SOBRE EL ANILLO DE COHOMOLOGIA MODULO 2 DE UN ESPACIO FIBRADO ESFERICAMENTE

POR ROBERTO VÁZQUEZ

1. Introducción

Al considerar un espacio fibrado cuya fibra es una esfera ó, cuando menos, tiene la cohomología de una esfera respecto a cierto anillo de coeficientes, se presenta el problema de saber si el anillo de cohomología del espacio total del fibrado está determinado por la cohomología de la base y ciertos invariantes de la estructura fibrada. Este problema se ha resuelto en casos especiales entre los cuales podemos citar los siguientes:

(A) Sea (E, p, B) un espacio fibrado de Serre donde F es la fibra sobre un punto de B. Se supone que F y B son espacios arcoconectables, que la cohomología $H(F; R)$ de F con coeficientes reales es la de una $(k - 1)$-esfera donde k es par y el sistema local $H^*(F; R)$ en B es simple. En estas condiciones el anillo de cohomología real $H^*(E; R)$ depende únicamente de la clase característica, relativa a R, del espacio fibrado (E, p, B). (Véase [3])

(B) Sea $(E, p, B, S^{k-1}, S0(k))$ un haz de fibras (fibre bundle) cuya fibra es una $(k - 1)$-esfera S^{k-1}, k impar, siendo B un poliedro. Se supone: el sistema local $H^*(S^{k-1}; Z)$ en B es simple, la clase característica entera del espacio fibrado es nula y $H^{2k-2}(B; Z)$ no tiene elementos de orden 2. En estas condiciones el anillo de cohomología $H^*(E; Z)$ está determinado por W_{k-1} y P_{2k-2}, clase característica de dimension $k - 1$ de Stiefel-Whitney y clase de Pontriaguin de dimensión $2k - 2$, respectivamente, del espacio fibrado. (Véase [1]).

En el presente trabajo se considera el caso módulo 2 para espacios fibrados de Serre cuya fibra en un punto tiene la cohomología de una $(k - 1)$-esfera, para k par y con hipótesis adicionales análogas a las hechas en (B). Los resultados obtenidos constituyen los Teoremas 1 y 2 del párrafo 3.

2. La sucesión de Gysin

Para mayor claridad de la exposición se repasan en este párrafo algunos resultados conocidos; además se deducen relaciones que se emplearán después en las demostraciones de los Teoremas 1 y 2.

Sea (E, p, B) un espacio fibrado de Serre y F la fibra sobre un punto de B. En todo lo que sigue se supone que B y F son espacios arcoconectables; denotaremos con i a la inclusión de F en E. Sea G un anillo de ideales principales y supongamos que la cohomología de F con coeficientes en G es la de una $(k - 1)$-esfera con $k \geqslant 2$ y que el sistema local $H^*(F; G)$ en B es simple; identificaremos G con $H^{k-1}(F; G)$. En estas condiciones existe una $(k - 1)$-cocadena ξ' de E tal que $i^{\#}\xi'$ es un cociclo perteneciente al elemento unitario de $H^{k-1}(F; G)$ y $d\xi' = p^{\#}W_k$, donde W'_k es un cociclo en la clase característica $W_k \in H^k(B; G)$

del espacio fibrado. Empleando argumentos usuales en la sucesión espectral de cohomología con coeficientes en G, de (E, p, B) se demuestra el

LEMA 1. *Todo elemento u de $H^q(E; G)$ posee un cociclo de la forma*

$$u' = \xi' \cdot p^{\#} v' + p^{\#} z' \tag{2.1}$$

donde v' es un $(q - k + 1)$-cociclo de B y $dz' = -W'_k \cdot v'$. La clase de cohomología v de v' depende únicamente de u y no de la elección particular de ξ'.

Sea $\psi\colon H^q(E; G) \to H^{q-k+1}(B; G)$ la transformación tal que $\psi(u) = v$ entonces ψ es homomorfismo. Además consideremos los homomorfismos $p^*\colon H^q(B; G) \to H^q(E; G)$ y $\mu\colon H^{q-k}(B; G) \to H^q(B; G)$ donde $\mu(v) = W_k \cdot v$. Se obtiene así una sucesión exacta

$$\cdots \to H^{q-k}(B; G) \xrightarrow{\mu} H^q(B; G) \xrightarrow{p^*} H^q(E; G) \xrightarrow{\psi} H^{q-k+1}(B; G) \to \cdots$$

que se llama la sucesión de Gysin de (E, p, B).

