

# SUR CERTAINS PROBLÈMES DE TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE ET DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE EN DYNAMIQUE

PAR GEORGES REEB

## Introduction

Mon exposé du colloque de Mexico était de nature générale, je n'en approfondirai ici qu'un point particulier. Je résumerai d'abord les quatre parties de l'exposé:

Une première partie donnait, de façon fort subjective, un tableau des principales théories de topologie générale et de topologie algébrique intervenant dans certains types de recherches classiques ou récentes relatives à l'étude des propriétés qualitatives des trajectoires d'un système différentiel.

La suite de la conférence développait plus spécialement trois problèmes particuliers. Le premier [1] de ces problèmes concernait l'étude dans le cadre de la topologie générale d'une structure généralisant convenablement la notion de famille régulière de courbes et la notion de structure feuilletée. On a montré, répondant à une question posée par Nemyckii [2], comment développer dans ce cadre les propriétés classiques qui se rattachent aux notions suivantes: *ensemble minimal, ensemble indécomposable, centre, mouvement errant, récurrence, stabilité au sens de Poisson*, etc . . .

Le deuxième problème concernait une structure, appelée souvent *structure de contact* que possèdent en particulier les systèmes différentiels de la mécanique analytique classique et certaines propriétés de topologie algébrique liées à ces structures [3]. Ces recherches sont étroitement liés aux noms suivants: E. Cartan, Lewis, Lichnérowicz, Gallissot, Gray, . . .

La dernière partie a été consacrée au développement d'une question qui n'est pas sans rapports avec certains travaux de M. Ważewsky. A ce propos j'ai donné un exemple d'un champ de vecteurs  $X$  défini dans la boule creuse  $B$  de  $R^3$

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$$

vérifiant les propriétés suivantes:

- (a)  $X(x) \neq 0$  en tout point  $x$  de  $B$  et  $X$  est de classe  $C_1$
- (b) En tout point  $x$  du bord de  $B$  le vecteur  $X(x)$  est du même côté du plan tangent en  $x$  que l'origine  $0$ .
- (c) Aucune trajectoire de  $X$  ne traverse  $B$ .

Cet exemple est instructif parce que des considérations fort simples (de la théorie des points fixes de Lefschetz) montrent que l'ensemble des trajectoires asymptotiques de  $X$  (c'est à dire des trajectoires de  $X$  qui ne rencontrent pas le bord de  $B$ ) est compact mais ne saurait être homéomorphe à un complexe simplicial ou à un rétract de voisinage.

Une description explicite d'un tel exemple paraît au tome IV des "Contributions to the theory of non linear equations." J'ai indiqué, sans en donner les

raisons, qu'il était possible de construire un tel champ  $X$  de telle sorte que la propriété (c) soit stable, c. à d. de sorte que tout champ  $X'$ ,  $\epsilon$ -voisin de  $X$  (au sens de la norme dans  $R^3$ ) pour un  $\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) convenable, possède également la propriété c). Diverses conversations m'ont amené à expliciter ici cette possibilité. Je le ferai néanmoins sur un ton descriptif sans m'astreindre à donner de formules détaillées.

### 1. Construction d'un champ $X_0$ sur $S_2 \times I$

Voici quelques définitions qui nous seront utiles:

$S_2$  désignera la sphère d'équations  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , le plan  $z = 0$  est le plan équatorial de cette sphère.

$E$  désignera la zone équatoriale compacte de cette sphère limitée par les plans  $z = \pm 0,9$ .

$Z$  désignera l'adhérence du complémentaire de  $E$  dans  $S_2$ . Donc  $Z$  est la réunion de deux calottes sphériques  $Z_1$  et  $Z_2$  qui contiennent respectivement les pôles  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 0, -1)$ .

$P_t$  désigne le parallèle de  $S_2$  découpé par le plan  $z = t$  où  $-0,9 \leq t \leq 0,9$ .

