ALCUNI RISULTATI QUALITATIVI E QUANTITATIVI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON LINEARI

PER DARIO GRAFFI

Sezione 1

Esporrò, in questo conferenza e ovviamente senza alcuna pretesa di essere completo, qualche risultato ottenuto, di recente, in Italia sulle equazioni non lineari.

Incomincerò col considerare (D. Graffi 1) l'equazione nell'incognita x:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + (\omega^2 + g(x)\ \mathrm{sen}(\Omega t + \gamma))x = 0 \tag{1}$$

in cui le derivate sono eseguite rispetto al tempo t, ω, Ω, γ sono costanti positive, $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni note della x. La (1) è un'equazione molto generale che s'incontra p.e. nei casi di eccitazione non lineare. Essa contiene, come caso particolare, l'equazione di Lienard (quando $g(x) = 0$), di Mathieu (quando $f(x) = 0, g(x)$ costante); nel caso $f(x) \neq 0, g(x)$ costante la (1) verrà chiamata equazione mista di Liénard-Mathieu.

Per dimostrare qualche proprietà delle soluzioni di (1), sono necessarie alcune ipotesi sulle $f(x)$ e $g(x)$, oltre a quelle che Poincaré chiamava di onestà, che nel nostro caso consistono nel supporre $f(x)$ e $g(x)$ continue e lipschitziane per ogni x finito. Per stabilire le ulteriori ipotesi su quelle funzioni costruiamo un esempio di sistema fisico retto da (1). A questo scopo consideriamo un oscillatore di Van der Pol cioè, fra i punti A e B del circuito di placca di un tubo elettronico a tre elettrodi, si abbiano, in parallelo, una autoinduzione L, un condensatore C e una resistenza r: ora però a questo oscillatore aggiungiamo fra A e B un'altra autoinduzione L' tale però che sia trascurabile la mutua induzione fra L ed L' e fra L' e il circuito di griglia. Detta x la differenza di potenziale fra A e B e supposto L' variabile in modo opportuno (cioè $1/L'$ uguale alla somma di una costante e di una funzione sinusoidale di pulsazione Ω), con semplici considerazioni, che omettiamo, della teoria dei circuiti, si prova che x soddisfa a un'equazione del tipo (1) con $g(x)$ costante. Più difficile è realizzare il caso in cui $g(x)$ è variabile; bisogna che L' contenga un nucleo di ferro disposto però in modo che la sua magnetizzazione dipenda essenzialmente dalla corrente x/r che circola nella resistenza r.

Comunque l'esempio ora esposto ci conduce ad ammettere che $f(x)$ può essere negativa per piccoli valori di $|x|$ (come accade nei casi più interessanti e come ammetteremo in seguito) però per $|x|$ sufficientemente grande essa è sempre positiva anzi superiore ad un numero positivo, inoltre $g(x)$ può ritenersi limitata per ogni x. Ciò porta alla relazione:

$$|\omega^2 + g(x)|\,|x| \leq N\,|F(x)| \tag{2}$$

dove N è un numero positivo, $F(x) = \int_0^x f(x)dx$. In base alla (2) si può dimostrare che ogni integrale di (1) è prolungabile in tutto l'intervallo $(0, \infty)$, per

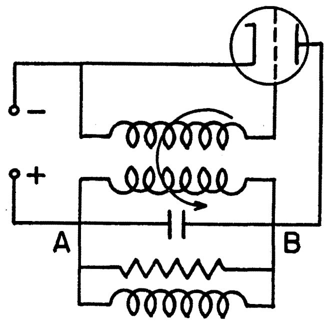

FIG. 1

questa dimostrazione si rimanda alla mia memoria già citata. Intendo invece soffermarmi sul carattere oscillatorio degli integrali di (1), vale a dire che ogni integrale di (1) (escluso, come sempre faremo, l'ovvio integrale $x \equiv 0$) ha sempre, nell'intervallo $0, \infty$ infiniti massimi e minimi e nel caso $| g(x) | < \omega^2$ infiniti zeri. *E'* opportuno, prima di proseguire, osservare che nel caso dell'equazione lineare ben nota:

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3}$$

(con p, ω costanti) gli integrali sono oscillanti solo se $p^2 < \omega^2$. Al contrario, le soluzioni approssimate delle equazioni non lineari che si incontrano nelle applicazioni e che di solito sono generalizzazione di (3) hanno carattere oscillatorio, quindi è da attendersi che il carattere oscillatorio degli integrali di quelle equazioni non-lineari sia una loro proprietà caratteristica; ecco perchè mi sembra di qualche interesse verificarla per classi sempre più ampie di tali equazioni.

