SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES PERIODICAS CON UN PARAMETRO PEQUEÑO*

POR CARLOS IMAZ

1. Prefacio

El propósito principal del presente trabajo es el estudio de sistemas diferenciales lineales de la forma

$$w' = Aw + \epsilon\Phi(t)w \qquad \left(' = \frac{d}{dt}\right) \tag{1.1}$$

donde $w = \text{col}\,(w_1, \cdots, w_n)$, ϵ es un parámetro pequeño, A es una matriz constante $n \times n$, y $\Phi(t)$ es una matriz $n \times n$ de funciones periódicas en t, de periodo T, integrables en el sentido de Lebesgue en $[0, T]$. Ecuaciones como (1.1) han sido el objeto de estudio de un gran número de matemáticos y empezamos mencionando a G. Floquet ([4]),[1] A. Liapunov ([12]), H. Poincaré ([13]). A éste respecto el más importante de los tres mencionados es Floquet, quien en cierto sentido resolvió los problemas teóricos conectados con la ecuación (1.1). Para poder decir algo sobre el comportamiento asíntótico de las soluciones de la ecuación (1.1) todo lo que se necesita es conocer los multiplicadores característicos[2], y éstos nos los proveén las soluciones de la ecuación característica

$$\det |\, W(T) - \lambda E \,| = 0 \tag{1.2}$$

donde $W(t)$, $W(0) = E$, es una matriz fundamental de (1.1). En cierto sentido esto resuelve todos los problemas; en otro sentido, aquí es precísamente donde el problema comienza. Quienquiera puede tratar de forzar las soluciones de (1.2), pero la esperanza de tener éxito en esta dirección es verdaderamente pobre.

Por lo tanto, se han inventado diversos métodos para obtener las soluciones de (1.1). La idea básica en la mayoría de estos métodos es construir una función $w = w(t, \epsilon, a)$ que depende de ciertos parámetros arbitrarios a de tal manera que la función $w(t, \epsilon, a)$ satisface una ecuación diferencial "relacionada"

$$w'(t, \epsilon, a) = f(w(t, \epsilon, a), t, \epsilon). \tag{1.3}$$

La construcción de la ecuación relacionada (1.3) se hace de tal manera que para una elección conveniente de los parámetros a como funciones de ϵ, se obtiene que $f(w(t, \epsilon, a(\epsilon)), t, \epsilon) = Aw + \epsilon\Phi(t)w$; es decir, $w(t, \epsilon, a(\epsilon))$ se convierte en una solución de (1.1). Las relaciones que determinan a se conocen con los nombre de ecuaciones de "bifurcación" o "determinantes." Procedimientos del tipo anterior

---

* Este trabajo fue presentado como parte de los requisitos para la obtención del grado de Doctor en Matemáticas en la UNAM, México. Quiero hacer patente mi agradecimiento al Dr. Jack K. Hale por sus sugestiones y ayuda durante el desarrollo de este trabajo.

[1] Números en [ ] se refieren a la bibliografía puesta al final.

[2] Vease la sección 2.

han sido seguidos por L. Cesari ([2]), K. O. Friederichs ([5]), M. Golomb)[6]), J. K. Hale ([7]), D. C. Lewis ([10]), y Y. Sibuya ([14]). El mismo tipo de procedimiento puede usarse para determinar soluciones periódicas de ecuaciones no lineales.

Un método que ha probado ser útil fue introducido por L. Cesari y desarrollado posteriormente por J. K. Hale, R. A. Gambill y otros (vease [1] para una lista completa de referencias sobre este método). Ellos consideraban en lugar de la ecuación (1.1) la ecuación

$$w' = (B - \epsilon D)w + \epsilon\Phi(t)w, \tag{1.4}$$

en cuyo caso las ecuaciones de bifurcación son

$$B - \epsilon D = A.$$

La tarea de la matriz D en (1.4) es eliminar los términos "seculares" que aparecen en el proceso de integración al resolver (1.1). La idea es que si se da algún método de aproximaciones sucesivas para resolver (1.1), se desearía que las aproximaciones sucesivas tengan ciertas propiedades cualitativas especificadas. Los términos seculares son aquellos que destruyen estas propiedades cualitativas.

Se ha demostrado que el procedimiento (1.4) tiene ciertos inconvenientes. Desarrollos más recientes por L. Cesari y J. K. Hale en [2] y [7] han llevado a reemplazar (1.1) por

$$w' = Aw + \epsilon\Phi(t)w + \epsilon P_0(\Phi w),$$

donde $P_0(\Phi w)$ representa cierto vector. El papel de $P_0(\Phi w)$ es otra vez la eliminación de los términos seculares, y las ecuaciones de bifurcación son

$$P_0(\Phi w) = 0. \tag{1.5}$$

En principio este método parece ser más simple que (1.4), y para el desarrollo de este trabajo resultó ser el más adecuado. (De hecho pude obtener varios de los resultados utilizando el método (1.4), pero llegado cierto momento las dificultades técnicas parecían ser demasiado grandes como para ser factible el seguir adelante con este método.) Lo que es más, puede demostrarse que en cierto sentido la posibilidad de resolver (1.5) es una condición necesaria y suficiente para resolver (1.1) para ϵ pequeña (vease la sección 5). El procedimiento seguido en este trabajo sigue en parte el de [7].

Hay dos tipos distintos de problemas de estabilidad asociados con la ecuación (1.1); concretamente, estabilidad en la semirecta $0 \leqq t < +\infty$ y estabilidad en toda la recta $-\infty < t < +\infty$. Si se utiliza un método de aproximaciones sucesivas para discutir la ecuación (1.1), el primer problema puede en general resolverse investigando sólo un número finito de aproximaciones sucesivas, mientras que el segundo problema requiere información extra concerniente a todas las aproximaciones sucesivas. Como han hecho notar V. A. Yakubovic ([15]) y J. K. Hale ([17]), esta información extra puede obtenerse para sistemas recíprocos (vease la sección 3) y en este caso los dos problemas de estabilidad se convierten esencialmente en uno solo.

La mayoría de los trabajos que tratan con (1.1) suponen que las raices características de la matriz A tienen divisores elementales simples. Desde luego, la teoría de Floquet no depende de tal hipótesis, pero es difícil obtener un método práctico eficiente para determinar el comportamiento de (1.1) si no se añade esta hipótesis. El objetivo principal del presente trabajo es estudiar el caso en que hay divisores elementales no simples entre las raices características de la matriz A. Un trabajo que también trata sobre este problema es [9].

La sección 2 está dedicada a una breve discusión de la teoría de Floquet para sistemas como (1.1), haciendo énfasis especial en el papel que juegan los exponentes característicos y los multiplicadores característicos. La sección 3 introduce el concepto de sistema recíproco y demuestra la forma que este concepto se conecta con el análisis de las soluciones. El tipo general de sistemas a estudiarse se introducen en la sección 4, junto con ciertas transformaciones que llevan estos sistemas a una forma tipo. En la sección 5 se construye un método de aproximaciones sucesivas, y se obtienen condiciones para la existencia de las soluciones. En las secciones 6 y 7 demostramos la existencia de las soluciones a las ecuaciones de bifurcación y se calculan algunas aproximaciones de los exponentes característicos; es interesante notar que estos exponentes característicos dependen de muy diversas potencias del parámetro ϵ, y, utilizando el polígono de Newton en conexión con el teorema de preparación de Weierstrass, se discuten algunas condiciones de analiticidad de los exponentes característicos. Resultados parciales de este tipo han sido obtenidos por M. Ya. Kushul ([9]). Las secciones 8 y 9 dan algunos resultados sobre el comportamiento asintótico de las soluciones, y, en particular, se demuestra que cuando el grado de los divisores elementales de la matriz A es mayor que 2, entonces, el sistema (1.1) es "casi siempre" inestable. La sección 10 proveé un ejemplo en cual bajo condiciones de no resonancia hay soluciones acotadas y no acotadas en función de ciertos coeficientes de la ecuación diferencial. En la sección 11 aplicamos nuestro método al cálculo de valores característicos de matrices constantes perturbadas por matrices "pequeñas," estos resultados de la sección 11 son de particular interés en el terreno del análisis numérico.

Cierta notación fija es usada a lo largo del trabajo y las definiciones necesarias las damos aquí. Si $x = \mathrm{col}(x_1, \cdots, x_n)$ es un vector de n dimensiones y $A = (a_{ij})$ es una matriz de n columnas y renglones, entonces $\| x \| = \max | x_i |$ $(i = 1, \cdots, n)$ y $\| A \| = \max | a_{ij} |$ $(i, j = 1, \cdots, n)$. El símbolo $\bar{a}$ denota siempre el complejo conjugado de a. Los símbolos $F(\delta) = O(\delta^\alpha)$, y $F^*(\delta) = o(\delta^\alpha)$, siempre denotarán $\lim_{\delta\to 0} F(\delta)/\delta^\alpha = 0$, y $\lim_{\delta\to 0} F^*(\delta)/\delta^\alpha = \text{const.}$, respectivamente.

2. Teoría de Floquet

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$w' = A(t)w \tag{2.1}$$

donde $w = \mathrm{col}(w_1, \cdots, w_n)$, $A(t)$ es una matriz $n \times n$ de funciones periódicas y complejas de t, con periodo $T = 2\pi/\omega$, integrables en el sentido de Lebesgue en

$[0, T]$. Resultados clásicos de la teoría de Floquet implican que si $W(t)$, $W(0) = E$, es una matriz fundamental de soluciones absolutamente continuas (A.C.) de (2.1); ésto es, si las n columnas de $W(t)$ son n soluciones A.C. linealmente independientes de (2.1), con $\det W(t) \neq 0$, entonces

$$W(t) = P(t)e^{Bt},$$

donde $P(t)$ es una matriz $n \times n$ no singular, $P(t + T) = P(t)$, y B es una matriz $n \times n$ constante. Las raices características $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de e^{BT} se llaman los multiplicadores de (2.1), y las raices características de B, digamos $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, se llaman exponentes característicos de (2.1). Nótese que los exponentes característicos están determinados por la relación

$$\lambda_j = e^{\alpha_j T}$$

y por lo tanto las partes imaginarias de α_j sólo están determinadas módulo $i\omega$.

Por las observaciones anteriores sabemos que las soluciones de (2.1) pueden escribirse como el producto de ciertas exponenciales con funciones periódicas y potencias de t. Si todos los multiplicadores son distintos entonces las soluciones son el producto de exponenciales y funciones periódicas, si algunos de los multiplicadores son iguales entonces pueden aparecer potencias de t.

