial \nu_t' + \nu_t' \partial = f_{\#}^{2^t} \psi_t' - \psi_{1t}'(1 \otimes f_{\#}). \tag{7.1}$$

Considerando las transformaciones duales, se obtiene

$$\begin{tikzcd} W_t \otimes K^{*2^t} \arrow[r, "1 \otimes f^{\#2^t}"] \arrow[d, "\psi_{1t}"] & W_t \otimes X^{*2^t} \arrow[d, "\psi_t"] \\ K^* \arrow[r, "f^{\#}"] & X^* \end{tikzcd}$$

y el dual de (7.1), resulta

$$\delta\nu_t + \nu_t\delta = f^{\#}\psi_{1t} + \psi_t(1 \otimes f^{\#2^t}), \tag{7.2}$$

donde X^* y K^* se toman con coeficientes en Z_2.

Si z_t es como en (4.10) y si u_k es un cociclo de K^*, se sigue que $z_t \otimes u_k^{2^t}$ es un cociclo de $W_t \otimes K^{*2^t}$, y, aplicando (7.2), se tiene

$$\delta\nu_t(z_t \otimes u_k^{2^t}) = f^{\#}\psi_{1t}(z_t \otimes u_k^{2^t}) + \psi_t[z_t \otimes (f^{\#}u_k)^{2^t}]. \tag{7.3}$$

Sea $\bar{u} = (\bar{u}_0, \cdots, \bar{u}_n)$, donde cada $u_k \in H^{q_k}(K)$, y suponemos que $\bar{u}$ satisface (6.1). Luego elegimos cocadenas a_k y b de modo que se cumpla (6.2) y construimos

$$w = f^{\#}b + \textstyle\sum_{k=0}^{n} \{\alpha_k^*(a_k) + \sum_{t_k} \nu_{t_k}(z_{t_k} \otimes u_k^{2^{t_k}})\}. \tag{7.4}$$

TEOREMA 7.5. *La $(r - 1)$-cocadena w, construída en* (7.4), *es un cociclo de X y su clase de cohomología $\bar{w}$ es un representante de $\alpha_f(\bar{u})$.*

DEMOSTRACIÓN: De (7.3), se obtiene que (mod. 2),

$$f^{\#}\alpha_k(u_k) + \alpha_k(f^{\#}u_k) + \delta\textstyle\sum_{t_k} \nu_{t_k}(z_{t_k} \otimes u_k^{2^{t_k}}) = 0.$$

Luego, es inmediato que $\delta w = 0$.

La demostración de la segunda parte se hará comparando con las fórmulas simpliciales. Sean X_1, K_1 subdivisiones simpliciales, respectivamente, de X, K, y sean $j_{\#}:X \to X_1$, $k_{\#}:K_1 \to K$ las equivalencias de cadena asociadas con ellas. Tomamos las subdivisiones suficientemente finas de modo que exista una transformación simplicial $f_{1\#}:X_1 \to K_1$ y una homotopía $\lambda_{\#}:X_1 \to K$, tales que

$$\partial\lambda_{\#} + \lambda_{\#}\partial = k_{\#}f_{1\#} - f_{\#}j_{\#}. \tag{7.6}$$

El dual de (7.6) es

$$\delta\lambda^{\#} + \lambda^{\#}\delta = f_1^{\#}k^{\#} - j^{\#}f^{\#}. \tag{7.7}$$

Ahora, si $u_k' = k^{\#}u_k$, aplicando (7.7) se obtiene que

$$\begin{aligned} f_1^{\#}(u_k') &= j^{\#}f^{\#}(u_k) + \delta\lambda^{\#}(u_k) \\ &= \delta(j^{\#}a_k + \lambda^{\#}u_k) = \delta a_k' \end{aligned} \tag{7.8}$$

donde $a_k' = j^{\#}a_k + \lambda^{\#}u_k$.

Formenos el diagrama siguente:

$$\begin{array}{ccccccc} W_t \otimes X_1 & \xrightarrow{1 \otimes j_\#} & W_t \otimes X & \xrightarrow{1 \otimes f_\#} & W_t \otimes K & \xleftarrow{1 \otimes k_\#} & W_t \otimes K_1 \\ \downarrow \psi'_{0t} & & \downarrow \psi'_t & & \downarrow \psi'_{1t} & & \downarrow \psi'_{2t} \\ X_1^{2^t} & \xrightarrow{j_\#^{2^t}} & X^{2^t} & \xrightarrow{f_\#^{2^t}} & K^{2^t} & \xleftarrow{k_\#^{2^t}} & K_1^{2^t} \end{array}$$

donde, ψ'_{0t} y ψ'_{2t} se consideran construídas con las fórmulas simpliciales. Luego,

$$f_{1\#}^{2^t}\psi'_{0t} = \psi'_{2t}(1 \otimes f_{1\#}).$$

Para las otras transformaciones construimos homotopías G_t-equivariantes

$$\nu'_{0t}:W_t \otimes X_1 \to X^{2^t}, \qquad \nu'_{1t}:W_t \otimes K_1 \to K^{2^t},$$

similares a (7.1), y tales que

$$\text{(7.9)} \qquad \partial\nu'_{0t} + \nu'_{0t}\partial = j_\#^{2^t}\psi'_{0t} - \psi'_t(1 \otimes j_\#),$$

$$\text{(7.10)} \qquad \partial\nu'_{1t} + \nu'_{1t}\partial = k_\#^{2^t}\psi'_{2t} - \psi'_{1t}(1 \otimes k_\#).$$