Per dimostrare l'oscillatorietà degli integrali $x(t)$ della (1) conviene procedere per assurdo; si esclude che la $x(t)$ possa essere da un certo istante t_0 in poi sempre crescente o sempre decrescente, anzi basta provare che $x(t)$ non può essere sempre crescente perchè l'altra possibilità si riconduce a quella considerata cambiando x in $-x$. Noi supporremo per brevità di esposizione, e perche si tratta del caso più interessante, $| g(x) | < \omega^2$, notiamo però che molti risultati valgono anche se non è soddisfatta quest'ultima ipotesi e se in luogo di $f(x)\dot{x}$ si ponga $f(x, \dot{x})\dot{x}$ con $f(x, \dot{x}) < 0$ per piccoli valori di $| x |$, $| \dot{x} |$, $f(x, \dot{x}) > 0$ per grandi valori di $| x |$ e $| \dot{x} |$. Ammettiamo dunque, per assurdo, $x(t)$ crescente per $t > t_0$, avremo $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$ oppure $\lim_{t\to\infty} x(t) = k$, k finito. Il primo caso è impossibile. Essendo infatti per (1)

$$\ddot{x} = -f(x)\dot{x} - (\omega^2 + g(x))x \tag{4}$$

si avrebbe ($f(x) > 0$ per x sufficentemente grande) $\lim_{t\to\infty} \ddot{x}(t) = -\infty$, e per il teorema degli accrescimenti finiti $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = -\infty$, allora $\dot{x}(t)$ sarebbe negativa da un certo istante t_1 in poi, $x(t)$ decrescente per $t > t_1$, in contraddizione con la nostra ipotesi.

Nel secondo caso supponiamo anzitutto $k \neq 0$. Allora si può dimostrare che da un certo istante in poi $\dot{x} < \epsilon$, dove ϵ è un numero positivo arbitrario e si può scegliere ϵ in modo che l'ultimo termine al secondo membro di (4) prevalga sul primo. Perciò, se $k > 0$, $\ddot{x}$ è, da un certo istante, minore di un numero negativo, per il teorema degli accrescimenti finiti $\lim_{t \to \infty} \dot{x}(t) = -\infty$, il che, come si è visto, è assurdo. Se $k < 0$, $\ddot{x}$ è da un certo istante in poi maggiore di un numero positivo. Allora, sempre per il teorema degli accrescimenti finiti $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = +\infty$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$ in contraddizione con la nostra ipotesi. Infine se $k = 0$, si ha, per t superiore a un certo istante t', $f(x)$ negativa ed essendo $x < 0$ risulta $\ddot{x} > 0$ per $t > t'$ cioè $\dot{x}(t) \geq \dot{x}(t')$, quindi $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$, un'ulteriore contraddizione. Dunque, come si è affermato, la funzione $x(t)$ deve essere oscillante. Si noti poi che nei punti di massimo dove essere $\ddot{x} < 0$; infatti se fosse $\ddot{x} = 0$ si avrebbe, per la (1), anche $x = 0$ e l'integrale di (1) si ridurrebbe a $x \equiv 0$, il che abbiamo escluso. Quindi per la (1) nei punti di massimo x è positivo e ragionando nello stesso modo si ha x negativo nei punti di minimo, quandi $x(t)$ ha infiniti zeri oltre che infiniti massimi o minimi.

E' bene notare che in questa dimostrazione per l'ultimo termine di (1) si sfrutta l'ipotesi che esso diventi infinito con x e che abbia un valore finito per x finito e dello stesso segno della x stessa. Questa osservazione conduce facilmente a generalizzare la proprietà dell'oscillatorietà degli integrali di (1) in quanto essa può risultare valida, sotto certe condizioni che preciseremo, per l'equazione, più generale:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + F\big(\underset{t-T}{\overset{t}{x(\tau)}}\big) = 0 \tag{1'}$$