Nótese también que los multiplicadores pueden definirse como raices de la ecuación

$$\det | W(T) - \lambda E | = 0$$

Las consideraciones anteriores también son válidas si $A(t) = A_0$ es constante, ya que en este caso puede tomarse un periodo arbitrario $T \neq 0$. En particular los multiplicadores serán las raices características de la matriz $e^{A_0 T}$, y por lo tanto las raices características de A_0 pueden considerarse como un conjunto de exponentes característicos.

Consideremos ahora un sistema más general

$$w' = A(t, \epsilon)w \tag{2.2}$$

con las mismas condiciones que teniamos en (2.1), ϵ es un parámetro pequeño complejo o real, $A(t, \epsilon)$ es continua en ϵ en una vecindad de $\epsilon = 0$, $A(t, 0) = A_0$ es constante, y $\| A(t, \epsilon) \| < f(t)$ donde $f(t)$ es integrable en el sentido de Lebesgue en $[0, T]$, para $0 \leqq | \epsilon | \leqq \epsilon_0$.

Si $W(t, \epsilon)$ es una matriz fundamental de (2.2), $W(0, \epsilon) = E$, entonces los multiplicadores característicos $\lambda_1(\epsilon), \cdots, \lambda_n(\epsilon)$ de (2.2) pueden definirse como raices de la ecuación

$$\det | W(T, \epsilon) - \lambda E | = 0$$

y los exponentes característicos, $\alpha_1(\epsilon), \cdots, \alpha_n(\epsilon)$, con sus partes imaginarias determinadas módulo $i\omega$, por las relaciones

$$\lambda_j(\epsilon) = e^{\alpha_j(\epsilon) T}, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

Es sabido (vease [1]) que en estas circunstancias $\lambda_j(\epsilon)$, $j = 1, \cdots, n$, son continuas en ϵ para $\epsilon = 0$, y por tanto una determinación de las $\alpha_j(\epsilon)$ puede considerarse continua. Más aun, si $A(t, \epsilon)$ es analítica en ϵ para $\epsilon = 0$, entonces lo son $\lambda_j(\epsilon)$ y $\alpha_j(\epsilon)$ con a lo más puntos ramificados de orden finito. Un punto ramificado nos lo proporciona el ejemplo siguiente:

$$x_1' = x_1 + x_2$$

$$x_2' = x_2 + x_3 + \epsilon x_1$$

$$x_3' = x_3 + \epsilon x_2$$

donde los exponentes característicos se determinan de manera que $\alpha_j(0) = 1$, $j = 1, 2, 3$. Entonces

$$\alpha_1(\epsilon) = 1$$

$$\alpha_2(\epsilon) = 1 + \sqrt{2}\, \epsilon^{1/2}$$

$$\alpha_3(\epsilon) = 1 - \sqrt{2}\, \epsilon^{1/2}$$

lo cual de hecho hace notar que las potencias de ϵ no están relacionadas en forma obvia ni con la dimensión del sistema ni con el grado de los divisores elementales no simples de la matriz $A(t, 0) = A_0$.[3]

Volviendo al sistema (2.2), sabemos por las observaciones hechas para sistemas con coeficientes constantes que para $\epsilon = 0$ los multiplicadores de (2.2) son las raices características de la matriz $e^{A_0 T}$. En consecuencia conocemos los valores de $\lambda_j(\epsilon)$ en $\epsilon = 0, j = 1, \cdots, n$, y sus multipilicidades. Sean

$$\lambda_1^{(0)}, \cdots, \lambda_q^{(0)} \qquad q \leqq n$$

las raices características distintas de $e^{A_0 T}$ con multiplicidades $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_q$, respectivamente. Como las funciones $\lambda_j(\epsilon)$, $j = 1, \cdots, n$, son continuas en ϵ para $\epsilon = 0$, existen q vecindades $V_1, \cdots, V_q$, de $\lambda_1^{(0)}, \cdots, \lambda_q^{(0)}$, respectivamente, tales que para $0 \leqq |\epsilon| \leqq \epsilon_0$ solo μ_k multiplicadores característicos de (2.2) están en V_k para $k = 1, \cdots, q$, esto es, aquellos μ_k que se reducen a $\lambda_k^{(0)}$ cuando $\epsilon = 0$.

Hasta aquí puede llegarse sin la ayuda de elementos auxiliares. Una buena ayuda nos la proveé el método de aproximaciones sucesivas inventado por Cesari, y mejorado posteriormente por el mismo Cesari, Hale y otros ([2, 7]). Este método nos permite aislar aquellos multiplicadores que se originan a partir de $\lambda_j^{(0)}$ para $\epsilon = 0$. Por lo tanto es posible calcular los multiplicadores de (2.2) en grupos de μ_k de ellos, y además, de calcularlos independientemente de los otros grupos. No parece factible que utilizando solo la teoría de Floquet pudieran lograrse estos resultados, y de aquí la necesidad de introducir algún tipo de aproximaciones sucesivas. También se han inventado otros métodos para obtener esencialmente el mismo fin.

[3] Parece que existe una falsa concepción respecto a este hecho, vease, por ejemplo, [6], pag. 298.

En mi trabajo utilizo un procedimiento completamente similar al descrito antes. En la sección 4 se introducen ciertas transformaciones que en cierto sentido aislan los multiplicadores, y en las secciones 6 y 7 desarrollamos un método para calcular los exponentes característicos asociados con ellos.

La importancia de los exponentes y multiplicadores característicos es que determinan por completo el comportamiento asintótico de las soluciones de sistemas como (2.2). De hecho, sean $\lambda_j(\epsilon)$, $j = 1, \cdots, n$, los multiplicadores de (2.2). Si $|\lambda_j(\epsilon)| < 1, j = 1, \cdots, n, 0 < |\epsilon| < \epsilon_0$, entonces todas las soluciones de (2.2) tienden a cero cuando $t \to +\infty$, y lo hacen exponencialmente. En función de los exponentes característicos la condición $|\lambda_j(\epsilon)| < 1$ se traduce en la condición de que las partes reales de los exponentes característicos sean negativas.

Si $|\lambda_j(\epsilon)| = 1, j = 1, \cdots, n, 0 < |\epsilon| < \epsilon_0$, y si $\lambda_j(\epsilon) \neq \lambda_k(\epsilon)$ $j \neq k$, entonces todas las soluciones de (2.2) son acotadas en $-\infty < t < +\infty, 0 < |\epsilon| < \epsilon_0$. Para los exponentes característicos $\alpha_j(\epsilon)$ ésto puede traducirse en las condiciones

$$\alpha_j(\epsilon) \not\equiv \alpha_k(\epsilon) \pmod{i\omega}, \qquad j \neq k,$$

$$\text{Real } [\alpha_j(\epsilon)] = 0, \qquad j = 1, \cdots, n, \qquad 0 < |\epsilon| < \epsilon_0.$$

Finalmente, si para alguna j, $|\lambda_j(\epsilon)| > 1$ para toda $\epsilon \neq 0$, entonces una infinidad de soluciones de (2.2) tienden a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$, y lo hacen exponencialmente, o equivalentemente, para alguna j, Real $[\alpha_j(\epsilon)] > 0$, para toda $\epsilon \neq 0$.

Nótese de la discusión anterior que esencialmente hay dos problemas diferentes. Uno es determinar la acotación de soluciones en las semirectas, $0 < t < +\infty$ o $0 > t > -\infty$, el otro determinar la acotación en toda la recta, $-\infty < t < +\infty$. El primer problema es en general más sencillo de resolver por argumentos de continuidad si miramos solo unas cuantas de las aproximaciones de los exponentes característicos. El segundo problema necesita mayor información, y en la sección siguiente discutimos los tipos de sistemas para los cuales los dos problemas son esencialmente el mismo.

3. Sistemas recíprocos

Gran parte de las ideas generales de esta sección están contenidas en [7, 8], y se repiten para dar mayor continuidad al trabajo.

Consideremos ahora un sistema real

$$w' = A(t, \epsilon)w \tag{3.1}$$

que salvo por la condición de ser real satisface las mismas condiciones que (2.2). Diremos que el sistema (3.1) es recíproco si el hecho de que $\lambda(\epsilon)$ sea un multiplicador de él implica que también lo es $\lambda^{-1}(\epsilon)$. Más aun, como (3.1) es real, se tiene que $\bar{\lambda}(\epsilon)$ también es un multiplicador de (3.1).

La propiedad de reciprocidad nos proveé con un excelente criterio para determinar acotación de las soluciones. En efecto, supongamos que $\lambda(0) = \lambda_0$, $|\lambda_0| = 1$, es un multiplicador simple de (3.1) para $\epsilon = 0$. Entonces $\lambda_0^{-1} = \bar{\lambda}_0$

también es un multiplicador simple de de (3.1) para $\epsilon = 0$. Como que los multiplicadores dependen continuamente de ϵ existen vecindades V, U de λ_0 y λ_0^{-1} respectivamente tales que para $0 \leqq |\epsilon| \leqq \epsilon_0$ ningún otro multiplicador de (3.1) está ni en V ni en U. Pero $\bar{\lambda}(0) = \lambda^{-1}(0)$ y por lo tanto $\bar{\lambda}(\epsilon)$ debe coincidir con $\lambda^{-1}(\epsilon)$, lo cual es posible sólo si $|\lambda(\epsilon)| = 1$, $0 \leqq |\epsilon| \leqq \epsilon_0$. Hemos demostrado entonces

Teorema 3.1: Si λ_0 es un multiplicador simple de (3.1) para $\epsilon = 0$, $|\lambda_0| = 1$, y (3.1) es recíproco, entonces para $0 < |\epsilon| < \epsilon_0$, el sistema (3.1) tiene un multiplicador $\lambda(\epsilon)$ tal que $\lambda(0) = \lambda_0$ y $|\lambda(\epsilon)| = 1$.

Corolario 3.1: Si para $\epsilon = 0$ todos los multiplicadores de (3.1) son distintos, tienen módulo unitario, y (3.1) es recíproco, entonces todas las soluciones del sistema (3.1) son acotadas en $-\infty < t < +\infty$, $0 \leqq |\epsilon| < \epsilon_0$.

Un argumento de tipo similar es válido cuando algunos de los multiplicadores son múltiples, pero se necesita información extra en este caso, como veremos más adelante.