Igual que en (7.2), tomando el dual de (7.10), se obtiene

$$\delta\nu_{1t} + \nu_{1t}\delta = k^\#\psi_{1t} + \psi_{2t}(1 \otimes k^{\#2^t}).$$

Considerando ν_{1t_k} y aplicando esta relación a $z_{t_k} \otimes u_k^{2^{t_k}}$, resulta

$$\psi_{2t_k}(z_{t_k} \otimes u'^{2^{t_k}}) = k^\#\psi_{1t_k}(z_{t_k} \otimes u^{2^{t_k}}) + \delta\nu_{1t_k}(z_{t_k} \otimes u_k^{2^{t_k}}).$$

De aquí, es claro que si definimos,

$$\text{(7.11)} \qquad b' = k^\# b + \textstyle\sum_{k=0}^n \{\sum_{t_k} \nu_{1t_k}(z_{t_k} \otimes u^{2^{t_k}})\},$$

se tiene,

$$\textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k(u'_k) = \delta b'.$$

Sea

$$\text{(7.12)} \qquad w' = f_1^\# b' + \textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k^*(a'_k),$$

donde a'_k, b' son, respectivamente, las cocadenas de (7.8), (7.11). Se sigue de (6.4) que w' es un representante de $\alpha_f(k^*\bar{u})$ y, como $j^\#$ y $k^\#$ son equivalencias de cocadenas, para demostrar el teorema basta verificar que $j^\# w \sim w'$.

Formamos $j^\# w + w'$ y sustituimos a'_k y b' en función de a_k y b, de acuerdo con (7.8) y (7.11). Luego, usando (7.7), y el dual de (7.9), se obtiene que

$$j^\# w + w' \sim \textstyle\sum_{k=0}^n \{\lambda^\#\alpha_k(u_k) + \alpha_k^*(j^\# a_k) + \alpha_k^*(j^\# a_k + \lambda^\# u_k)\}$$
$$+ \textstyle\sum_{k=0}^n \{\sum_{t_k} [f_1^\#\nu_{1t_k} + j^\#\nu_{t_k} + \nu_{0t_k}(1 \otimes f^{\#2^{t_k}})](z_{t_k} \otimes u_k^{2^{t_k}})\}.$$

Con una k fija, demostraremos que la suma de los términos que resultan es cohomóloga a cero. Obviamente, basta demostrar esto último suponiendo que

α_k es un monomio. Para evitar muchos índices, definimos $\theta = \alpha_k$, $v = u_k$, $z_t = z_{t_k}$, $a = a_k$. Entonces, vamos a demostrar que

$$\begin{aligned}(7.13)\qquad & \lambda^{\#}\theta(v) + \theta^{*}(j^{\#}a) + \theta(j^{\#}a + \lambda^{\#}v) \\ & \quad + [f_1^{\#}\nu_{1t} + j^{\#}\nu_t + \nu_{0t}(1 \otimes f^{\#2^t})](z_t \otimes v^{2^t}) \sim 0.\end{aligned}$$

Sea $\Gamma_{\#}: W_t \otimes X_1 \to K^{2^t}$ la transformación G_t-equivariante, definida como sigue:

$$\Gamma_{\#} = \nu'_{1t}(1 \otimes f_{1\#}) - \nu'_t(1 \otimes j_{\#}) - f_{\#}^{2^t}\nu'_{0t} + \psi'_{1t}(1 \otimes \lambda_{\#}).$$

Se comprueba directamentamente que

$$(7.14)\qquad \partial\Gamma_{\#} + \Gamma_{\#}\partial = [(k_{\#}f_{1\#})^{2^t} - (f_{\#}j_{\#})^{2^t}]\psi'_{0t}.$$

Construiremos una segunda homotopía análoga a (7.14). Sea $\lambda': I \otimes X_1 \to K$ la transformación de cadena definida como sigue: $\lambda'(d \otimes \sigma) = \lambda_{\#}(\sigma)$, $\lambda'(d_0 \otimes \sigma) = -f_{\#}j_{\#}(\sigma)$, $\lambda'(d_1 \otimes \sigma) = k_{\#}f_{1\#}(\sigma)$. Luego, consideramos la transformación G_t-equivariante $\Lambda': I \otimes W_t \otimes X_1 \to K^{2^t}$, definida por

$$(7.15)\qquad \Lambda' = \lambda'^{2^t}\mu_t(1 \otimes \psi'_{0t})(g_t \otimes 1),$$

donde g_t es como en (5.3) y $\mu_t: I^{2^t} \otimes X_1^{2^t} \to (I \otimes X_1)^{2^t}$ es la transformación que intercambia los factores. Si $\Lambda_{\#}: W_t \otimes X_1 \to K^{2^t}$ es la transformación definida por $\Lambda_{\#}(w \otimes \sigma) = \Lambda'(d \otimes w \otimes \sigma)$, para $w \in W_t$ y $\sigma \in X_1$, se verifica que

$$\partial\Lambda_{\#} + \Lambda_{\#}\partial = [(k_{\#}f_{1\#})^{2^t} - (f_{\#}j_{\#})^{2^t}]\psi'_{0t}.$$