dove $F\big(\underset{t-T}{\overset{t}{x(\tau)}}\big)$ è un funzionale della $x(\tau)$ definita nell'intervallo $(t - T, t)$. Esempi di questioni fisiche che si riducono all'equazione (4) s'incontrano nei cosidetti sistemi a ritardo in cui $F\big(\underset{t-T}{\overset{t}{x(\tau)}}\big)$ è una funzione di $x(t - h_1)$, $x(t - h_2)$ $\cdots x(t - h_n)$, $h_1, h_2, \cdots h_n$ costanti positive che rappresentano i ritardi. Oppure si incontrano nel caso dei fenomeni ereditari dove $F\big(\underset{t-T}{\overset{t}{x(\tau)}}\big)$ può essere uguale a $f(x) + \int_{t-T}^{t} \varphi(t, \tau)x(\tau)\, d\tau$ ($\varphi(t, \tau)$ è una funzione di t e τ), T é allora, secondo Volterra, la durata dell'ereditarietà. Per dimostrare l'oscillatorietà della soluzioni di (4) occore (oltre alle ipotesi già esposte su $f(x)$ sostituibile del resto da una funzione di x e $\dot{x}$) che $F\big(\underset{t-T}{\overset{t}{x(\tau)}}\big)$ soddisfi alle seguenti proprietà:

a) se $x(\tau)$ ha sempre lo stesso segno in $t - T, t$, $F\big(\underset{t-T}{\overset{t}{x(\tau)}}\big)$ ha lo stesso segno di $x(\tau)$,

b) scelto un numero M positivo arbitrario è possibile trovare in corrispondenza di M un numero N tale che se in $t - T, t$ è $| x(\tau) | > N$ sia $| \underset{t-T}{\overset{t}{F}}(x(\tau)) | > M$,

c) se $x(\tau)$ si riduce in $t - T, t$ ad una costante $k \neq 0$ si ha $e_k < \underset{t-T}{\overset{t}{F}}(x(\tau)) < E_k <$ dove e_k e E_k sono due numeri diversi da 0 e dello stesso segno di k,

d) intorno a $x(\tau) = k$ il funzionale sia uniformemente continuo.* Per le particolarità della dimostrazione cfr. D. Graffi (2).

Tornando alla (1) indichiamo con t_1 e t_2 due istanti successivi in cui $x(t)$ si annulla. Moltiplichiamo (1) per x e integriamo da t_1 a t_2. Poichè come è facile verificare (nel caso del secondo integrale mediante integrazione per parti):

$$(5) \qquad \int_{t_1}^{t_2} f(x)x\dot{x}\, dt = 0 \qquad \int_{t_1}^{t_2} x\ddot{x}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2\, dt$$

si ha:

$$(6) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (\omega^2 + g(x) \text{ sen } (\Omega t + \gamma))x^2\, dt$$

Ora detto m il valore massimo di $g(x)$ e ricordando un noto teorema di analisi (cfr. Sansone (1) vol. I, cap. 5, §4, n. 4) cioè:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2\, dt \geq \frac{\pi^2}{(t_2 - t_1)^2} \int_{t_1}^{t_2} x^2\, dt$$

si ha facilmente sostituendo in (6):

$$\frac{\pi^2}{(t_2 - t_1)^2} \int_{t_1}^{t_2} x^2\, dt \leq (\omega^2 + m) \int_{t_1}^{t_2} x^2\, dt$$

da cui:

$$(7) \qquad t_2 - t_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 + m}}$$

La (7) dà un limite inferiore per l'intervallo tra due radici successive di un integrale di (1).

Da questa formula si trae subito il risultato forse di qualche interesse. Si potrebbe supporre che esistano soluzioni di (1) periodiche di periodo $2\pi/\Omega$ come accade p.e. nel caso dell'equazione di Liénard in cui al secondo membro compare una funzione sinusoidale del tempo. Ora, se esistesse questa soluzione $x(t)$ di (1), essa si annullerebbe negli istanti t' e $t'' = t' + (2\pi/\Omega)$. D'altra parte $x(t)$ dovrà annullarsi nell'interno dell'intervallo (t', t'') altrimenti avrebbe sempre lo stesso segno quindi i suoi massimi o i suoi minimi sarebbero zero, il che come si è visto, non è possibile perchè abbiamo escluso l'integrale $x \equiv 0$. Si avrebbero perciò

---

* Piu precisamente in corrispondenza di un numero $\epsilon > 0$ arbitrario si possa trovaro un numero $\eta > 0$ tale che se $| x(\tau) - k | < \eta$ sia per ogni t, $| \underset{t-T}{\overset{t}{F}}(x(\tau)) - \underset{t-T}{\overset{t}{F}}(k) | < \epsilon$.

due zeri successivi t_1 e t_2 di $x(t)$ tali che $t_2 - t_1 \leq (\pi/\Omega)$ quindi per la (7):

$$\frac{\pi}{\Omega} \geq \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 + m}}, \qquad \Omega < \sqrt{\omega^1 + m} \tag{8}$$

cioè esistono soluzioni periodiche di periodo $2\pi/\Omega$ solo se Ω soddisfa la seconda di (8).