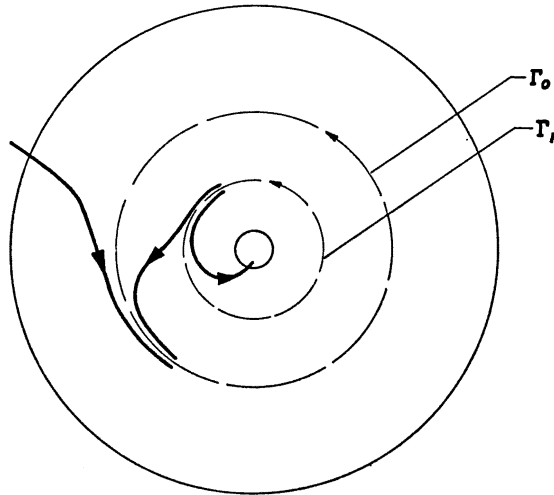
Dans la boule creuse  $S_2 \times I$  (où  $I$  est le segment  $[0, 1]$ ) on considère les sous-ensembles  $E \times I$ ,  $Z \times I$ ,  $P_t \times I$ .

On appellera  $X_1$  un champ de vecteurs de classe  $C_2$  choisi une fois pour toutes dans  $P_0 \times I$  et qui vérifie les propriétés suivantes:

- (i)  $X_1(x) \neq 0$  en tout point  $x$  de  $P_0 \times I$ .
- (ii)  $X_1(x)$  a pour composantes  $(0, -1)$  en tout point de  $P_0 \times \{0\} \cup P_0 \times \{1\}$ .

(iii)  $X_1(x)$  admet exactement deux cycles limites  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$ , le cycle  $\Gamma_0$  est stable et  $\Gamma_1$  est instable.

L'allure des trajectoires du champ de vecteurs  $X_1$  est caractérisée par le croquis suivant:



Il existe un homéomorphisme naturel et analytique de  $P_0$  sur  $P_t$ , à savoir celui qui conserve les longitudes; cet homéomorphisme s'étend en un homéomorphisme naturel  $h_t$  de  $P_0 \times I$  sur  $P_t \times I$ . On désignera par  $X_t$  le champ de vecteur défini dans  $P_t \times I$  image de  $X_1$  par  $h_t$ . Enfin on désignera par  $X_E$  le champ de vecteurs dans  $E$  dont la restriction à  $P_t \times I$  est  $X_t$ . Il est clair que  $X_E$  est de classe  $C_1$ . De même  $\Gamma_t = h_t(\Gamma_1)$  et  $\Gamma$  sera la réunion des  $\Gamma_t$ .

Enfin on désignera par  $X_0$  un champ de vecteurs de classe  $C_1$  défini sur  $S_2 \times I$  vérifiant les propriétés suivantes:

- (i)  $X_0(x) \neq 0$  en tout point de  $S_2 \times I$
- (ii) Les composantes de  $X_0(x)$  en un point  $a$  de  $S_2 \times \{0\} \cup S_2 \times \{1\}$  sur  $S_1$  et  $I$  sont  $(0, -1)$ .
- (iii) La restriction de  $X_0$  à  $E \times I$  est  $X_E$

Il est bien clair qu'un tel champ existe.

On remarquera que les seules trajectoires de  $X_0$  qui traversent  $S_2 \times I$  sont celles qui rencontrent la calotte  $Z \times \{0\}$ . L'ensemble  $\Gamma = \bigcup_t \Gamma_t$  est "l'obstacle au franchissement". Cet obstacle n'est pas détruit par une légère modification de  $X'$ .

### 2. Les champs stabilisateurs $\delta$ et $\epsilon$

La calotte  $Z_1$  ou  $Z_2$  est homéomorphe par un homéomorphisme naturel (projection)  $k_1$  ou  $k_2$  à un disque  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ . On désignera par  $r$  le champ de vecteurs sur  $D$  dont les composantes dans un système de coordonnées polaires  $\rho, \theta$  (d'origine  $(0, 0)$ ) sont  $(-\rho, 0)$ . Les champs appliqués par  $k_1$  et  $k_2$  sur  $r$  sont appelés  $r_1$  et  $r_2$ , on désigne par  $s$  un champ de vecteur de classe  $C_1$  défini sur  $S_2$  de classe  $C_1$ , qui sur  $Z_1$  et  $Z_2$  se réduit à  $r_1$  et  $r_2$ ; un tel champ existe. On appelle  $\delta_t$  le champ image de  $ts$  par l'homéomorphisme canonique  $g$  de  $S_2$  sur  $S_2 \times \{t\}$  ( $t \in I$ ) et enfin  $\delta$  désigne le champ de vecteurs de classe  $C_1$  défini sur  $S_2 \times I$  dont la restriction à  $S_2 \times \{t\}$  est  $\delta_t$ , pour  $t \in I$ . On définira  $\epsilon$  de façon analogue posant  $\epsilon_t$  image de  $-(1-t)s$  par  $g$ .