Supongamos que $\lambda(0) = \lambda_0$, $|\lambda_0| = 1$, es un multiplicador de (3.1) para $\epsilon = 0$ con multiplicidad $q(0 < q \leqq n)$. Si (3.1) es recíprico entonces $\lambda_0^{-1} = \bar{\lambda}_0$ también es un multiplicador con multiplicidad q. Debido a la continuidad sabemos que existen vecindades V y U de λ_0 y λ_0^{-1} respectivamente tales que para $0 < |\epsilon| \leqq \epsilon_0$ sólo hay q multiplicadores en V y q en U, aquellos que se reducen a λ_0 y λ_0^{-1} para $\epsilon = 0$.

Sean

$$\lambda_j(\epsilon), \qquad \lambda_j(0) = \lambda_0, \qquad j = 1, \cdots, q,$$

los que caen dentro de V. Sus recíprocos $\lambda_j^{-1}(\epsilon)$ son los que caen dentro de U, y deben ser sus conjugados. Si sabemos que para $0 < |\epsilon| \leqq \epsilon_0$ los argumentos de $\lambda_j(\epsilon), j = 1, \cdots, q$, son distintos, se sigue

$$\lambda_j^{-1}(\epsilon) = \bar{\lambda}_j(\epsilon), \qquad j = 1, \cdots, q,$$

y por lo tanto $|\lambda_j(\epsilon)| = 1$ para $0 < |\epsilon| \leqq \epsilon_0$.

Supongamos que $i\sigma$ (σ real) está determinado por

$$\lambda_0 = \lambda(0) = e^{i\sigma T}$$

donde λ_0 tiene multiplicidad q. Y supóngase que utilizando algún método de aproximaciones sucesivas hemos determinado que para $\epsilon \neq 0$ los exponentes característicos asociados con λ_0 están dados por

$$\alpha_j(\epsilon) = i\sigma + \delta\beta_j + O(\delta), \qquad j = 1, \cdots, q, \tag{3.2}$$

donde δ es cierta raiz de ϵ y todas las β_j son distintas e imaginarias puras, $j = 1, \cdots, q$. Entonces por un argumento de continuidad, para $0 < \delta < \delta_0$, todos los multiplicadores $\lambda_j(\epsilon)$, $j = 1, \cdots, q$, tiene argumentos distintos y, por lo tanto, por la propiedad de reciprocidad, $|\lambda_j(\epsilon)| = 1$, $j = 1, \cdots, q$, $0 < |\epsilon| < \epsilon_0$. Hemos demostrado así

TEOREMA 3.2: Si el sistema (3.1) es recíproco, con q exponentes característicos dados com en (3.2), y $\lambda(0) = \lambda_0$, $|\lambda_0| = 1$ es un multiplicador de multiplicidad q, entonces q exponentes característicos de (3.1) son distintos e imaginarios puros para $0 \leqq |\epsilon| < \epsilon_0$. Si, además, $\lambda_0 \neq \pm 1$, entonces hay $2q$ exponentes característicos distintos e imaginarios puros.

Es claro, desde luego, que el mismo argumento es válido si utilizamos aproximaciones superiores en (3.2).

Nótese que el contenido del Teorema 3.2 es el tipo de información que puede ayudarnos a resolver el problema de la acotación de soluciones en $-\infty < t < +\infty$, como se hizo notar al final de la sección 2. De hecho el Teorema 3.2 asegura bajo ciertas condiciones la existencia de exponentes característicos imaginarios puros—condición que es necesaria para obtener este tipo de acotación. Lo que es más, la información se obtiene con sólo mirar a ciertas aproximaciones de los exponentes característicos, y no importa que tipo de aproximaciones sucesivas se utilice. Estos resultados apuntan la importancia que tiene inventar métodos de aproximaciones sucesivas.

Condiciones que aseguren la propiedad recíproca están dadas en el siguiente

LEMA 3.3: Si existe una $n \times n$ matriz $P(\epsilon)$, continua para $\epsilon = 0$, $|\det P(\epsilon)| \geqq \eta > 0$ para $0 \leqq |\epsilon| < \epsilon_0$ tal que se cumpla cualquiera de las condiciones

$$P(\epsilon)A(t, \epsilon) = -A(-t, \epsilon)P(\epsilon) \tag{3.3}$$

$$P(\epsilon)A(t, \epsilon) = -A^*(t, \epsilon)P(\epsilon) \tag{3.4}$$

(A^* es el transpuesto de A) para $0 < |\epsilon| < \epsilon_0$ y $-\infty < t < +\infty$, entonces el sistema (3.1) es recíproco. Para una demostración de este Lema vease [8].

En este trabajo estaremos interesados en la situación descrita por (3.3). La relación (3.4) corresponde a sistemas hamiltonianos. Las propiedades de los sistemas que satisfacen el Lema 3.3 han sido objeto de intenso estudio.

Para referencia posterior demonstraremos que la ecuación diferencial

$$u^{IV} + 2\sigma^2 u^{II} + \sigma^4 u = \epsilon[\varphi_1(t)u + \varphi_2(t)u^{II}] \tag{3.5}$$

donde u es escalar φ_1, φ_2 son funciones periódicas pares, es recíproca si se le considera como sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Hagamos el cambio de variables

$$(u, u^{II}, u^{I}, u^{III}) = (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

Estos transforma el sistema (3.5) en un sistema como (3.1) con

$$A(t, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sigma^4 + \epsilon\varphi_1 & -2\sigma^2 + \epsilon\varphi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y (3.3) se satisface si tomamos

$$P(\epsilon) = \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1).$$

Conviene hacer notar que la condición (3.3) del Lema 3.3 es más general que la condición usual de funciones pares e impares en la matriz que aparece en diversos artículos conectados con este tema. Ilustramos ésto con un ejemplo. Tomemos el sistema

$$x' = Ax + \epsilon\Phi(t)x, \tag{3.6}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) & \varphi_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_1(t) & \psi_2(t) & \psi_3(t) & \psi_4(t) \end{pmatrix}$$

Sistemas como (3.6) se originan a partir de dos ecuaciones lineales de segundo orden debilmente acopladas.

Es fácil ver que la matriz

$$P = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ \sigma^2 k_2 & -k_1 & \sigma^2 k_4 & -k_3 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ \sigma^2 k_6 & -k_5 & \sigma^2 k_8 & -k_7 \end{pmatrix}$$

donde k_j constante, $j = 1, \cdots, 8$, satisface

$$PA = -AP$$

Así que, para que el sistema (3.6) satisfaga (3.3) con respecto a esta P, es suficiente que

$$P\Phi(t) = -\Phi(-t)P.$$

Si los valores de k_j en P se eligen de tal manera que

$$P = \operatorname{diag}(1, -1, 1, -1)$$

se obtiene la condición usual de funciones pares e impares en la matriz $\Phi(t)$. Pero si los valores de k_j se escogen de manera que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces la condición en $\Phi(t)$ es que

$$\varphi_1(t) = \psi_3(-t), \qquad \varphi_2(t) = -\psi_4(t),$$
$$\varphi_3(t) = \psi_1(-t), \qquad \varphi_4(t) = -\psi_2(-t)$$

que no implica nada sobre la condición de par o impar en las funciones de $\Phi(t)$.

Por lo tanto la condición (3.3) es más fuerte que la condición usual de par e impar, y por esta razón la utilizaremos en nuestros teoremas de acotación.

4. Tipo general de sistemas

El tipo general de sistemas que van ha considerarse es de la forma

$$w' = Aw + \epsilon\Phi(t)w \tag{4.1}$$

donde $w = \operatorname{col}(w_1, \cdots, w_n)$, $\epsilon > 0$ es un parámetro pequeño, A es una $n \times n$ matriz constante y $\Phi(t)$ es una $n \times n$ matriz compleja de funciones periódicas de t, periodo $T = 2\pi/\omega$, integrables en el sentido de Lebesgue en $[0, T]$, Supongamos que A está en su forma canónica de Jordan y $\rho_1, \cdots, \rho_q$, $q \leqq n$, son sus raices características distintas, con multiplicidades $\mu_1, \cdots, \mu_q$, $\Sigma\mu_j = n$. Además supongamos que ρ_j tiene $s_j (j = 1, \cdots, q)$ divisores elementales con grados

$$\nu_1^{(j)}, \cdots, \nu_{s_j}^{(j)} (j = 1, \cdots, q), \qquad \sum_{k=1}^{s_j} \nu_k^{(j)} = \mu_j .$$

Finalmente supongamos que

$$\begin{array}{lll} \rho_1 - \rho_k = m_k i\omega & k = 2, 3, \cdots, p, & p \leqq q \\ \rho_j \not\equiv \rho_k \pmod{i\omega} & j = 1, 2, \cdots, p, & k = p + 1, \cdots, q, \end{array} \tag{4.1'}$$

donde m_k es un entero cualquiera.

De una vez para todas demostraremos que sistemas como (4.1) con todas las condiciones anteriores pueden transformarse a un tipo canónico (4.6), y en las discusiones que siguen hablaremos siempre de este tipo de sistemas.

En (4.1) hacemos la transformación de variables

$$w = Py \tag{4.2}$$

donde $P = \operatorname{diag}(1, \delta, \delta^2, \cdots, \delta^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_p-1}, 1, \cdots, 1)$ y δ es un nuevo parámetro tal que

$$\delta^{\mu_1+\cdots+\mu_p} = \epsilon$$

es positivo. La transformación (4.2) lleva el sistema (4.1) en el sistema

$$y' = A^*y + \delta\Phi^*(t, \delta)y \tag{4.3}$$

donde A^* es como A excepto que todos los unos sobre ρ_j, $j = 1, \cdots, p$, se han transformado en δ.