Luego, existe una homotopía G_t-equivariant $P_{\#}$, tal que

$$(7.16)\qquad \partial P_{\#} - P_{\#}\partial = \Gamma_{\#} - \Lambda_{\#}.$$

Ahora, tomando el dual de (7.16) y valuándolo en $z_t \otimes v^{2^t}$, se obtiene que

$$\lambda^{\#}\theta(v) + [f_1^{\#}\nu_{1t} + j^{\#}\nu_t + \nu_{0t}(1 \otimes f^{\#2^t})](z_t \otimes v^{2^t}) + \Lambda^{\#}(z_t \otimes v^{2^t}) \sim 0.$$

Para analizar el término $\Lambda^{\#}(z_t \otimes v^{2^t})$ estudiaremos primero el dual de Λ'. Sea $\Lambda: I \otimes W_t \otimes K^{*2^t} \to X_1^{*}$ el dual de Λ'. Resulta,

$$(7.17)\qquad \Lambda = \psi_{0t}(1 \otimes \lambda^{2^t})\rho_t(g_t \otimes 1),$$

donde $\lambda: I \otimes K^{*} \to X_1^{*}$ es el dual de λ', y $\rho_t: I^{2^t} \otimes W_t \otimes K^{*2^t} \to W_t \otimes (I \otimes K^{*})^{2^t}$ es la transformación que intercambia los factores. La expresión (7.17) es similar a (5.5). Además, se tiene que (ver (7.8)), $\lambda(d \otimes v) = \lambda^{\#}v$, $\lambda(d_0 \otimes v) = \delta j^{\#}a$, $\lambda(d_1 \otimes v) = \delta(j^{\#}a + \lambda^{\#}v)$. Por lo tanto, aplicando el Lema (5.9), resulta

$$\Lambda^{\#}(z_t \otimes v^{2^t}) = \Lambda(d \otimes z_t \otimes v^{2^t}) \sim \theta^{*}(j^{\#}a) + \theta^{*}(j^{\#}a + \lambda^{\#}v).$$

Esto demuestra (7.13) y termina la demostración del teorema.

8. Demostración del Teorema 1.4

Trabajaremos con complejos y transformaciones simpliciales y utilizaremos las fórmulas desarrolladas en §6.

Sea $u \in H^q(K)$ una clase de cohomología que satisface las hipótesis de (1.4), y consideremos transformaciones de cocadenas $f^{\#}:K \to X$, $g^{\#}:X \to Y$, inducidas, respectivamente, por f y g. Elegimos cocadenas a, a_k, b, tales que

$$g^{\#}f^{\#}u = \delta a,$$

$$f^{\#}\beta_k(u) = \delta a_k,$$

$$\theta(u) = \alpha\beta(u) = \delta b.$$

Un representante de $\theta_{fg}(\bar{u})$ es:

$$w_1 = g^{\#}f^{\#}b + \theta^*(a).$$

Por otra parte, puesto que cada β_k es un monomio, se tiene $(\alpha_k\beta_k)^* = \alpha_k^*\beta_k^*$. Luego,

$$w_1 = g^{\#}f^{\#}b + \textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k^*\beta_k^*(a).$$

Un representante de $g^*\alpha_f\beta(\bar{u})$ es:

$$w_2 = g^{\#}f^{\#}b + \textstyle\sum_{k=0}^n g^{\#}\alpha_k^*(a_k).$$

Un representante de $\beta_g(f^*\bar{u})$ es:

$$w_3' = (\cdots, \beta_k^*(a) + g^{\#}a_k, \cdots).$$

Luego, $w_3 = \alpha w_3'$ será un representante de $\alpha[\beta_g(f^*\bar{u})]$. Para escribir explícitamente w_3 observamos que: (1) si v es un cociclo, entonces $\alpha_k(v) = \alpha_k^*(v)$; (2) si $\delta c_1 = \delta c_2$, entonces $\alpha_k^*(c_1 + c_2) \sim \alpha_k^*(c_1) + \alpha_k^*(c_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned} w_3 = \alpha w_3' &= \textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k(\beta_k^*(a) + g^{\#}a_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k^*(\beta_k^*(a) + g^{\#}a_k) \\ &\sim \textstyle\sum_{k=0}^n (\alpha_k^*\beta_k^*(a) + g^{\#}\alpha_k^*(a_k)). \end{aligned}$$

Por último, es inmediato verificar que

$$w_1 + w_2 + w_3 \sim 0,$$

lo que termina la demostración de (1.4).

9. El álgebra de Steenrod como álgebra de Hopf

Sea R el álgebra graduada, libre y asociativa sobre Z_2, generada por Sq^0, Sq^1, Sq^2, $\cdots$. Sea $I \subset R$ el ideal bilateral de las relaciones y $A = R/I$ el álgebra de Steenrod ($p = 2$).