Si $W_k = 0$ entonces la sucesión anterior se descompone en partes

$$0 \to H^q(B; G) \xrightarrow{p^*} H^q(E, G) \xrightarrow{\psi} H^{q-k+1}(B; G) \to 0. \tag{2.2}$$

En este caso ξ' puede elegirse de tal modo que sea cociclo; si ξ es su clase de cohomología entonces ξ es cualquier elemento tal que $\psi(\xi)$ es el unitario de $H^0(B; G)$; (2.1) implica que todo u de $H^q(E; G)$ puede expresarse de un modo único, previa elección de la ξ, en la forma

$$u = \xi \cdot p^* \psi(u) + p^* z. \tag{2.3}$$

La estructura multiplicativa de $H^*(E; G)$ está completamente determinada en función de los elementos de la expresión de ξ^2 dada por (2.3).

Si $G = Z_2$ entonces los cuadrados de Steenrod de ξ son de la forma

$$Sq^i \xi = \xi \cdot p^* w_i + p^* \alpha_i \tag{2.4}$$

donde w_i es la clase característica generalizada de dimensión i, módulo 2, de Stiefel-Whitney del espacio (E, p, B) (Véase [4]).

LEMMA 2. *Para i par se tiene*

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i \cdot w_i + Sq^1 \alpha_i \tag{2.5}$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la fórmula de Cartan se obtiene

$$Sq^1(\xi \cdot p^* w_i) = \xi \cdot p^*(Sq^1 w_i + w_1 \cdot w_i) + p^*(\alpha_1 \cdot w_i).$$

Utilizando la relación $Sq^1 Sq^i = Sq^{i+1}$ para i par:

$$\xi \cdot p^* w_{i+1} + p^* \alpha_{i+1} = \xi \cdot p^*(Sq^1 w_i + w_1 \cdot w_i) + p^*(\alpha_i w_i + Sq^1 \alpha_i).$$

Por la unicidad en (2.3) y por ser p^* monomorfismo se deduce (2.5).

Si ξ_1 es cualquier otro elemento tal que $\psi(\xi_1)$ es el generador de $H^0(B; Z_2)$

entonces $\xi_1 = \xi + p^*\beta$ donde β pertenece a $H^{k-1}(B; Z_2)$. Sea α_i' el elemento correspondiente a $Sq^i\xi_1$ según (2.4); se deduce inmediatamente:

$$\alpha_i' = Sq^i\beta + \beta\cdot w_i + \alpha_i . \tag{2.6}$$

Para todo espacio X sea

$$\eta: H^*(X; Z) \to H^*(X; Z_2)$$

el homomorfismo inducido por la reducción módulo 2 del grupo Z de coeficientes. Para una referencia posterior citamos el siguiente

LEMMA 3. *Si u está en la imagen de η entonces $Sq^1u = 0$.*

3. Estructura multiplicativa de $H^*(E; Z_2)$

En este párrafo consideraremos espacios fibrados que satisfacen ciertas hipótesis.

Definición 1: Diremos que un espacio fibrado (E, p, B) de Serre es de tipo I si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) B y la fibra F sobre un punto de B son espacios arcoconectables.

(ii) La cohomología de F con coeficientes enteros es la de una $(k-1)$-esfera y k es par.

(iii) El sistema local $H^*(F; Z)$ en B es simple.

(iv) La clase característica de (E, p, B), relativa a Z, es nula.

(v) $H^{2k-2}(B; Z)$ no tiene elementos de orden 2.