A continuación transformamos (4.3) con el cambio de variable

$$y = e^{(\rho_1+\delta\beta)t}z \tag{4.4}$$

donde β es cierto número complejo indeterminado por ahora. Finalmente el sistema resultante los transformamos con el cambio de variables

$$
(4.5)\qquad
\begin{array}{ll}
z_j = x_j & j = 1, \cdots, \mu_1 \\
z_j = e^{-m_2 i\omega t} x_j & j = \mu_1 + 1, \cdots, \mu_1 + \mu_2 \\
z_j = e^{-m_3 i\omega t} x_j & j = \mu_1 + \mu_2 + 1, \cdots, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\
\vdots & \vdots \\
z_j = e^{-m_p i\omega t} x_j & j = \mu_1 + \cdots + \mu_{p-1} + 1, \cdots, \mu_1 + \cdots + \mu_p \\
z_j = x_j & j = \mu_1 + \cdots + \mu_p + 1, \cdots, n.
\end{array}
$$

El resultado final es un sistema

$$
(4.6)\qquad x' = Hx + \delta\psi(t, \delta, \beta)x
$$

donde $H = \operatorname{diag}(0, \Sigma)$, con

$$
(4.7)\qquad \Sigma = \begin{pmatrix}
\sigma_1 & c_1 & & & \\
 & \cdot & \cdot & & \\
 & & \cdot & \cdot & \\
 & & & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & \cdot\, c_{n-\mu_1-\cdots-\mu_p-1} \\
 & & & & \cdot\, \sigma_{n-\mu 1-\cdots-\mu_p}
\end{pmatrix},
$$

0 es la matriz cero de dimensión $\mu_1 + \cdots + \mu_p$, c_j es o cero o uno y cada σ_j tiene la forma

$$
\sigma_j = \rho_k - \rho_1
$$

para alguna $k \geqq p + 1$ dependiente de j y todo lo demás que viene de A se ha colocado en $\psi(t, \delta, \beta)$.

Como en nuestro trabajo se estudiarán sistemas del tipo (4.1), y como los multiplicadores y exponentes característicos de estos sistemas son invariantes bajo transformaciones como (4.2), (4.4) y (4.5), estudiaremos directamente sistemas como (4.6).

5. Método y condiciones de solución

En esta sección discutiremos un método de aproximaciones sucesivas para la solución de (4.6). Esta discusión está relacionada con el trabajo [7] que a su vez está relacionado con [2].

Nos interesa ahora obtener soluciones periódicas del sistema (4.6). Tomemos $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p = \mu$ y definamos el operador Θ, que actuará sobre vectores periódicos de n dimensiones p, de la forma siguiente

$$
\Theta p = (E - P_0)p
$$

donde E es la matriz identidad $n \times n$ y P_0 está definido por

$$P_0[\text{col}(p_1, p_2, \cdots, p_n)] = \text{col}(m[p_1], m[p_2], \cdots, m[p_\mu], 0, \cdots, 0)$$

donde $m[p_j]$ es el valor medio de p_j.

Sea Π el espacio topológico de todas las funciones vectoriales de n dimensiones continuas en la variable t, periódicas en t, con periodo T, y con la topología uniforme usual. Sea $\nu(p)$ la norma de un elemento $p \in \Pi$. Dadas dos constantes K y L, $K < L$, y un μ-vector arbitrario, pero fijo, a tal que $\| a \| \leqq K$ definimos un subconjunto $\Pi_0 \subset \Pi$ por medio de

$$\Pi_0 = \{p \in \Pi \mid P_0(p) = \text{col}(a, 0)\,;\, \nu(p) \leqq L\}$$

esto es, todos los vectores $p \in \Pi$ que tienen norma acotada y cuyas μ primeras coordenadas tienen un valor medio dado de antemano.

Definimos la transformación τ: $\Pi_0 \rightarrow \Pi$ por medio de

$$\tau p(t) = a^* + \delta e^{Ht} \int e^{-Ht} \Theta[\psi(u, \delta, \beta) p(u)] du \tag{5.1}$$

donde a^* es el vector n-dimensional $(a, 0)$, y $H = \text{diag}\ (0, \Sigma)$, $\psi(t, \delta, \beta)$ son como en el sistema (4.6). Debido a la definición de Θ sabemos que se satisface $P_0\{e^{-Hu}\Theta[\psi(u, \delta, \beta)p(u)]\} = 0$, y por la segunda condición en (4.1′) existe una primitiva única $F(t)$ de $e^{-Hu}\Theta[\psi(u, \delta, \beta)p(u)]$ tal que $e^{Ht}F(t) \in \Pi$ y $P_0[e^{Ht}F(t)] = 0$. El signo de integración en (5.1) se interpreta de manera que se obtenga esta única primitiva. Obviamente $P_0[\tau(p)] = a^* = \text{col}(a, 0)$.

Si podemos demostrar que τ es una transformación $\Pi_0 \rightarrow \Pi_0$ y una contracción, entonces existe una función única $x(t, a, \beta, \delta) \in \Pi_0$ tal que

$$\tau[x(t, a, \beta, \delta)] = x(t, a, \beta, \delta).$$

Además la derivada de esta función periódica está dada por

$$x'(t, a, \beta, \delta) = Hx(t, a, \beta, \delta) + \delta\Theta[\psi(t, \delta, \beta)x(t, a, \beta, \delta)] \tag{5.2}$$

La ecuación (5.2) no es la ecuación que queriamos resolver, esto es (4.6), pero si añadimos la condición

$$P_0[\psi(t, \delta, \beta)x(t, a, \beta, \delta)] = 0 \tag{5.3}$$

entonces la función $x(t, a, \beta, \delta)$ será una solución periódica de (4.6). A las condiciones (5.3) les llamámos ecuaciones de bifurcación de (4.6). Las ecuaciones (5.3) representan μ ecuaciones para β y las μ componentes del vector a. A partir de (4.4) la determinación de β nos proporcinará algunos de los exponentes característicos de (4.1); esto es, aquellos μ exponentes característicos que se reducen a

$$\begin{array}{lll} \alpha_j(\epsilon) = \rho_1 + \delta\beta_j & & j = 1, \cdots, \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \\ \alpha_j(\epsilon) = \rho_p + \delta\beta_j & & j = \mu_1 + \cdots + \mu_{p-1} + 1, \cdots, \mu_1 + \cdots + \mu_p = \mu \end{array}$$

donde $\delta^\mu = \epsilon$.

Tenemos entonces que demostrar el siguiente

TEOREMA 5.1: Si $(e^{-\Sigma T} - E)$ no es singular entonces existe una δ_0 tal que para el intervalo $0 \leqq \delta < \delta_0$, la transformación τ definida por (5.1) es una contracción de $\Pi_0 \rightarrow \Pi_0$.

La demostración del Teorema 5.1 se sigue sin mayor dificultad del siguiente

LEMA 5.1: Si $H = \operatorname{diag}(0, \Sigma)$ es la matriz constante (4.7), $(e^{-\Sigma T} - E)$ no es singular, $h(t)$ es un vector periódico de n dimensiones, de periodo T, integrable en el sentido de Lebesgue en $[0, T]$ y $P_0(h(t)) = 0$, entonces

$$\| e^{Ht} \int e^{-Hu} h(u) du \| \leqq Q \int_0^T \| h(u) \| du$$

donde Q es una constante que depende de T y de los valores característicos de H, y "$\int$" se interpreta como en (5.1).

Para demostrar el Lema 5.1 necesitamos los siguientes lemas.

LEMA 5.2: Sea Σ una matriz constante de dimensión $(n - \mu)$; $f(t)$, un vector periódico de dimensión $(n - \mu)$, con periodo T, integrable en el sentido de Lebesgue en $[0, T]$; y sea $(e^{-\Sigma T} - E)$ no singular, entonces

$$\| e^{\Sigma t} \int e^{-\Sigma u} f(u) du \| \leqq S \int_0^T \| f(u) \| du,$$

donde S es una constante que depende de T y de los valores característicos de Σ, y "$\int$" se interpreta como en (5.1).

Demostración: La función

$$(e^{-\Sigma T} - E)^{-1} \int_t^{t+T} e^{-\Sigma u} f(u) \, du$$

es una primitiva de $e^{-\Sigma u} f(u)$ como puede probarse por derivación. Además, si

$$G(t) = e^{\Sigma t} (e^{-\Sigma T} - E)^{-1} \int_t^{t+T} e^{-\Sigma u} f(u) \, du$$

entonces

$$\begin{aligned} G(t + T) &= (e^{-\Sigma T} - E)^{-1} e^{\Sigma(t+T)} \int_{t+T}^{t+2T} e^{-\Sigma u} f(u) \, du \\ &= (e^{-\Sigma T} - E)^{-1} e^{\Sigma(t+T)} \int_t^{t+T} e^{-\Sigma(v+T)} f(v) dv \\ &= (e^{-\Sigma T} - E)^{-1} e^{\Sigma t} \int_t^{t+T} e^{-\Sigma v} f(v) \, dv = G(t) \end{aligned}$$

por lo tanto $G(t)$ es periódica con periodo T. Pero como solo existe una primitiva de $e^{-\Sigma u} f(u)$ con esta propiedad, entonces

$$G(t) = e^{\Sigma t} \int e^{-\Sigma u} f(u) \, du$$

donde "$\int$" se interpreta como en (5.1).

Ahora de (5.10) tenemos

$$\begin{aligned}\| G(t) \| &= \| e^{\Sigma t}(e^{-\Sigma T} - E)^{-1} \int_t^{t+T} e^{-\Sigma u} f(u)\, du \| \\ &= \| (e^{-\Sigma T} - E)^{-1} \int_t^{t+T} e^{+\Sigma(t-u)} f(u)\, du \| \\ &= \| (e^{-\Sigma T} - E)^{-1} \int_0^T e^{-\Sigma v} f(v + t)\, dv \| \\ &\leqq S \int_0^T \| f(u) \|\, du,\end{aligned}$$

y el Lema 5.2 está demostrado.

Lema 5.3: Si $g(t)$ es un vector periódico de dimensión μ, periodo T, integrable en el sentido de Lebesgue en $[0, T]$, con valor medio cero, entonces existe una primitiva única de $g(t)$, digamos $z(t)$, periódica con periodo T, valor medio cero, y esta primitiva está dada por

$$z(t) = \int_\xi^t g(u)\, du = [\int_{\xi_j}^t g_j(u)\, du]; \qquad j = 1, 2, \cdots, \mu \tag{5.5}$$

donde $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_\mu)$ y $0 < \xi_j < T, j = 1, \cdots, \mu$.

Demostración: Como el valor medio de $g(t)$ es cero sus primitivas son periódicas. La única primitiva de valor medio cero puede escribirse (notación como en (5.5))

$$z(t) = \int_\eta^t g(u)\, du - m[\int_\eta^t g(u)\, du]$$

donde η es cualquier vector constante de dimensión μ. Como $z(t)$ tiene valor medio cero existe un vector $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_\mu)$, $0 < \xi_j < T, j = 1, \cdots, \mu$, independiente de η, tal que $z_j(\xi_j) = 0, j = 1, \cdots, \mu$. Tomemos entonces

$$z(t) = \int_\xi^t g(u)\, du - m[\int_\xi^t g(u)\, du]$$

y como $z_j(\xi_j) = 0$ la constante debe ser cero y obtenemos (5.5) demostrando el Lema 5.3.