J. Milnor construye en [11] un homomorfismo de álgebras $\psi^*:A \to A \otimes A$, y demuestra que ψ^* transforma A en álgebra de Hopf. Para uso futuro, mostraremos que la ψ^* de Milnor puede considerarse inducida por un homomorfismo $\psi: R \to R \otimes R$.

Construímos el homomorfismo ψ definiéndolo primero en los generadores de R por

$$(9.1) \qquad \psi(\mathrm{Sq}^i) = \textstyle\sum_{k=0}^{i} \mathrm{Sq}^{i-k} \otimes \mathrm{Sq}^k,$$

y luego, como homomorfismo de álgebras, extendemos ψ a cualquier elemento de R. Se comprueba fácilmente que ψ está bien definido y que convierte a R en álgebra de Hopf (con $\mathrm{Sq}^0 = 1$).

R opera en la cohomología de cualquier complejo y $R \otimes R$ opera en $H^*(X) \otimes H^*(Y)$ por la regla:

$$(\theta \otimes \theta')(u \otimes v) = \theta(u) \otimes \theta'(v),$$

donde, θ, θ' son elementos de R, y $u \in H^*(X)$, $v \in H^*(Y)$.

Con la identificación $H^*(X \otimes Y) \approx H^*(X) \otimes H^*(Y)$, resulta,

$$(9.2) \qquad \theta(u \otimes v) = \psi(\theta)(u \otimes v).$$

Esto se sigue de la fórmula de Cartan (3.2) y de la definición de $\psi(\theta)$ a partir de (9.1).

Sea $\eta: R \to A$ la transformación natural. Por conveniencia, mientras no haya lugar a confusión, denotaremos con los mismos símbolos los elementos de R y los de A. Como en [11; p. 155], si $Y = K(Z_2, k)$ con $k > n$, y si $\gamma \in H^*(Y)$ es la clase básica, la correspondencia

$$\theta \otimes \theta' \to \theta(\gamma) \otimes \theta'(\gamma)$$

define un homomorfismo

$$f: (R \otimes R)^i \to H^{2k+i}(Y \otimes Y),$$

y también define un isomorfismo

$$g: (A \otimes A)^i \to H^{2k+i}(Y \otimes Y),$$

para $i \leq n$.

En el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(R \otimes R)^i \arrow[dd, "\eta \otimes \eta"'] \arrow[dr, "f"] & \\
& H^{2k+i}(Y \otimes Y) \\
(A \otimes A)^i \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

se tiene que: núcleo$(\eta \otimes \eta)$ = núcleo(f). Por otra parte, el núcleo de $\eta \otimes \eta$ es el ideal bilateral $R \otimes I + I \otimes R$. Ahora, si $\rho \in I$, se sigue de (9.2) que

$$(9.3) \qquad \psi(\rho) \in (R \otimes I + I \otimes R).$$

Luego, ψ induce $\psi^*: A \to A \otimes A$ y se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\psi} & R \otimes R \\ \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \eta \otimes \eta} \\ A & \xrightarrow{\psi^*} & A \otimes A \end{array}$$

Esta ψ^* es igual a la construida por Milnor, ya que ambas coinciden en los generadores de A.

Definimos $R(m)$ como la subálgebra de R generada por $\mathrm{Sq}^0, \cdots, \mathrm{Sq}^m$. A partir de (9.3) se demuestra el siguiente

LEMA 9.4. *Sea* $\rho = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{Sq}^{2^k}$ *un elemento de* R *tal que grado*$(\rho) \leq 2^{n+1}$. *Supongamos además que* $\rho \in I$. *Entonces, los términos de* $\psi(\rho)$ *se pueden agrupar en* $R \otimes R$ *de modo que se obtenga una representación (que en general no es única) de la forma siguiente*:

$$\psi(\rho) = \rho \otimes 1 + 1 \otimes \rho + \textstyle\sum_i \rho_i \otimes \theta_i + \sum_j \theta_j' \otimes \rho_j',$$

donde, grado$(\theta_i) > 0$, *grado*$(\theta_j') > 0$, $\theta_i \in R(2^n)$, $\theta_j' \in R(2^n)$, $\rho_i \in I$, $\rho_j' \in I$.

Como una ilustración de (9.4) consideremos $\rho = \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2 + \mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^1$. Se tiene, $\psi(\rho) = \psi(\mathrm{Sq}^2)\psi(\mathrm{Sq}^2) + \psi(\mathrm{Sq}^3)\psi(\mathrm{Sq}^1)$. Sustituyendo con (9.1), efectuando los productos y agrupando, resulta

$$\begin{aligned} \psi(\rho) = \rho \otimes 1 + 1 \otimes \rho + \rho_1 \otimes \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^1 \otimes \rho_1 \\ + \rho_2 \otimes \mathrm{Sq}^2 + \mathrm{Sq}^2 \otimes \rho_2 + \rho_2 \otimes \mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^1, \end{aligned}$$

donde, $\rho_1 = \mathrm{Sq}^3 + \mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^2$, $\rho_2 = \mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^1$.