Consideriamo infine l'equazione mista di Liénard-Mathieu (cioè $g(x)$ uguale a una costante che indicheremo con m, $m < \omega^2$)

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + (\omega^2 + m \operatorname{sen}(\Omega t + \gamma))x = 0 \tag{9}$$

e confrontiamola con la corrispondente equazione di Mathieu nella u:

$$\ddot{u} + (\omega^2 + m \operatorname{sen}(\Omega t + \gamma))u = 0 \tag{9'}$$

Vale il teorema: nell'intervallo chiuso (t_1, t_2) limitato da due zeri successivi di un integrale di (9) cade sempre uno zero di un integrale di (9′). Per dimostrare questo teorema procediamo per assurdo. Supponiamo che esista un integrale di (9′) che abbia le sue radici esterne all'intervallo (t_1, t_2). Consideriamo allora l'equazione in v:

$$\ddot{v} + h(\omega^2 + m \operatorname{sen}(\Omega t + \gamma))v = 0 \tag{9''}$$

e scegliamo le condizioni iniziali e la costante h in modo che $v(t_1) = v(t_2) = 0$ e $v(t) \neq 0$ per $t_1 < t < t_2$. E'ovvio che $h > 1$, altrimenti, per il teorema di Sturm, fra t_1 e t_2 si avrebbe uno zero di $u(t)$. Ora poichè anche x si annulla in t_1 e t_2 si ha, per cose note (G. Sansone 1 vol. 1 cap. 5, §4, n. 3):

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2\, dt \geq h \int_{t_1}^{t_2} (\omega^2 + m \operatorname{sen}(\Omega t + \gamma))x^2\, dt$$

$$> \int_{t_1}^{t_2} (\omega^2 + m \operatorname{sen}(\Omega t + \gamma))x^2\, dt$$

in contraddizione con (6). Il teorema da noi enunciato, che collega gli zeri di equazioni non lineari con gli zeri delle corrispondenti equazioni lineari è così provato.

Prima di lasciare questo argomento non sarà inutile osservare che molti dei risultati finora esposti sono validi ponendo in luogo di sen $(\Omega t + \gamma)$ una funzione continua $f(t)$ di t purchè tale che $|f(t)| < 1$.

Sezione 2

I risultati precedenti possono considerarsi qualitativi in quanto si riferiscono a proprietà generali delle soluzioni di equazioni non lineari o sono espressi da diseguaglianze. Risultati quantitativi sulle equazioni non lineari possono ottenersi, salvo eccezioni, solo mediante metodi di approssimazione.

Ora per la ricerca di soluzioni e per lo studio della loro stabilità si conoscono metodi di approssimazione rigorosi, p.e. quelli di Cesari e della sua scuola. Invece il metodo di Kryloff-Bogoliuboff (o quello di Van der Pol ad esso equivalente) permettono di studiare, in via approssimata, le soluzioni anche non periodiche di equazioni non lineari. Però, prima di indicare qualche risultato che può ottenersi con quel metodo esporrò alcune considerazioni, che intendo sviluppare in una memoria più ampia e che permettono, almeno dal punto di vista delle applicazioni, di rendere legittimo il metodo in discorso. Debbo ricordare che nello sviluppare le mie considerazioni ho tenuto presenti le memorie di P. Fatou (1) e F. G. Friedlander (1).

Mi riferirò principalmente al caso più semplice in cui si applica il metodo Kryloff-Bogoliuboff che per brevità dirò d'ora in poi K. B. Si abbia l'equazione:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \epsilon f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) + x = 0 \tag{10}$$

dove ϵ è un parametro adimensionale, τ è il cosidetto tempo ridotto, grandezza anch'essa adimensionale perche vale, com'è noto, $2\pi(t/T)$ dove t è il tempo in secondi, T il periodo proprio, pure in secondi, del moto armonico che compirebbe un sistema meccanico retto da (10) se fosse $\epsilon = 0$. Ciò premesso, risolviamo (10) col metodo K. B. Poniamo perciò:

$$x = a \operatorname{sen}(\tau + \varphi) \qquad \dot{x} = a \cos(\tau + \varphi) \tag{11}$$

con a e φ funzione di τ. Dopo calcoli ben noti si giunge all'equazione:

$$\frac{da}{d\tau} = -\epsilon f(a \operatorname{sen}(\tau + \varphi), a \cos(\tau + \varphi)) \cos(\tau + \varphi) \tag{12}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\epsilon}{a} f(a \operatorname{sen}(\tau + \varphi), a \cos(\tau + \varphi)) \operatorname{sen}(\tau + \varphi) \tag{13}$$