Corolario 5.3: Si $g(t)$ y ξ son como en el lema anterior entonces

$$\| z(t) \| = \| \int_\xi^t g(u)\, du \| \leqq \int_0^T \| g(u) \|\, du. \tag{5.6}$$

Es suficiente considerar los intervalos $\xi_j < t < \xi_j + T, j = 1, \cdots, \mu$,

$$| z_j(t) | = | \int_{\xi_j}^t g_j(u)\, du | \leqq \int_{\xi_j}^t | g_j(u) |\, du \leqq \int_0^T | g_j(u) |\, du, \qquad j = 1, \cdots, \mu,$$

y se sigue (5.6).

Ahora el Lema 5.1 es consecuencia inmediata del Lema 5.2 y del Corolario 5.3.

Vamos a demostrar ahora el Teorema 5.1, para ello necesitamos probar que existe una δ_0 tal que para $0 \leqq \delta < \delta_0$, se satisfacen las dos condiciones siguientes:

a) $\nu[\tau(p(t))] \leqq L$;

b) si $p(t)$, $p^*(t) \in \Pi_0$ entonces $\nu[\tau(p) - \tau(p^*)] \leqq l\nu(p - p^*)$, donde $0 < l < 1$.

Demostración de a):

$$\begin{aligned}\| \tau(p) \| &\leqq \| a^* \| + \delta \| e^{Ht} \int e^{-Hu} \Theta[\psi(u, \delta, \beta) p(u)]\, du \| \\ &\leqq K + \delta Q \int_0^T \| \Theta[\psi(u, \delta, \beta) p(u)] \|\, du \\ &\leqq K + \delta Q \int_0^T \| \psi(u, \delta, \beta) \| \, \| p(u) \| \, du \\ &\leqq K + \delta Q \psi_0 \nu(p) \leqq K + \delta Q \psi_0 L\end{aligned}$$

donde Q está dada por el Lema 5.1, y ψ_0 es una cota de $\int_0^T \| \psi(u, \delta, \beta) \| \, du$. Entonces para $0 \leqq \delta < \delta_0$, tenemos

$$K + \delta Q \psi_0 L < L$$

y queda demostrado a).

Demostración de b):

$$\begin{aligned}\| \tau(p) - \tau(p^*) \| &= \delta \| e^{Ht} \int e^{-Hu} \Theta[\psi(u, \delta, \beta)(p(u) - p^*(u)) \| \, du \\ &\leqq \delta Q \psi_0 \nu(p - p^*)\end{aligned}$$

Entonces para $0 \leqq \delta < \delta_2$,

$$\nu[\tau(p) - \tau(p^*)] \leqq l \nu(p - p^*)$$

donde $0 < l < 1$ y queda demostrado b). Tomando $\delta_0 = \min [\delta_1, \delta_2]$ completamos la demostración del Teorema 5.1.

COROLARIO 5.4: Si $(e^{-\Sigma T} - E)$ no es singular entonces la transformación (5.1) tiene para $0 \leqq \delta \leqq \delta_0$ un punto fijo único $x(t, a, \beta, \delta)$ en Π_0. Además, cualquier otra función en Π_0 que satisfaga (5.2) debe coincidir con $x(t, a, \beta, \delta)$. Finalmente, $x(t, a, \beta, \delta)$ es el límite uniforme de la sucesión de funciones dada por

$$(5.7) \qquad \begin{aligned} x^{(0)} &= a^* \\ x^{(j)} &= \tau[x^{(j-1)}], \qquad j = 1, 2, \cdots . \end{aligned}$$

De (5.7) es fácil ver, por inducción, que la solución y las ecuaciones de bifurcación son lineales en a^*. De hecho debido a la definición de P_0 y de $a^* = \text{col}\,(a, 0)$ las ecuaciones de bifurcación toman la forma

$$\Delta(\delta, \beta) a = 0$$

donde $\Delta(\delta, \beta)$ es una matriz de dimensión $\mu \times \mu$ y $a = \text{col}\,(a_1, \cdots, a_\mu)$. Más especificamente,

$$\Delta(\delta, \beta) = \Delta^0(\delta, \beta) - \beta E,$$

donde $\Delta^0(0, \beta)$ es independiente de β.

Si β^0 es un valor característico de $\Delta^0(0, \beta)$, entonces existe una función continua de δ, $\beta = \beta(\delta)$, $\beta(0) = \beta^0$ tal que $\beta(\delta)$ es un valor característico de $\Delta^0(\delta, \beta)$; ésto es, satisface la ecuación

$$(5.8) \qquad \det | \Delta^0(\delta, \beta) - \beta E | = 0.$$

En realidad habrá μ de estas funciones $\beta(\delta)$ que satisfacen (5.8), y como veremos en lo que sigue la existencia de estas funciones da, en cierto sentido, una condición necesaria y suficiente para el método.

TEOREMA 5.5: Sea $x(t, a, \beta, \delta)$ la función dada por el Corolario 5.4, $0 \leqq \delta < \delta_0$. y $\| a \| < K$. Si existe una función continua $\beta(\delta)$ tal que para $0 \leqq \delta < \delta^* \leqq \delta_0$ se cumple

$$\det \mid \Delta^0(\delta, \beta(\delta)) - \beta(\delta)E \mid \equiv 0, \tag{5.9}$$

y si $a(\delta)$ es el vector característico correspondiente a $\beta(\delta)$, que satisface

$$\begin{aligned} P_0[x(t, a(\delta), \beta(\delta), \delta)] &= a(\delta) \\ \| a(\delta) \| &\leqq K \end{aligned} \tag{5.10}$$

entonces $x(t, a(\delta), \beta(\delta), \delta)$ es una solución periódica de (4.6) con valor medio $a(\delta)$, para $0 \leqq \delta \leqq \delta^*$. Y reciprocamente si $x^*(t, \delta)$ es una solución periódica de (4.6) con valor medio $K^* < K$ y periodo T, para $0 < \delta < \delta^*$, entonces

$$x^*(t, \delta) = x(t, a(\delta), \beta(\delta), \delta)$$

donde $x(t, a, \beta, \delta)$ está dada por el Corolario 5.4, $\beta(\delta)$ y $a(\delta)$ son continuas, $\beta(\delta)$ satisface (5.9) y $a(\delta)$ es el vector característico correspondiente y satisface (5.10). En otras palabras, si δ es suficientemente pequeña entonces la existencia de $\beta(\delta)$ es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución periódica de la ecuación (4.6).

Demostración: La parte directa del Teorema 5.5 es obvia. Probaremos sólo la parte recíproca (necesidad). Sea $x^*(t, \delta)$ una solución de (4.6) cumpliendo la condición $P_0[x^*(t, \delta)] = K^* < K$.

Como $x^*(t, \delta)$ es una solución de (4.6) entonces

$$\Theta[x^{*\prime} - Hx^* - \delta\psi(t, \delta, \beta)x^*] = 0; \qquad P_0[x^{*\prime} - Hx^* - \delta\psi(t, \delta, \beta)x^*] = 0 \tag{5.11}$$

Debido a la definición de Θ y la forma de H obtenemos

$$\begin{aligned} \Theta[x^{*\prime} - Hx^*] &= x^{*\prime} - Hx^* \\ P_0[x^{*\prime} - Hx^*] &= 0 \end{aligned}$$

como el valor medio de la derivada de x^* es cero y $H = \text{diag}\ (0, \Sigma)$. Por lo tanto (5.11) se reduce a

$$\begin{aligned} x^{*\prime} - Hx^* - \delta\Theta[\psi(t, \delta, \beta)]x^* &= 0 \\ \delta P_0[\psi(t, \delta, \beta)x^*] &= 0; \end{aligned} \tag{5.12}$$

pero (5.12) implica

$$x^*(t, \delta) = x(t, a(\delta), \beta(\delta), \delta).$$

$\beta(\delta)$, $a(\delta)$ satisfacen (5.9) y (5.10), y $K^* = a(\delta)$.

Corolario 5.6: Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución del sistema (4.1) de la forma (4.4) donde z es periódica, es que β sea una solución de (5.8); esto es, estas soluciones β de (5.8) determinan los exponentes característicos de (4.1) asociados con ρ_1 en (4.1′).

Además, en general hay μ de estas funciones, y si son distintas obtenemos μ soluciones linealmente independientes de (4.1).

Procedemos a dar ahora las aproximaciones sucesivas. De acuerdo con (5.7) podemos resolver el sistema (5.2) por medio del siguiente esquema

$$\begin{aligned} & x^{(0)} = (a_1, \cdots, a_\mu, 0, \cdots, 0) = a^* \\ (5.13)\quad & x^{(j)} = x^{(0)} + \delta e^{Ht} \int e^{-Hu} \Theta[\psi(u, \delta, \beta) x^{(j-1)}(u)]\, du \qquad (\operatorname{mod} \delta^j) \\ & j = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

donde mod δ^j indica que se toman términos hasta de orden δ^j en la j-ésima aproximación, ésto no cambia la convergencia ya que eventualmente todos los términos aparecen en las aproximaciones.

Escribamos otra vez el sistema (4.6)

$$x' = Hx + \delta\psi(t, \delta, \beta)x, \tag{5.14}$$

donde $H = \operatorname{diag}(0, \Sigma)$ y $\psi(t, \delta, \beta)$ son como en (4.6) y $(e^{-\Sigma T} - E)$ no es singular.

Para obtener de (5.13) una solución de (5.14) debemos satisfacer las ecuaciones de bifurcación en cada paso, o sea que debe cumplirse

$$P_0[\psi(t, \delta, \beta)x^{(j-1)}] = 0 \ (\operatorname{mod} \delta^{j-1}) \qquad j = 1, 2, \cdots. \tag{5.15}$$

Como ya se había hecho notar antes la solución es lineal en a^*; es decir,

$$x^{(j)} = X^{(j)}a^*$$

donde $X^{(j)}$ es una matriz.