10. Dos lemas auxiliares

Si $\theta = \mathrm{Sq}_{i_t} \cdots \mathrm{Sq}_{i_1}$, se tiene que $\theta^* = \mathrm{p}_{i_t} \cdots \mathrm{p}_{i_1}$. En cocadenas, θ y θ^* no son operaciones aditivas. Ambas desviaciones a la aditividad están relacionadas, como se expresa en el siguiente

LEMA 10.1 *Si* $u_1, \cdots, u_k$ *son q-ciclos de* X, *entonces,*

$$\theta(u_1 + \cdots + u_k) = \theta(u_1) + \cdots + \theta(u_k) + \delta\bar{\theta}(u_1, \cdots, u_k), \tag{10.2}$$

donde $\bar{\theta}$ *es cierta función de las* u_i.

Si $a_1, \cdots, a_k$ *son p-cocadenas de* X, *entonces,*

$$\theta^*(a_1 + \cdots + a_k) \sim \theta^*(a_1) + \cdots + \theta^*(a_k) + \bar{\theta}(\delta a_1, \cdots, \delta a_k), \tag{10.3}$$

donde $\bar{\theta}$ *puede considerarse como la misma función de* (10.2)

DEMOSTRACIÓN: Esta es gor inducción en t. Si $t = 1$ y $i = i_1$, se establece fácilmente que

(10.4) $\mathrm{Sq}_i(u_1 + \cdots + u_k) = \mathrm{Sq}_i u_i + \cdots + \mathrm{Sq}_i u_k + \delta \sum_{1 \leq r < s \leq k} \varphi(e_{i+1} \otimes u_r u_s)$,

(10.5) $\mathrm{p}_i(a_1 + \cdots + a_k) \sim \mathrm{p}_i(a_1) + \cdots + \mathrm{p}_i(a_k) + \sum_{1 \leq r < s \leq k} \varphi(e_{i+1} \otimes \delta a_r \delta a_s)$.

Luego, suponiendo que (10.1) vale para θ y θ^* con $t = n$, consideramos $\mathrm{Sq}_{i_{n+1}}\theta$ y $\mathrm{p}_{i_{n+1}}\theta^*$. Aplicando a estas expresiones, respectivamente, (10.4), (10.5) y comparando los términos, se obtiene la demostración del Lema.

Para establecer el segundo lema hacemos primero las siguientes consideraciones. Sean X y Y dos complejos regulares y

(10.6) $$\varphi_1':V \otimes X \to X^2, \qquad \varphi_2':V \otimes Y \to Y^2,$$

dos aproximaciones diagonales. Sea

$$\varphi_3':V \otimes X \otimes Y \to (X \otimes Y)^2$$

la aproximación diagonal en el producto, introducida por Steenrod en [16; p. 220]. Se tiene que

(10.7) $$\varphi_3' = \lambda(\varphi_1' \otimes \varphi_2')\mu(d \otimes 1),$$

donde, $\lambda:X^2 \otimes Y^2 \to (X \otimes Y)^2$, $\mu:V \otimes V \otimes X \otimes Y \to V \otimes X \otimes V \otimes Y$ son las transformaciones naturales que intercambian los factores, y $d:V \to V \otimes V$ es la transformación diagonal definida en [16; p. 219].

Steenrod utiliza (10.7) para demostrar la fórmula de Cartan (3.2) y obtiene dicha fórmula como una *igualdad* en cocadenas. En forma análoga, se establece en cocadenas la siguiente generalizacíon.

LEMA 10.8. *Sea u una p-cocadena de X y v una q-cocadena de Y. Si $\delta v = 0$, se tiene*

(10.9) $$\mathrm{p}^i(u \otimes v) = \textstyle\sum_{j=0}^{i} \mathrm{p}^{i-j}(u) \otimes \mathrm{Sq}^j v.$$

Si $\delta u = 0$, se tiene

(10.10) $$\mathrm{p}^i(u \otimes v) \sim \textstyle\sum_{j=0}^{i} \mathrm{Sq}^{i-j} u \otimes \mathrm{p}^j(v).$$

Por último, si u y v son cociclos (10.10) *es una igualdad y ambas expressiones coinciden con la fórmula de Cartan en cocadenas.*

11. Demostración del Teorema 3.6

Tomamos complejos simpliciales con esqueletos finitos para X, Y, $K(\pi, p)$, $K(\pi, q)$, y transformaciones simpliciales $f:X \to K(\pi, p)$, $g:Y \to K(\pi, q)$, tales que,

(11.1) $$f^{\#}\gamma_p = u, \qquad g^{\#}\gamma_q = v,$$

donde, γ_p, γ_q, u, v son cociclos representantes que denotamos con los mismos símbolos usados para sus clases.

Usaremos fórmulas simpliciales para definir Sq^i en estos complejos, y las fórmulas duales de (10.7), derivadas de las simpliciales, para introducir Sq^i en los complejos $X \otimes Y$, $K(\pi, p) \otimes K(\pi, q)$. Estas últimas no son simpliciales, sin embargo, conmutan con productos de transformaciones simpliciales. En particular, conmutan con $f^{\#} \otimes g^{\#}$.