Le rôle du champ stabilisateur  $\delta$  sera le suivant: si nous remplaçons le champ  $X_0$  défini au 1° par un champ voisin  $X''$ , il se peut qu'une trajectoire de  $X''$  issue de la calotte  $Z_1 \times \{1\}$  traverse  $S_2 \times I$  et rencontre  $Z_1 \times \{0\}$ , et ceci pour tout  $\eta > 0$ , malgré l'obstacle au franchissement  $\Gamma$  examiné en §1. (En effet cet obstacle peut être contourné par une trajectoire). Le champ  $X_0 + \delta = Y$  ne présente plus cet inconvénient, d'une façon précise:

(i) Les trajectoires de  $Y$  issues de  $Z_1 \times \{1\}$  ou  $Z_2 \times \{1\}$  ne rencontrent pas  $Z_1 \times \{0\}$  ou  $Z_2 \times \{0\}$ .

(ii) Il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout champ  $Y'$ , où  $Y'$  est  $\eta$ -voisin de  $Y$ , la propriété énoncée en (i) soit conservées: c. à d. les trajectoires de  $Y'$  issues de  $Z_1 \times \{1\}$  ou  $Z_2 \times \{1\}$  ne rencontrent pas  $Z_1 \times \{0\}$  ou  $Z_2 \times \{0\}$ .

L'effet du champ stabilisateur  $\epsilon$  sera en quelque sorte opposé. Soit  $T = X_0 + \epsilon$ , aucune trajectoire de  $T$  qui rencontre  $Z_1 \times \{1\}$  ne quitte et ne traverse  $Z_1 \times I$  et cette dernière propriété est vraie pour un choix convenable de  $\eta > 0$ , pour tous les champs  $T''$  qui sont  $\eta$ -voisins de  $T$ .

En résumé les champs stabilisateurs  $\delta$  et  $\epsilon$  empêchent selon le cas les trajectoires indésirables de rentrer dans  $Z \times I$  ou de quitter  $Z \times I$ .

### 3. L'exemple annoncé

La construction du champ  $X$  annoncée à la fin de l'introduction est maintenant facile. Dans un premier exemplaire  $\Delta_1$  de  $S_2 \times I$  on construit le champ  $Y$  comme ci-dessus. Dans un deuxième exemplaire  $\Delta_2$  de  $S_2 \times I$  on construit le champ  $T$  comme ci-dessus.

Ces deux exemplaires  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont supposés des cylindres solides et droits de l'espace euclidien  $R^4$ . On les place de telle sorte que la section droite  $S_2 \times \{0\}$  dans  $\Delta_1$  soit confondue avec  $S_2 \times \{1\}$  dans  $\Delta_2$  et que cette sphère soit l'intersection commune de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ ; on prend soin néanmoins que l'axe polaire de  $S_2 \times \{0\}$  dans  $\Delta_1$  fasse un angle de  $\pi/2$  avec l'axe des poles de  $S_2 \times \{1\}$  dans  $\Delta_2$ .

Les champs  $T$  et  $X$  se raccordent ainsi en un champ  $X_1$  les calottes  $Z_1 \times \{0\}$  et  $Z_2 \times \{0\}$  de  $\Delta_1$  sont à l'intérieur de la zone équatoriale  $E \times \{1\}$  de  $\Delta_2$ , et c'est cette disposition qui assure l'impossibilité pour une trajectoire d'un champ  $X'$  qui est assez voisin de  $X_1$  traverser le solide  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ .

Il est maintenant clair qu'on peut choisir pour  $X$  un champ analytique.

INSTITUT FOURIER, GRENOBLE AND RIAS, BALTIMORE, MARYLAND

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. REEB, *Sur la théorie générale des systèmes dynamiques*, Annales de l'Institut Fourier, vol. 6, 1955-56, 89-112.
- [2] V. NEMYCKII, *La théorie générale des systèmes dynamiques*, Uspechi Math. Nauk 5.3 vol. 37 (1950) 128-135.
- [3] G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques*, Mémoires Académie Royale Belgique 1635, 64 pages.