Si definimos

$$\Delta_{(j-1)} = \psi(t, \delta, \beta)X^{(j-1)} \ (\operatorname{mod} \delta^{j-1})$$

entonces las ecuaciones de bifurcación (5.15) pueden escribirse

$$P_0[\Delta_{(j-1)}a^*] = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots.$$

Sea $\Delta^*_{(j-1)}$ la matriz de dimensión $\mu \times \mu$ obtenida de $\Delta_{(j-1)}$ al quitarle las últimas $n - \mu$ columnas y renglones y susbstituir los elementos restantes por sus valores medios. Entonces las ecuaciones de bifurcación toman la forma

$$\Delta^*_{(j-1)}a = 0, \tag{5.16}$$

las cuales se satisfacen si

$$\det(\Delta^*_{(j-1)}) = 0$$

y a es un vector característico de $\Delta^*_{(j-1)}$

Es claro, además, que toda la información contenida de esta manera en la j-ésima aproximación se preservará para las aproximaciones de orden superior. La razón es que siempre que un término entra en las ecuaciones de bifurcación sigue apareciendo en las aproximaciones posteriores, y además los términos aparecen de acuerdo con su orden en el parámetro δ.

6. Cálculo de exponentes característicos (I)

Sin perder demasiada generalidad, pero para hacer la exposición más clara considérese el sistema

$$w' = Aw + \epsilon\Phi(t)w \tag{6.1}$$

con las mismas condiciones que el sistema (4.1). Pero supongamos que A tiene solo una raíz característica ρ, de multiplicidad n, y grado n en el divisor elemental, esto es

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 & & & 0 \\ \cdot & \rho & 1 & & \cdot \\ \cdot & & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \rho \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Supongamos además que $\Phi(t) = |\varphi_{ij}(t)|$, $i, j = 1, \cdots, n$, tiene valor medio cero; esto es, $m[\varphi_{ij}(t)] = 0$, $i, j, \cdots, n$.

Cambiando el sistema (6.1) a la forma canónica indicada en la Sección 4 obtenemos

$$x' = \delta\psi(t, \delta, \beta)$$

donde $\delta^n = \epsilon$, y

$$\psi(t, \delta, \beta) = \begin{pmatrix} -\beta + \delta^{n-1}\varphi_{11} & 1 + \delta^n\varphi_{12} & \delta^{n+1}\varphi_1 \cdots\cdots \delta^{2(n-1)}\varphi_{1n} \\ \delta^{n-2}\varphi_{21} & -\beta + \delta^{n-1}\varphi_{22} & 1 + \delta^n\varphi_2 \cdots\cdots \delta^{2n-3}\varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta\varphi_{n-1,1} & \delta^2\varphi_{n-1,2} \cdots\cdots & \cdots\cdots 1 + \delta^n\varphi_{n-1,n} \\ \varphi_{n1} & \delta\varphi_{n2} \cdots\cdots & \cdots\cdots -\beta + \delta^{n-1},\varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

Calculemos las ecuaciones de bifurcación sucesivas (5.16); en este caso la matriz $\Delta^*_{(j-1)}$ tiene para $j = 1, \cdots, n$ la forma

$$\Delta^*_{(j-1)} = \begin{pmatrix} -\beta & 1 & & & \\ & -\beta & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & & & -\beta \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \cdots, n,$$

ya que $m[\Phi(t)] = 0$. Como la única solución de las ecuaciones det $|\Delta^*_{(j-1)}| = 0$ es $\beta = 0$, $j = 1, \cdots, n$, no se obtiene ninguna información en estas aproximaciones. Sin embargo, en la siguiente aproximación obtenemos

$$\Delta^*_{(n)} = \begin{pmatrix} -\beta & 1 & & & \\ & -\beta & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \delta^n M & & & & -\beta \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

donde M está definido por

$$\begin{aligned} M &= m\{\varphi_{n1}[\int\varphi_{11} + \int\int\varphi_{21} + \int\int\int\varphi_{31} + \cdots + \int\cdots\int\varphi_{n1}] \\ &\quad + \varphi_{n2}[\int\varphi_{21} + \int\int\varphi_{31} + \cdots + \int\cdots\int\varphi_{n1}] + \cdots + \varphi_{nn}[\int\varphi_{n1}]\} \end{aligned} \tag{6.4}$$

Si por $\Phi_n(t)$ denotamos la última renglón de la matriz $\Phi(t)$ entonces la expresión anterior puede escribirse en la forma más compacta

$$\Phi_n(t)x^{(n)}(t) \pmod{\delta^n}$$

y por lo tanto M está dado por

$$\delta^n = m[\Phi_n(t)x^{(n)}(t)] \pmod{\delta^n} \tag{6.5}$$

Demostraremos ahora el siguiente

TEOREMA 6.1: Dado un sistema

$$w' = Aw + \epsilon\Phi(t)w \tag{6.6}$$

donde $w = \text{col}\,(w_1, \cdots, w_n)$, A es una matriz constante de dimensión $n \times n$ de la forma (6.2), ϵ es un parámetro real pequeño, $\Phi(t) = (\varphi_{ij}(t))$, $i, j = 1, \cdots, n$, es una matriz compleja de funciones periódicas en t, periodo $T = 2\pi/\omega$, integrables en el sentido de Lebesgue en $[0, T]$, y $m[\Phi(t)] = 0$. Entonces si el número M definido por (6.4) o (6.5) es diferente de cero existen, para $0 \leqq \delta < \delta_0$, n exponentes caracterísitcos distintos de (6.6) de la forma

$$\alpha_j(\epsilon) = \rho + \textstyle\sum_{K=1}^{\infty} C_j^{(k)}\delta^k, \qquad j = 1, \cdots, n \tag{6.7}$$

donde $\delta^n = \epsilon$, $C_j^{(1)} = 0$, y $C_j^{(2)}$ son las distintas raices n-ésimas de M.

Demostración: Si $F(\delta, \beta) = 0$ es la relación funcional (5.8) entre δ y β, entonces buscamos ciertas soluciones $\beta = \beta(\delta)$ de esta ecuación. Consideremos ahora la ecuación

$$\det |\Delta^*_{(n)}| = 0 \tag{6.8}$$

donde $\Delta^*_{(n)}$ está dado por (6.3).

Entonces a partir de (6.8) se obtiene

$$F(\delta, \beta) = \beta^n + \delta^n M + 0(\delta^{n+1}) = 0 \tag{6.9}$$

donde $O(\delta^{n+1})$ contiene todos los términos de aproximaciones superiores que empiezan con al menos δ^{n+1}. Es claro por la forma en que se ha construido (6.9) que es holomórfica en β y δ en una vecindad de $(0, 0)$, y por lo tanto (6.9) puede escribirse

$$F(\delta, \beta) = A_0 + A_1\beta + A_2\beta^2 + \cdots = 0$$

donde cada A_j es una serie de potencias en δ. Además sabemos que cada una de las series $A_1, \cdots, A_{n-1}$ empieza con al menos términos de orden δ^{n+1}, mientras que A_0 empieza con $\delta^n M$ y A_n comienza con 1.

Los valores de β que nos interesan son los dados por aquellas soluciones $\beta = \beta(\delta)$ de (6.9) que se aproximan a cero cuando $\delta \to 0$. Tomando $\delta = 0$ en (6.9) se obtiene

$$F(0, \beta) = \beta^n = 0,$$

por lo tanto $\beta = 0$ es una raíz de multiplicidad n de $F(0, \beta)$.

Por el teorema de preparación de Weierstrass ([11]) sabemos que en este caso

$$F(\delta, \beta) = [a_0 + a_1\beta + \cdots + a_{n+1}\beta^{n-1} + \beta^n][1 + B_0 + B_1\beta + B_2\beta^2 + \cdots] \tag{6.10}$$

donde cada a_j y B_j es una serie de potencias en δ. Además la parte polinomial en el lado derecho de la ecuación (6.10) tiene exactamente n raices que tienden a cero cuando $\delta \to 0$. Por lo tanto, $a_j(0) = 0, j = 0, 1, \cdots, n - 1$. Y por (6.9) debemos tener que $B_j(0) = 0, j = 0, 1, \cdots$.

Analicemos con más detenimiento los coeficientes $a_0, \cdots, a_{n-1}$ de (6.10). Para obtener de (6.10) los términos de grado cero en β tenemos que multiplicar

$$a_0[1 + B_0]$$

donde B_0 comienza con al menos δ. Si a_0 comienza con δ^α, $\alpha < n$, habría un término de grado cero en β y grado $\alpha < n$ en δ en (6.9), pero éste no es el caso. Si a_0 comienza con δ^α, $\alpha > n$, no habría término de grado n en δ y grado cero en β en (6.9); pero hay uno, $-\delta^n M$. Por lo tanto debemos tener que $\alpha = n$. Así que a_0 comienza con δ^n.

Para obtener de (6.10) los términos de grado uno en β tenemos que calcular

$$a_0B_1 + a_1[1 + B_0].$$

Sabemos que a_0 comienza con δ^n, por lo tanto a_0B_1 comienza con al menos δ^{n+1}. Si a_1 comienza con δ^α, $\alpha < n + 1$, habría un término de grado uno en β y grado $\alpha < n + 1$ en δ en (6.9); pero no hay un término tal. Por lo tanto a_1 debe comenzar con al menos δ^{n+1}. Siguiendo este argumento podemos demostrar de la misma manera que $a_2, \cdots, a_{n-1}$ también comienzan con al menos δ^{n+1}.

Esto significa que la parte polinomial de (6.10) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}&[\delta^n a_0^{(n)} + \cdots] + [\delta^{n+1} a_1^{(n+1)} + \cdots]\beta + [\delta^{n+1} a_2^{(n+1)} \\ &\qquad + \cdots]\beta^2 + \cdots + [\delta^{n+1} a_{n-1}^{(n+1)} + \cdots]\beta^{n-1} + \beta^n\end{aligned} \tag{6.11}$$

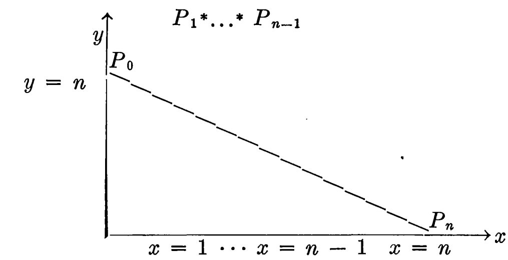

FIG. 1

con $a_0^{(n)} \neq 0$, donde todos los términos no escritos dentro de los corchetes son de grado superior en δ que el término escrito. Los coeficientes $a_j^{(N+1)}$, $j = 1, \cdots, n - 1$, pueden ser o no cero, pero esto no tiene importancia para lo que sigue.