La hipótesis (3.1) implica que

$$\text{(11.2)} \qquad \begin{aligned} f^{\#}\mathrm{Sq}^i\gamma_p &= \mathrm{Sq}^i u = \delta a_i', \\ g^{\#}\mathrm{Sq}^i\gamma_q &= \mathrm{Sq}^i v = \delta a_i'', \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq 2^n$. Usando la fórmula de Cartan en cocadenas, obtenemos que

$$\begin{aligned} (f^{\#} \otimes g^{\#})\mathrm{Sq}^i(\gamma_p \otimes \gamma_q) &= \mathrm{Sq}^i(u \otimes v) = \textstyle\sum_{j=0}^{i} \mathrm{Sq}^{i-j}u \otimes \mathrm{Sq}^j v \\ &= \delta[a_i' \otimes v + \textstyle\sum_{j=1}^{i} \mathrm{Sq}^{i-j}u \otimes a_j''].\end{aligned}$$

Si definimos

$$\text{(11.3)} \qquad a_i = a_i' \otimes v + \textstyle\sum_{j=1}^{i} \mathrm{Sq}^{i-j}u \otimes a_j'',$$

resulta,

$$(f^{\#} \otimes g^{\#})\beta(\gamma_p \otimes \gamma_q) = (\delta a_{2^0}, \cdots, \delta a_{2^n}).$$

Ahora, sea b tal que

$$\text{(11.4)} \qquad \alpha\beta(\gamma_p \otimes \gamma_q) = \delta b.$$

Luego, un cociclo representante de $\alpha_{f\times g}\beta(\gamma_p \otimes \gamma_q)$ es:

$$\text{(11.5)} \qquad w = (f^{\#} \otimes g^{\#})b + \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^*(a_{2^k}).$$

Para factorizar w, primero vamos a construir b explícitamente en función de los factores. Con $\rho = \alpha\beta$, se tiene

$$\text{(11.6)} \qquad \begin{aligned} \rho(\gamma_p \otimes \gamma_q) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{Sq}^{2^k}(\gamma_p \otimes \gamma_q) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sum_{j=0}^{2^k} \mathrm{Sq}^{2^k-j}\gamma_p \otimes \mathrm{Sq}^j\gamma_q .\end{aligned}$$

En general, cada α_k es una suma de cuadrados iterados. Si $\mathrm{Sq}^I = \mathrm{Sq}^{i_1} \cdots \mathrm{Sq}^{i_r}$, con $I = (i_1, \cdots, i_r)$, es un término de α_k, aplicando la fórmula de Cartan en forma iterada, resulta

$$\text{(11.7)} \qquad \mathrm{Sq}^I(\mathrm{Sq}^{2^k-j}\gamma_p \otimes \mathrm{Sq}^j\gamma_q) \sim \textstyle\sum \mathrm{Sq}^{I'}\mathrm{Sq}^{2^k-j}\gamma_p \otimes \mathrm{Sq}^{I''}\mathrm{Sq}^j\gamma_q,$$

donde la suma se extiende sobre todas las sucesiones

$$I' = (i_1', \cdots, i_r'), \qquad I'' = (i_1'', \cdots, i_r'') \quad \text{con} \quad i_j' + i_j'' = i_j$$

([11; p. 161]). La cohomología en lugar de igualdad se debe a que trabajamos con cociclos y necesitamos considerar las desviaciones iteradas de acuerdo con (10.2). Entonces, factorizamos todos los términos de (11.6) en la forma (11.7) y acumulamos las diferentes desviaciones. Representamos con $\delta\tilde{\alpha}_k$ la desviación total que se deriva de α_k. Luego, agrupamos los términos, de acuerdo con (9.4), para obtener una representación de la forma siguente:

$$
\begin{aligned}
(11.8)\qquad \rho(\gamma_p \otimes \gamma_q) = \rho(\gamma_p) \otimes \gamma_q + \gamma_p \otimes \rho(\gamma_q) + \textstyle\sum_i \rho_i(\gamma_p) \otimes \theta_i(\gamma_q) \\
+ \textstyle\sum_j \theta_j'(\gamma_p) \otimes \rho_j'(\gamma_q) + \delta \sum_{k=0}^n \tilde{\alpha}_k
\end{aligned}
$$

donde, ρ_i, ρ_j' son elementos de I y θ_i, θ_j' son elementos de $R(2^n)$. Para referencia futura, precisaremos que las ρ_i, ρ_j' son de la forma

$$
(11.9)\qquad
\begin{aligned}
\rho_i &= \textstyle\sum_{r_k} \alpha_{r_k}^i \mathrm{Sq}^{r_k}, & 1 \leq r_k \leq 2^n, \\
\rho_j' &= \textstyle\sum_{s_k} \alpha_{s_k}'^j \mathrm{Sq}^{s_k}, & 1 \leq s_k \leq 2^n.
\end{aligned}
$$

Elegimos cocadenas b', b'', b_i', b_j'' tales que $\rho(\gamma_p) = \delta b'$, $\rho(\gamma_q) = \delta b''$, $\rho_i(\gamma_p) = \delta b_i'$, $\rho_j'(\gamma_q) = \delta b_j''$. Sustituyendo en (11.8) y puesto que las $\theta_i(\gamma_q)$, $\theta_j'(\gamma_p)$ son cociclos, de acuerdo con (11.4), podemos tomar

$$b = b' \otimes \gamma_q + \gamma_p \otimes b'' + \textstyle\sum_i b_i' \otimes \theta_i(\gamma_q) + \sum_j \theta_j'(\gamma_p) \otimes b_j'' + \sum_{k=0}^n \tilde{\alpha}_k .$$