sviluppando il secondo membro di (12) e (13) in serie di Fourier, più precisamente di sen $(\tau + \varphi)$, cos $(\tau + \varphi)$ si ottiene:

$$\frac{da}{d\tau} = \epsilon K(a) + \epsilon F(a, \varphi, \tau) \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \epsilon P(a) + \epsilon G(a, \varphi, \tau) \tag{14}$$

dove $F(a, \varphi, \tau)$, $G(a, \varphi, \tau)$ sono serie di cui un termine generico è una combinazione lineare di sen $n(\varphi + \tau)$, cos $n(\varphi + \tau)$, $n \geq 1$. Nel metodo K. B. si sostituisce al sistema (14) il sistema che diremo sistema ridotto:

$$\frac{da_1}{d\tau} = \epsilon K(a_1) \qquad \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \epsilon P(a_1) \tag{15}$$

Ora ci si può domandare, fissato ϵ, quale errore si commette sostituendo a_1 ad a e φ_1 a φ. Ma, dal punto di vista pratico il problema si può porre anche in altra forma. Si potrà affermare che a_1 e φ_1 approssimano sufficientemente a e φ in un certo intervallo di tempo, qualora nell'intervallo stesso sia:

$$|a - a_1| < \eta, \qquad |\varphi - \varphi_1| < \eta'. \tag{16}$$

dove η e η' sono due numeri sufficientemente piccoli per esempio dell'ordine di grandezza dell'errore sperimentale che si commetterebbe studiando un sistema fisico retto da (10). Ora, come vedremo, con opportuna scelta di ϵ, è possibile soddisfare alle diseguaglianze ora scritte; la frase ϵ piccolo, spesso usata, viene ad avere in tal modo un significato preciso. A questo scopo si consideri le (15) e come avviene nei casi più comuni e più importanti supponiamo $K(a)$ funzione semisimmetrica di a, con una sola radice positiva $\bar{a}$, il caso di un numero discreto di radici non offre ulteriori difficoltà. Sia poi, come accade nei sistemi di maggiore interesse pratico p.e. nel caso dell'equazione di Van der Pol $K(a) > 0$ per $0 < a < \bar{a}$, $K(a) < 0$ per $a > \bar{a}$. Allora, se a_0 è il valore iniziale di a e di a_1 ed è, per fissare le idee $0 < a_0 < \bar{a}$ (a_0 si può sempre supporre positivo con opportuna scelta del valore iniziale φ_0 di φ) si ha che a_1 è una funzione sempre crescente di ϵ che tende assintoticamente ad $\bar{a}$.

Sia ora τ_1 l'intervallo di tempo necessario affinchè a_1 passi da a_0 a $a - \dfrac{\eta}{2}$ (si suppone per ora $a_0 < a - \dfrac{\eta}{2}$):

$$\tau_1 = \frac{1}{\epsilon} \int_{a_0}^{\bar{a}-(\eta/2)} \frac{da}{K(a)} \tag{17}$$

Ciò posto si osservi che, quando $\tau = 0$, $a = a_1 = a_0$, esisterà perciò un intervallo $(0, \tau_0)$ in cui $| a - a_1 | < \dfrac{\eta}{4}$. Si consideri ora il dominio C tale che $a_0 - \dfrac{\eta}{4} < a < \bar{a} - \dfrac{\eta}{4}$, $-\infty < \tau < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$. In questo dominio (si noti che τ e φ compaiono solo negli argomenti di funzioni trigonometriche) supporremo $K(a)$, $F(a, \varphi, \tau)$, $G(a, \varphi, \tau)$ limitate assieme alle loro derivate prime rispetto a, φ, τ; in linea teorica almeno è sempre possibile calcolare limiti superiori di tali grandezze. Si noti che se è $\tau_0 \leq \tau_1$, $\tau < \tau_0$, $a(\tau)$ rimane nell'intervallo sopra indicato per a perchè

$$| a - a_1 | < \frac{\eta}{4}, \qquad a_0 < a_1 < \bar{a} - \frac{\eta}{2}$$

Ciò posto, sottraendo (15) da (14) e integrando da 0, a τ, $\tau \leq \tau_0$ si ha:

$$a - a_1 = \epsilon \int_0^\tau (K(a) - K(a_1))\, d\tau + \epsilon \int_0^\tau F(a, \varphi, \tau)\, d\tau$$

Con calcoli che omettiamo si giunge alla relazione:

$$| a - a_1 | \leq H\epsilon \int_0^t | a - a_1 |\, d\tau + M\epsilon + R\epsilon^2\tau$$

dove H, M, R sono grandezze calcolabili mediante gli estremi superiori in C di $F(a, \varphi, \tau)$, $K(a)$, delle loro derivate prime rispetto a a e φ, e di $G(a, \varphi, \tau)$, $P(a)$.