Para determinar el carácter analítico de las raices de (6.11) utilizamos el polígono de Newton ([16]). En un plano coordenado colocamos los puntos

$$P_0 = (0, n), \qquad P_j = (j, \eta_j), \qquad j = 1, 2, \cdots, n - 1, \qquad P_n = (n, 0)$$

donde η_j, $j = 1, \cdots, n - 1$, es el verdadero grado en δ de cada uno de los corchetes, excepto el primero, de (6.11). Tenemos entonces

$$\eta_j \geqq n + 1, \qquad j = 1, \cdots, n - 1, \tag{6.12}$$

El polígono de Newton consistirá solo del segmento $\overline{P_0P_n}$ (Fig. 1.) ya que la condición (6.12) implica que todos los demas puntos están bien por encima de este segmento.

La pendiente de $\overline{P_0P_n}$ es -1, y por lo tanto las soluciones de (6.11) son analíticas en δ.

Esto demuestra que los exponentes característicos de (6.6) tienen la forma dada en (6.7). Tenemos que probar todavía que $C_j^{(1)} = 0$; $C_j^{(2)} = \sqrt[n]{M}$; $j = 1, \cdots, n$.

Para esto notemos que la ecuación (6.8) implica que β^n debe ser de la forma

$$\beta^n = \delta^n M + o(\delta^n) \tag{6.13}$$

y a su vez (6.13) implica

$$\beta = \delta \sqrt[n]{M} + o(\delta) \tag{6.14}$$

donde $\sqrt[n]{M}$ representa cualquiera de las raices n-ésimas de M. Como los exponentes característicos de (6.6) son de la forma

$$\alpha_j(\epsilon) = \rho + \delta\beta(\delta), \qquad j = 1, 2, \cdots, n,$$

obtenemos $C_j^{(1)} = 0$; $C_j^{(2)} = \sqrt[n]{M}$; $j = 1, \cdots, n$, terminando la demostración del Teorema 6.1.

Veamos con un poco más detalle la primera ecuación de bifurcación no trivial del sistema (6.1), la cual toma la forma

$$P_0[\Delta^*_{(n)} a^*] = 0 \tag{6.15}$$

donde Δ_n^* está dado por (6.3). La ecuación (6.15) se separa en el sistema

$$\begin{aligned} \beta a_1 &= a_2 \\ \beta a_2 &= a_3 \\ &\vdots \\ \beta a_{n-1} &= a_n \\ \delta^n a_1 M &= \beta a_n \end{aligned} \tag{6.16}$$

Si cada $a_j \neq 0$, entonces (6.14) y (6.16) dan

$$\begin{aligned} a_2/a_1 &= \delta \sqrt[n]{M} + o(\delta) \\ a_3/a_2 &= \delta \sqrt[n]{M} + o(\delta) \\ &\vdots \\ a_n/a_{n-1} &= \delta \sqrt[n]{M} + o(\delta) \\ a_1 M/a_n &= \delta \sqrt[n]{M}/\delta^{n-1} + o(\delta)/\delta^n \end{aligned} \tag{6.17}$$

Para que las ecuaciones (6.17) sean concordantes se necesita

$$a_j = \delta^{j-1} b_j \qquad j = 1, \cdots, n. \tag{6.18}$$

Las relaciones (6.18) nos dan una idea de la estructura del vector a; en efecto, hay n vectores a distintos, y cada uno de ellos tiene la forma

$$a = (b_1, \delta b_2, \delta^2 b_3, \cdots, \delta^{n-1} b_n).$$

Además puede verse de (6.17) que para $\delta = 0$,

$$b_2/b_1 = \sqrt[n]{M}, \tag{6.19}$$

donde $\sqrt[n]{M}$ representa cualquiera de las raices n-ésimas de M, y que

$$b_j/b_1 = [b_2/b_1]^{j-1}, \qquad j = 2, 3, \cdots, n. \tag{6.20}$$

Observación: El resultado del Teorema 6.1 no es válido, en esa forma, para un sistema tan general como (4.1), ya que los cálculos de β dependen de la estructura de A y de $\Phi(t)$. Sin embargo es claro de lo hecho hasta ahora como uno procedería en diferentes casos. El Teorema 6.1 es válido para un sistema como

$$w' = Aw + \epsilon\Phi(t)w,$$

donde se satisfacen todas las condiciones de (4.1) y, $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2)$, donde A_1 es como en (6.2), $(e^{-A_2 T} - E)$ no es singular, y $m[\Phi(t)] = 0$.

7. Cálculo de exponentes característicos (II)

Seguiremos analizando sistemas como (6.1), con la salvedad que ahora supondremos que el valor medio de $\Phi(t)$ no es cero. En particular supongamos que el elemento $\varphi_{n,1}(t)$ de la matriz $\Phi(t)$ tiene un valor medio distinto de cero, $m[\varphi_{n,1}(t)] = m$. La primera ecuación de bifurcación con soluciones no triviales es

$$P_0[\Delta^*_{(0)}a] = 0$$

y β está dado por

$$\det |\Delta^*_{(0)}| = \begin{vmatrix} -\beta & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdot & -\beta & 1 & \\ \cdot & & \ddots & 1 \\ \cdot & & & \\ m & \cdots & & -\beta \end{vmatrix} = 0 \tag{7.1}$$

y demostraremos:

TEOREMA 7.1: Supongamos que el sistema

$$w' = Aw + \epsilon\Phi(t)w \tag{7.2}$$

es como (6.1), excepto que $m[\varphi_{n,1}(t)] = m \neq 0$. Entonces para $0 \leqq \delta < \delta_0$ hay n exponentes característicos distintos de (7.2) de la forma

$$\alpha_j(\epsilon) = \rho + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} C_j^{(k)}\delta^k, \qquad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{7.3}$$

donde $\delta^n = \epsilon$ y $C_j^{(1)}, j = 1, \cdots, n$, son las n-ésimas raices de m.

Demostración: La relación funcional $F(\delta, \beta) = 0$ está dada por (7.1) como

$$F(\delta, \beta) = \beta^n - m + O(\delta) = 0. \tag{7.4}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} F(0, \sqrt[n]{m}) &= 0 \\ F_\beta(0, \sqrt[n]{m}) &\neq 0 \end{aligned} \tag{7.5}$$

donde $\sqrt[n]{m}$ representa cualquiera de las raices n-ésimas de m. La condición (7.5) nos permite aplicar el teorema de funciones implicitas a (7.4), y por lo tanto podemos resolver (7.4) para β en términos de δ en una vecindad de $\delta = 0$. Además la solución es analítica en δ.

Finalmente un argumento similar al utilizado en la demostración del Teorema 6.1 demuestra que $C_j^{(1)}, j = 1, \cdots, n$, son las raices n-ésimas de m.
Podemos demostrar también

TEOREMA 7.2: Supongamos que el sistema

$$w' = Aw + \epsilon\Phi(t)w \tag{7.6}$$

es como (6.1), excepto que, $m[\varphi_{n,1}(t)] = 0$, $m[\varphi_{n-1,1}(t)] + m[\varphi_{n,2}(t)] = m_1 + m_2 = m' \neq 0$. Entonces para $0 \leqq \delta < \delta_0$ hay n exponentes característicos distintos de (7.6) de la forma

$$\begin{aligned} \alpha_1(\epsilon) &= \rho + O(\delta^{\eta_0}) = \rho + \textstyle\sum_{k=\eta_0}^{\infty} C_1^{(k)}\delta^k \qquad \eta_0 \geqq 2 \\ \alpha_j(\epsilon) &= \rho + \delta \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} C_j^{(k)}\delta^{k/n-1}, \qquad j = 2, 3, \cdots, n. \end{aligned} \tag{7.7}$$

donde $\delta^n = \epsilon$ y $C_j^{(1)}, j = 2, \cdots, n$, son las $(n-1)$-ésimas raices de m'.

Demostración: La primera ecuación de bifurcación no trivial es

$$P_0[\Delta_{(1)}^* a] = 0,$$

donde β está determinado por

$$\det | \Delta_{(1)}^* | = \begin{bmatrix} -\beta & 1 & \cdots & \\ \cdot & -\beta & 1 & \\ \cdot & & \ddots & \\ \delta m_1 & & \cdot & 1 \\ 0 & \delta m_1 & \cdots & -\beta \end{bmatrix} = 0. \tag{7.8}$$

La relación funcional (5.8) a partir de (7.8) es ahora

$$F(\delta, \beta) = \beta^n - \beta\delta m' + O(\delta^2) = 0 \tag{7.9}$$

y $F(0, \beta) = \beta^n = 0$. Otra vez podemos aplicar el Teorema de preparación de Weierstrass y escribir (7.9) en la forma (6.10). Un argumento completamente similar al utilizado allí demuestra que la parte polinomial puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} &[\delta^2 a_0^{(2)} + \cdots] +]\delta a_1^{(1)} + \cdots]\beta + [\delta^2 a_2^{(2)} + \cdots]\beta^2 + \cdots \\ &\qquad + [\delta^2 a_{n+1}^{(2)} + \cdots]\beta^{n+1} + \beta^n, \end{aligned} \tag{7.10}$$

donde $a_1^{(1)} \neq 0$, y $a_0^{(2)}, a_2^{(2)}, \cdots, a_{n-1}^{(2)}$ pueden ser o no cero, y los términos restantes en cada corchete son de orden superior en δ que el término escrito explicitamente.

Para obtener el polígono de Newton de (7.10) consideramos los puntos

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, \eta_0) \\ P_1 &= (1, 1) \\ P_j &= (j, \eta_j), \qquad j = 2, \cdots, n-1, \\ P_n &= (n, 0) \end{aligned}$$

donde $\eta_j, j = 0, 2, 3, \cdots, n-1$, es grado real en δ de cada corchete en (7.10) excepto el primero cuyo grado es 1. Entonces $\eta_j \geqq 2$. El polígono de Newton consiste sólo de los segmentos $\overline{P_0P_1}$ y $\overline{P_1P_n}$ (Fig. 2), excepto si $\eta_0 = 2$, $n = 2$, en cuyo caso consiste de sólo el segemento $\overline{P_0P_2}$. La pendiente de $\overline{P_0P_1}$ es $-(\eta_0 - 1)$, y por lo tanto una raíz es analítica en $\delta^{\eta_0 - 1}$. La pendiente de $\overline{P_1P_n}$ es $-(1/n - 1)$, y por lo tanto las restantes raices de (7.10) son analíticas en $\delta^{1/n-1}$, demonstrando (7.7); el resto se sigue como en el Teorema 6.1. Para obtener información sobre η_0 habría que ir a aproximaciones superiores.