Luego, aplicando $f^\# \otimes g^\#$ y tomando en cuenta (11.1) y considerando que las θ_i, θ_j' conmutan con las transformaciones simpliciales de cocadena, resulta

$$
\begin{aligned}
(11.10)\qquad (f^\# \otimes g^\#)b = f^\# b' \otimes v + u \otimes g^\# b'' + \textstyle\sum_i f^\# b_i' \otimes \theta_i(v) \\
+ \textstyle\sum_j \theta_j'(u) \otimes g^\# b_j'' + \sum_{k=0}^n (f^\# \otimes g^\#)\tilde{\alpha}_k .
\end{aligned}
$$

Trabajaremos ahora con $\sum_{k=0}^n \alpha_k^*(a_{2^k})$ que es la segunda parte de (11.5). Usando (10.8), cada sumando

$$(11.11)\qquad \alpha_k^*[a_{2^k}' \otimes v + \textstyle\sum_{j=1}^{2^k} \mathrm{Sq}^{2^k - i} u \otimes a_j'']$$

se puede desarrollar hasta factorizar todos sus términos. Este desarrollo tiene el mismo número de términos que el que se obtiene de

$$(11.12)\qquad \alpha_k \textstyle\sum_{j=0}^{2^k} \mathrm{Sq}^{2^k - j} \gamma_p \otimes \mathrm{Sq}^j \gamma_q$$

al aplicar la fórmula de Cartan. Demostraremos esto estableciendo una correspondencia bien definida entre los diferentes términos. Primero establecemos la correspondencia

$$
\begin{gathered}
a_{2^k}' \otimes v \leftrightarrow \mathrm{Sq}^{2^k} \gamma_p \otimes \gamma_q , \\
\mathrm{Sq}^{2^k - j} u \otimes a_j'' \leftrightarrow \mathrm{Sq}^{2^k - j} \gamma_p \otimes \mathrm{Sq}^j \gamma_q
\end{gathered}
$$

Observamos que Sq^I es un término de α_k si y sólo si p^I es un término de α_k^*. Módulo desviaciones, se tiene que

$$
\begin{gathered}
\mathrm{p}^I(a_{2^k}' \otimes v) \sim \textstyle\sum \mathrm{p}^{I'}(a_{2^k}') \otimes \mathrm{Sq}^{I''} v, \\
\mathrm{p}^I(\mathrm{Sq}^{2^k - j} u \otimes a_j'') \sim \textstyle\sum \mathrm{Sq}^{I'} \mathrm{Sq}^{2^k - j} u \otimes \mathrm{p}^{I''}(a_j'').
\end{gathered}
$$

Luego, establecemos la correspondencia (ver (11.7))

$$
\begin{gathered}
\mathrm{p}^{I'}(a_{2^k}') \otimes \mathrm{Sq}^{I''} v \leftrightarrow \mathrm{Sq}^{I'} \mathrm{Sq}^{2^k} \gamma_p \otimes \mathrm{Sq}^{I''} \gamma_q , \\
\mathrm{Sq}^{I'} \mathrm{Sq}^{2^k - j} u \otimes \mathrm{p}^{I''}(a_j'') \leftrightarrow \mathrm{Sq}^{I'} \mathrm{Sq}^{2^k - j} \gamma_p \otimes \mathrm{Sq}^{I''} \mathrm{Sq} \gamma_q .
\end{gathered}
$$

Consideremos ahora la desviación que resulta al desarrollar (11.11). De (10.1) se sigue que ésta depende de α_k en la misma forma en que depende $\tilde{\alpha}_k$. Además $\tilde{\alpha}_k$ dependen de los cociclos

$$\mathrm{Sq}^{2^k-j}\gamma_p \otimes \mathrm{Sq}^j\gamma_q \qquad (j = 0, \cdots, 2^k). \tag{11.13}$$

Nuevamente de (10.1), se sigue que $\tilde{\alpha}_k$ depende de (11.13) en la misma forma en que la desviación de (11.11) depende de

$$\delta(a'_{2^k} \otimes v) = (f^{\#} \otimes g^{\#})\mathrm{Sq}^{2^k}\gamma_p \otimes \gamma_q,$$
$$\delta(\mathrm{Sq}^{2^k-j}u \otimes a''_j) = (f^{\#} \otimes g^{\#})\mathrm{Sq}^{2^k-j}\gamma_p \otimes \mathrm{Sq}^j\gamma_q.$$