Per il lemma di Gronwall si ha:

$$(18) \qquad | a - a_1 | \leq e^{\epsilon H\tau}(M\epsilon + R\epsilon^2\tau).$$

Orbene si può dimostrare che scelto ϵ in modo che sia:

$$(19) \qquad e^{\epsilon H\tau_1}(M\epsilon + R\epsilon^2\tau_1) < \frac{\eta}{4}$$

τ_0 si può prolungare fino a τ_1 cioè nell'intervallo $(0, \tau_1)| a - a_1 | < \frac{\eta}{4}$. All'istante τ_1 si ha $\bar{a} - \frac{3}{4}\eta < a < \bar{a} - \frac{\eta}{4}$ cioè, all'istante τ, a supera il valore $\bar{a} - \frac{3}{4}\eta$. Si può allora dimostrare, allargando l'ipotesi espressa da (18) che per $\tau > \tau_1$, $\bar{a} - \eta < a(\tau) < \bar{a} + \eta$; ovviamente se per $\tau = 0$ era $a_0 > \bar{a} - \frac{\eta}{2}$, l'ultima relazione è verificata per ogni τ positivo. In altre parole, in ogni istante $\tau > 0$ la differenza fra a e a_1 è inferiore a 2η(o a η sostituendo per $\tau > \tau_1$ a con $\bar{a}$). Dunque si può affermare che per $\tau < \tau_1$ l'ampiezza a dell'oscillazione è rappresentata da a_1, per $\tau > \tau_1$ è rappresentata da $\bar{a}$. Cioè l'ampiezza dell'oscillazione è data per $\tau > \tau_1$, con l'approssimazione voluta, da quel valore che si calcola in prima approssimazione per una soluzione periodica. Passiamo ora al valore della fase φ che ovviamente ha meno importanza dell'ampiezza a. Il ragionamento precedente ci prova che si può scegliere ϵ in modo che nell'intervallo $(0, \tau_1)$ sia $| \varphi - \varphi_1 | < \eta'$ cioè nell'intervallo $(0, \tau_1)$ la x e la $\dot{x}$ sono rappresentate, con la voluta approsimazione da (11) con a e φ sostituite da a_1 e φ_1. Per la φ la approssimazione non si può prolungare su tutto l'intervallo $(0, \infty)$ (come del resto accade per nessun metodo approssimato anche nel caso di soluzioni periodiche). Però per un'intervallo (τ', τ'') con $\tau'' - \tau'$ dell'ordine di $(1/\epsilon)$, φ è rappresentato, con un errore che si può rendere minore di η', da:

$$(20) \qquad \varphi_1 = P(\bar{a})(\tau - \tau') + \varphi(\tau')$$

$\varphi(\tau')$ non è, in generale, nota, ma ciò non ha grande importanza perchè nella pratica infatti basta affermare, indipendentemente dal valore della fase iniziale, che il sistema oscilla con legge sinusoidale con periodo: $(2\pi/(1 + P\,(\bar{a}')))$. Passiamo ora al caso in cui a $f(x, \dot{x})$ debba sostituirsi con una funzione $f(x, \dot{x}, \text{sen}\,\Omega\tau, \cos\Omega\tau)$, Ω costante; supponiamo però che tale funzione sia un polinomio nei suoi argomenti. Allora; con la solita posizione (11), la (12) (in modo analogo la (13)) si modifica nel seguente modo:

$$(21) \quad \frac{da}{d\tau} = -\epsilon f(a\,\text{sen}\,(\tau + \varphi), a\cos(\tau + \varphi), \text{sen}\,\Omega\tau, \cos\Omega\tau)\,\text{sen}\,(\tau + \phi)$$

ora consideriamo il secondo membro di (21) come una funzione doppiamente periodica di periodi 2π, $(2\pi/\Omega)$. Si avrà sviluppandolo in serie di Fourier,

$$(22) \qquad \frac{da}{d\tau} = K(a) + F_1(a, \varphi, \tau)$$

ora $F_1(a, \varphi, \tau)$ è una somma di funzioni trigonometriche di argomento $(n \pm m\Omega)\tau + n\varphi$ con m ed n numeri interi. Se i termini $n \pm m\Omega$ sono grandi rispetto a ϵ si possono ripetere i ragionamenti precedenti cioè a è rappresentata dalle soluzioni del sistema ridotto:

$$\frac{da_1}{d\tau} = \epsilon K(a_1)$$

e analoghe considerazioni possono valere per φ. Possiamo in tal modo renderci conto di un interessante risultato raggiunto da G. Colombo (3) e da lui giustificato con altre considerazioni (4). Egli considera un sistema (di cui indica un esempio meccanico) retto dall'equazione nell'incognita g in cui $\alpha_1\ \beta_1$, α_2, $\beta_2\ E$, A, ψ sono costanti i cui valori sono tali che se $A = 0$, $E = 0$ il sistema è dissipativo:

$$\ddot{g} + g - E \operatorname{sen} \Omega\tau = \epsilon(-\alpha_1\dot{g} - \beta_1\dot{g}^3) - \alpha_2(\dot{g} - A \operatorname{sen}(\Omega\tau + \psi)) - \beta_2(\dot{g} - A \operatorname{sen}(\Omega\tau + \psi))^3$$

Colombo pone:

$$g = a \operatorname{sen}(\tau + \varphi) + \frac{E}{1 - \Omega^2} \operatorname{sen} \Omega\tau$$

e applicando il metodo già indicato dimostra che per certi valori delle costanti strutturali α_1, β_1, α_2, β_2 di A e di E il termine in a prevale sull'altro termine. In altre parole un sistema dissipativo compie, sotto l'azione di termini forzanti, oscillazioni non smorzate, ma, a differenza del caso lineare, sulla frequenza propria del sistema. Tornando alla teoria generale occorrerebbe considerare il caso $n \pm m\Omega$ dell'ordine di ϵ. Ma su questo argomento che condurebbe ai problemi di sincronizzazione, di demoltiplicazione ecc. non ho il tempo d'insistere.

Sezione 3

Accennerò ora a qualche altro problema non lineare studiato in Italia. Anzitutto ricordo che l'equazione di Van der Pol con termine forzante e cioè:

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = B \cos 3\tau \tag{23}$$

ammette la soluzione sottoarmonica esatta di ordine tre, $2 \operatorname{sen} \tau$ purchè sia $B = -2\epsilon$. Questo risultato è stato generalizzato (L. Minozzi. 1) all' equazione di Liénard sostituendo nella (22) a $1 - x^2$ un polinomio di grado $2n$ e con sole potenze pari di x e a $\cos 3\tau$, $\cos(2n + 1)\tau$ però le soluzioni sottoarmoniche esistono solo per particolari valori di coefficienti. Il Colombo (1) ha però dimostrato che quella soluzione esatta dell'equazione di Van der Pol, è, almeno per piccoli valori di ϵ, instabile, molto probabilmente sono instabili anche quelle ottenute, per l'equazione di Lienard. Nel caso:

$$\ddot{x} + P(x) = A \cos n\tau \tag{24}$$

dove $P(x)$ è un polinomio in x si possano ancora ottenere per particolari valori dei coefficienti del polinomio stesso, soluzioni sottoarmoniche esatte; però non si conosce se esse siano stabili o instabili. Del resto la stabilità di quelle soluzioni andrebbe studiata anche dal punto di vista strutturale.

Sul problema delle sottoarmoniche è notevole la ricerca di Colombo (2) che ha considerato un circuito elettrico ordinario formato da un condensatore di capacità C in serie con una resistenza r e una autoinduzione con nucleo di ferro, il circuito è alimentato da una forza elettromotrice periodica $E(t)$. Se x è la carica sull'armatura di un condensatore si ha che l'autoinduzione nel circuito è (trascurando l'isteresi) funzione di $\dot{x}$ e quindi deve scriversi $L(\dot{x})$ e che $\dot{x}$ soddisfa l'equazione:

$$L(\dot{x})\,\ddot{x} + r\dot{x} + \frac{x}{C} = E\,(t) \tag{25}$$

Il problema in questo caso non si può trattare con metodi approssimati, perciò Colombo lo schematizza considerando L costante a tratti cioè L uguale a L_1 per $|\,x\,| < I_j$, $L = L_2$ per $|\,x\,| > I_j$, L_1, L_2 costanti. Inoltre suppone $E(t) = E$ per $2nT < t < (2n+1)T$, $E(t) = -E$ per $(2n+1)T < t < (2n+2)T$. Con considerazioni topologiche riesce a dimostrare, conforme all'esperienza, l'esistenza di un sottoarmonico stabile di periodo $6T$ cioè di ordine 3, e il risultato è valido anche se si modifica, entro certi limiti, la funzione $L(x)$.