TEOREMA 1. *Si (E, p, B) es un espacio fibrado de tipo I la estructura multiplicativa de $H^*(E; Z_2)$ está determinada por w_{k-1}, clase característica generalizada módulo 2 de dimensión $k-1$ de Stiefel Whitney.*

DEMOSTRACIÓN. Por (iv) existe x en $H^{k-1}(E; Z)$ tal que i^*x es un generador de $H^{k-1}(F; Z)$, donde i es la inclusión de F en E. Sea $\xi = \eta x$ entonces $\psi(\xi)$ es el generador de $H^0(B; Z_2)$ y por el Lema 3 es $Sq^1\xi = 0$ por (2.4) se tiene $\alpha_1 = 0$ (y también $w_1 = 0$). Por el teorema de coeficientes universales para la cohomología (Véase, por ejemplo, [2]) se tiene la sucesión exacta

$$0 \to H^q(B; Z) \otimes Z_2 \to H^q(B; Z_2) \to \mathrm{Tor}_1\,(H^{q+1}(B; Z), Z_2) \to 0.$$

La imagen de $\eta: H^*(B; Z) \to H^*(B; Z_2)$ es $H^*(B; Z) \otimes Z_2$ entonces por (v) y Lema 3 resulta $Sq^1\alpha_{k-2} = 0$. Ya que k es par (2.5) implica $\alpha_{k-1} = 0$ de donde $\xi^2 = \xi\cdot p^*w_{k-1}$. Así pues la estructura multiplicativa de $H^*(E; Z_2)$ está determinada por w_{k-1}.

En el resto del párrafo se considera otro caso en el que no necesariamente es nula la clase w_1.

Denotemos con

$$\Gamma: H^{k-1}(B; Z_2) \to H^k(B; Z_2)$$

al homomorfismo tal que $\Gamma(\beta) = Sq^1\beta + \beta \cdot w_1$.

Definición 2: Un espacio fibrado (E, p, B) de Serre se llamará del tipo II si satisface las condiciones (i) y (v) de la definición 1 junto con las siguientes:

(ii′) La cohomología de F con coeficientes Z_2 es la de una $(k - 1)$ esfera y k es par.

(iii′) Conúcleo $\Gamma = 0$.

(iv′) La clase característica de (E, p, B), relativa a Z_2, es nula.

Supongamos que (E, p, B) y (E_1, p_1, B_1) sean dos espacios fibrados del tipo II con una k común y que exista un isomorfismo de anillos $\varphi_1 : H^*(B; Z_2) \to H^*(B; Z_2)$ que aplique la clase w_{k-1} de B en la correspondiente de B_1. Se pueden definir isomorfismos de módulos

$$\varphi: H^*(E; Z_2) \to H^*(E_1; Z_2)$$

por la condición:

$$\text{Si } u = \xi \cdot p^*\psi(u) + p^*z \text{ entonces } \varphi(u) = \xi_1 \cdot p^*\varphi_1\psi(u) + p^*\varphi_1 z.$$

Se tiene una φ para cada par de elecciones ξ y ξ_1. En estas condiciones se tiene el

TEOREMA 2. *Existe una φ que es isomorfismo de anillos.*

DEMOSTRACIÓN. Por (iii′) y (2.6) se puede elegir ξ tal que $\alpha_1 = 0$. Debido a (v) se puede proceder ahora como en la demostración del Teorema 1 y resulta $\xi^2 = \xi \cdot p^*w_{k-1}$. Análogamente para (E_1, p_1, B_1) se obtiene ξ_1 tal que $\xi_1^2 = \xi_1 \cdot p^*\varphi_1(w_{k-1})$. Se comprueba sin dificultad que la φ correspondiente a estos elementos ξ y ξ_1 es isomorfismo de anillos lo que demuestra el Teorema 2.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MÉXICO E INSTITUTO NACIONAL DE LA INVESTIGACION CIENTÍFICA.

BIBLIOGRAFÍA

[1] W. S. MASSEY, *On the cohomology ring of a sphere bundle,* Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 7 (1958), pp. 265–290.

[2] F. P. PETERSON, *Some results on cohomotopy groups,* American Journal of Mathematics. Vol. 78, (1956), pp. 243–257.

[3] R. THOM, *Opérations en cohomologie réelle,* Exposé 17, Seminaire H. Cartan 1955.

[4] R. VÁZQUEZ, *Clases características generalizadas y cuadrados de Steenrod en la sucesión de Gysin de un espacio fibrado esféricamente,* III Simposio Latinoamericano de Matemática, Buenos Aires, Argentina, (1959).