Luego, como las fórmulas usadas para definir α_k conmutan con $f^{\#} \otimes g^{\#}$, resulta que la desviación total que se obtiene al desarrollar (11.11), módulo una cofrontera, es:

$$(f^{\#} \otimes g^{\#})\tilde{\alpha}_k.$$

Entonces, hemos establecido una correspondencia biunívoca entre los términos del desarrollo de (11.12) y los del desarrollo, módulo una cofrontera, de (11.11). Ahora, agrupamos los términos en el desarrollo de (11.11) en la misma forma en que fueron agrupados los correspondientes términos en (11.8). Además, tomando en cuenta que

$$\delta[\mathrm{p}^{I'}(a'_{2^k-j}) \otimes \mathrm{p}^{I''}(a''_j)] = \mathrm{Sq}^{I'}\mathrm{Sq}^{2^k-j}u \otimes \mathrm{p}^{I''}(a''_j) + \mathrm{p}^{I'}(a'_{2^k-j}) \otimes \mathrm{Sq}^{I''}\mathrm{Sq}^j v,$$

podemos, módulo una cofrontera, colocar el factor p^I de cada término del mismo lado en que se encuentra la ρ_i o la ρ'_j que contiene al término correspondiente. De este modo, y considerando (11.9), obtenemos que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k^*(a_{2^k}) \sim \textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k^*(a'_{2^k}) \otimes v \\ + u \otimes \textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k^*(a''_{2^k}) + \textstyle\sum_i \{\textstyle\sum_{r_k} \alpha_{r_k}^{i*}(a'_{r_k}) \otimes \theta_i(v)\} \\ + \textstyle\sum_j \{\theta'_j(u) \otimes \textstyle\sum_{s_k} \alpha_{s_k}^{\prime j*}(a''_{s_k}) + \textstyle\sum_{k=0}^n (f^{\#} \otimes g^{\#})\tilde{\alpha}_k. \end{aligned} \tag{11.14}$$

Sumando (11.10) con (11.14), para formar w, se obtiene

$$w \sim w' \otimes v + u \otimes w'' + \textstyle\sum_i w'_i \otimes \theta_i(v) + \textstyle\sum_j \theta'_j(u) \otimes w''_j,$$

donde,

$$\begin{aligned} w' &= f^{\#}b' + \textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k^*(a'_{2^k}) \\ w'' &= g^{\#}b'' + \textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k^*(a''_{2^k}), \\ w'_i &= f^{\#}b'_i + \textstyle\sum_{r_k} \alpha_{r_k}^{i*}(a'_{r_k}), \\ w''_j &= g^{\#}b''_j + \textstyle\sum_{s_k} \alpha_{s_k}^{\prime j*}(a''_{s_k}). \end{aligned}$$

Claramente, w' y w'' son, respectivamente, cociclos representantes de $\alpha_f\beta(\gamma_p)$ y $\alpha_g\beta(\gamma_q)$. Además, se comprueba fácilmente que las w'_i, w''_j son cociclos. Ahora, puesto que θ_i, θ'_j son elementos de $R(2^n)$ de grado mayor que cero, se sigue de (11.2) que $\theta_i(v)$ y $\theta'_j(u)$ son cofronteras. Luego,

$$w'_i \otimes \theta_i(v) \sim 0, \qquad \theta'_j(u) \otimes w''_j \sim 0.$$

Por lo tanto,

$$w \sim w' \otimes v + u \otimes w''.$$

Lo que demuestra el Teorema 3.6.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO NACIONAL DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. F. ADAMS, *On the nonexistence of elements of Hopf invariant one*, Bull. Amer. Math. Soc., 64 (1958), 279–282.

[2] J. F. ADAMS, "On the nonexistence of elements of Hopf invariant one," Princeton 1958, notas en mimeógrafo.

[3] J. ADEM, *The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology*, Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 38 (1952), 720–726.

[4] J. ADEM, *The relations on Steenrod powers of Cohomology Classes*, "Algebraic Geometry and Topology (A symposium in honor of S. Lefschetz)," Princeton University Press (1957), 191–238.

[5] J. ADEM, *Operaciones cohomológicas de segundo orden asociadas con cuadrados de Steenrod*, "Symposium internacional de topología algebraica," Universidad Nacional Autónoma de México y UNESCO, México, D. F. (1958), 186–221.

[6] S. ARAKI, *On the Steenrod's reduced powers in singular homology theories*, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. Ser. A. 9 (1956), 159–173.

[7] H. CARTAN, *Une théorie axiomatique des i-carrés*, C. R. Acad. Sci. Paris, 230 (1950), 425–427.

[8] H. CARTAN, "Séminaire H. Cartan 1954/55," Paris.

[9] H. CARTAN, "Séminaire H. Cartan 1958/59," Paris.

[10] S. EILENBERG and N. E. STEENROD, "Foundations of Algebraic Topology," Princeton University Press (1952).

[11] J. MILNOR, *The Steenrod algebra and its dual*, Ann. of Math., 67 (1958), 150–171.

[12] F. P. PETERSON and N. STEIN, *Secondary cohomology operations: two formulas*, Amer. J. Math., 81 (1959), 281–305.

[13] J-P. SERRE, *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane*, Comment. Math. Helv., 27 (1953), 198–231.

[14] N. SHIMADA, *Homotopy classification of mappings of a 4-dimensional complex into a 2-dimensional sphere*, Nagoya Math. J., 5 (1953), 127–144.

[15] N. E. STEENROD, *Cohomology invariants of mappings*, Ann. of Math., 50 (1949), 954–988.

[16] N. E. STEENROD, *Homology groups of symmetric groups and reduced power operations; Cyclic reduced powers of cohomology classes*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 39 (1953), 213–223.

[17] N. E. STEENROD, *Cohomology operations derived from the symmetric group*, Comment. Math. Helv., 31 (1957), 195–218.