Fra le altre ricerche compiute in Italia sui problemi non lineari citerò quelle di G. Aymerich il quale in base a un'idea di Rocard e a quanto avviene nell'orologio a pendolo scrive i termini non lineari nella forma $c\delta(x)\dot{x}$ dove c è una costante $\delta(x)$ è la funzione di Dirac. Egli ha ottenuto su questo argomento vari risultati in particolare ha proposto un sistema meccanico che presenta fenomeni di jump. Un altro di questi sistemi è stato indicato da Colombo (5) in una sua teoria del regolatore di Bouasse e Sarda.

Terminerò ricordando la recente importante ricerca di G. Sansone (2) sulla equazione del pendolo generalizzata:

$$\theta'' + f(\theta, \alpha)\theta' = g(\theta) \tag{26}$$

ove $f(\alpha, \theta)$ è una funzione positiva definita per $\alpha > 0$, $-\infty < \theta < +\infty$ continua e periodica di periodo 2π rispetto a θ, se fissato α; crescente in senso stretto rispetto ad α; $g(\theta)$ è una funzione lipschitziana periodica di periodo 2π rispetto a θ e tale che:

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta > 0$$

Egli dimostra l'esistenza di una valore critico α_0 di α (che può essere anche 0 o infinito, però indica condizioni sufficienti affinchè α_0 risulti finito) tale che per $\alpha < \alpha_0$ la (25) ha una soluzione periodica (e sotto ulteriore ipotesi una sola) di seconda specie (cioè θ' funzione periodica di periodo 2π di θ) mentre per $\alpha > \alpha_0$ non esistono soluzioni periodiche.

UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

BIBLIOGRAFIA

G. AYMERICH (1) *Sulle soluzioni autosostenute impulsivamente,* Rendiconti Sem. Facoltà Scienze Università Cagliari, XXII, 34–37, 109–116 (1953).

(2) *Modulazione di ampiezza e di fase nell'oscillatore di Rocard,* ibid. XXIII, 177–186 (1954).

(3) *Oscillazioni periodiche di un sistema di Rocard a due gradi di libertà,* ibid. XXIV, 51–62 (1954).

(4) *Oscillazioni periodiche di un sistema di Rocard a due gradi di libertà nel caso di quasi risonanza,* ibid 179–186.

(5) *Cicli di prima e di seconda specie di un sistema meccanico autosostenuto impulsivamente,* ibid XXV, 26–36 (1955).

G. COLOMBO (1) *Sopra un singolare caso che si presenta in un problema di stabilità in meccanica non lineare,* Rend. Sem. Mat. Università di Padova XXII, 123–133 (1953).

(2) *Sulle oscillazioni forzate in un circuito comprendente una bobina a nucleo di ferro,* ibid. XXIII, 407–424 (1954).

(3) *Sopra un notevole fenomeno nel campo delle vibrazioni non lineari di combinazione,* Rendiconti Lincei, (8) XXII, 726–730 (1957).

(4) *Sulle oscillazioni non lineari di combinazione,* Rendiconti Seminario Mat. Università di Padova, XXVII, 162–175 (1957).

(5) *Teoria del regolatore di Bouasse e Sarda,* ibid. XXVIII, 338–347 (1958).

P. FATOU (1) *Sur les mouvement d'un système soumis a des forces a courte periode,* Bulletin de la Societé Mathématique de France, LVI, 98–139 (1928).

F. G. FRIEDLÄNDER (1) *On the forced vibrations of quasi-linear systems,* Quarterly Journal Mech. Applied Math. III, 364–376, (1950).

D. GRAFFI (1) *Su alcune equazioni differenziali non lineari,* Rendiconti Accademia delle Scienze di Bologna, I, 57–64 (1954).

(2) *Su un'equazione funzionale non lineare della fisica matematica,* ibid. III, 64–69 (1956).

L. MINOZZI (1) *Sulle soluzioni sottoarmoniche dell'equazione di Liénard* Bollettino della Unione Matematica Italiana, (3) IX, 196–198 (1954).

G. SANSONE (1) Equazioni Differenziale nel Campo Reale, Zanichelli, Bologna 1948.

(2) *Soluzioni periodiche di seconda specie dell'equazione del pendolo generalizzata,* Memorie Accademia dei Lincei, (8) V, (sez. I) 59–79 (1959).