No es difícil ver que en este caso la estructura del vector a es muy similar a la de (6.18). De hecho hay $n - 1$ vectores de la forma

$$a = (\delta^{1/n-1} b_1, \delta^{2/n-1} b_2, \cdots, \delta^{n/n-1} b_n)$$

donde b_1 es arbitrario y el resto están dados por relaciones similares a (6.19) y (6.20). El otro vector es de la forma

$$a = (a_1, 0, \cdots, 0, -a_1\delta m_1).$$

Para demostrar como se complican las cosas seguiremos un paso más en nuestro análisis. Tomemos otra vez el sistema (6.1) pero con las condiciones:

$$m[\varphi_{n1}(t)] = 0;$$
$$m[\varphi_{n-1,1}(t)] + m[\varphi_{n,2}(t)] = m_1 + m_2 = 0;$$
$$m[\varphi_{n-2,1}(t)] + m[\varphi_{n-1,2}(t)] + m[\varphi_{n,3}(t)] = m_1^* + m_2^* + m_3^* = m^* \neq 0.$$

La primer ecuación de bifurcación no trivial es ahora

$$P_0[\Delta_{(2)}^* a] = 0.$$

Para simplificar la discusión y escritura, consideremos el caso $n = 3$. Entonces

$$\Delta_{(2)}^* = \begin{pmatrix} -\beta + \delta^2 m_1^* & 1 & 1 \\ \delta m_1 & -\beta + \delta^2 m_2^* & 0 \\ 0 & \delta m_2 & -\beta + \delta^2 m_3^* \end{pmatrix}$$

y de det $|\Delta_{(2)}^*| = 0$ obtenemos

$$F(\delta, \beta) = \beta^3 + A\delta^2\beta^2 + B\delta^4\beta + \delta^3 C + \delta^6 D + O(\delta^3) = 0 \qquad (7.11)$$

donde

$$A = -(m_1^* + m_2^* + m_3^*)$$
$$B = m_1^* m_2^* + m_1^* m_3^* + m_2^* m_3^*$$
$$C = m_1^* m_2 + m_1 m_2^*$$
$$D = m_1^* m_2^* m_3^*$$

Si $A \neq 0$, $C \neq 0$, entonces el polígono de Newton para (7.11) consiste sólo

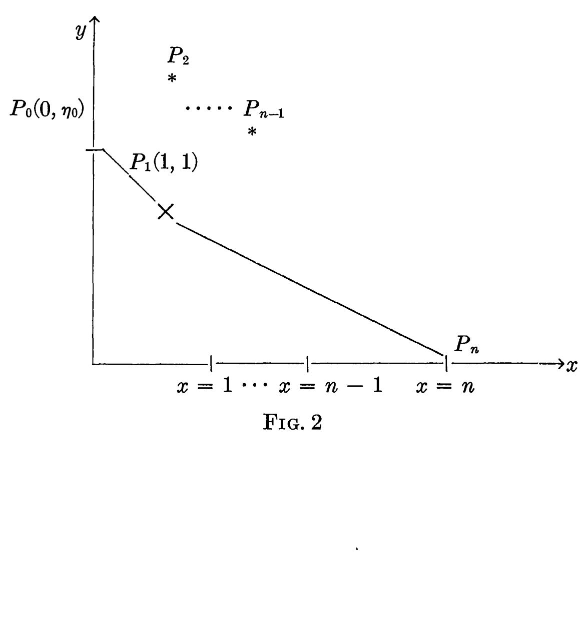

FIG. 2

del segmento P_0P_3 (Fig. 3) cuya pendiente es -1, y por lo tanto las raices de (7.11) que nos interesan comienzan con δ.

Si $A \neq 0$, pero $C = 0$, la situación no cambia excepto que P_0 tendrá coordenadas $(0, \eta_0^*)$, $\eta_0^* > 3$ y por lo tanto las raices comenzarían $\delta^{\eta_0^*/3}$, $\eta_0^* > 3$; a menos de que la pendiente de $\overline{P_0P_1}$ se haga mayor que la de $\overline{P_1P_3}$ en cuyo caso una de las raices comienza con $\delta^{\eta_0^*-\eta_1^*}$ y dos raices comienzan con $\delta^{\eta_1^*/2}$. En el caso particular $\eta_0^* = 6$, $\eta_1^* = 4$ las tres raices comienzan con δ^2. Y así podríamos seguir discutiendo el caso $A = 0$, etc., pero no llevaremos más adelante el asunto. El caso anterior ilustra con claridad las formas diferentes en que pueden aparecer las raices de (7.11). Además ilustra el efecto de términos precedentes de la matriz en los cómputos.

Un ejemplo: Tomemos la ecuación escalar

$$u'' + \epsilon\sigma^2 u = (\epsilon\sqrt{2}a \cos \omega t)u. \tag{7.12}$$

Si $\sigma \neq 0$ entonces los exponentes característicos de (7.12) están dados por (7.3) y son

$$\alpha_j(\epsilon) = \sum_{K=1}^{\infty} C_j^{(k)}\delta^k \qquad j = 1, 2,$$

donde $\delta^2 = \epsilon$, y $C_1^{(1)} = i\sigma$, $C_2^{(1)} = -i\sigma$.

Si $\sigma = 0$ entonces los exponentes característicos de (7.12) están dados por (6.7) y son

$$\alpha_j(\epsilon) = \sum_{K=1}^{\infty} C_j^{(k)}\delta^k, \qquad j = 1, 2,$$

donde $\delta^2 = \epsilon$, $C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = 0$, $C_1^{(2)}$ y $C_2^{(2)}$ son las raices cuadradas del valor medio de

$$\sqrt{2}a \cos \omega t \int\int \sqrt{2}a \cos \omega t;$$

estas son $C_1^{(2)} = ia$, $C_2^{(2)} = -ia$.

Así que en ambos casos el sistema (7.12) tiene todas sus soluciones acotadas en $-\infty < t < \infty$ ya que es recíproco y las primeras aproximaciones son imaginarias puras y distintas (Teorema 3.2).

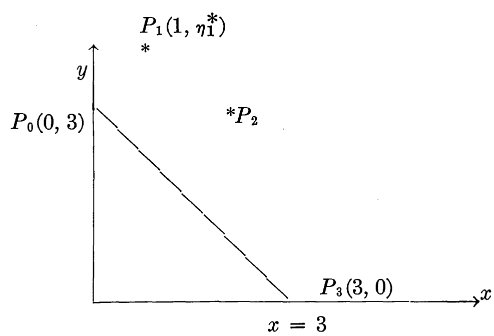

Fig. 3

8. Inestabilidad de sistemas

Resultados de inestabilidad se siguen con gran facilidad para sistemas del tipo estudiado hasta ahora. Por simplicidad daremos los teoremas para sistemas como (6.1), excepto que el valor medio de $\Phi(t)$ puede ser cero o distinto de cero.

Consideremos el sistema

$$w' = Aw + \epsilon\Phi(t)w, \tag{8.1}$$

donde w, ϵ, $\Phi(t)$ son como en los casos anteriores, A es como (6.2), con ρ imaginario puro. Nos referiremos a este sistema simplemente como (8.1). Con M denotamos el número definido en (6.5), por m_{ij} el valor medio del elemento $\varphi_{ij}(t)$ de la matriz $\Phi(t)$, y por n la dimensión de A.

Teorema 8.1: El sistema (8.1) tiene para $|\epsilon| \leqq \epsilon_0$ una infinidad de soluciones que tienden a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$ siempre que se cumpla una de las condiciones siguientes:

(a) $m_{ij} = 0$ $(i, j = 1, \cdots, n)$, $n > 2$ y $M \neq 0$;

(b) $m_{ij} = 0$ $(i, j = 1, \cdots, n)$, $n = 2$ y M es real positivo;

(c) $m_{ij} = 0$ $(i, j = 1, \cdots, n)$, $n = 2$ y la parte imaginaria de M no es cero;

(d) $m_{n1} \neq 0$, $n > 2$;

(e) $m_{n1} \neq 0$, $n = 2$ y m_{n1} es real positivo;

(f) $m_{n1} \neq 0$, $n = 2$ y la parte imaginaría de m_{n1} es distinta de cero;

(g) $m_{n1} = 0$, $m = m_{n-1,1} + m_{n2} \neq 0$, y $n > 3$;

(h) $m_{n1} = 0$, $m \neq 0$, $n = 3$ y la parte imaginaría de m es distinta de cero;

(i) $m_{n1} = 0$, $m \neq 0$, $n = 3$ y m es real positivo;

(j) $m_{n1} = 0$, $m \neq 0$, $n = 2$ y la parte real de m es positiva.

Demostración: (a) De acuerdo con el Teorema 6.1 los exponentes característicos de (8.1) están dados por

$$\alpha_j(\epsilon) = \rho + \delta^2\beta_j + O(\delta^2) \qquad j = 1, \cdots, n$$

donde $\delta^n = \epsilon$, y β_j, $j = 1, \cdots, n$, son la n-ésimas raices de M. Como $M \neq 0$ y $n > 2$ al menos una de las raices tiene parte real positiva. Entonces una de las funciones $\alpha_j(\epsilon)$ tiene parte real positiva para $0 < \delta < \delta_0$, que es lo que necesitabamos demostrar. Los casos (b) y (c) se siguen de la misma manera a partir del Teorema 6.1; (d), (e), y (f) se siguen del Teorema 7.1; y los demás casos se siguen del Teorema 7.2.

Observación: Resultados parciales de este tipo han sido obtenidos por otros autores. Vease, por ejemplo, [9] para una caso especial de (a) del Teorema 8.1.

9. Acotación de soluciones

De las discusiones precedentes es fácil deducir teoremas sobre acotación de soluciones.

TEOREMA 9.1: Considérese el sistema real

$$\begin{aligned} x''_{2j-1} &= x_{2j} \\ x''_{2j} &= -2\sigma_j^2 x_{2j} - \sigma_j^4 x_{2j-1} + \epsilon \textstyle\sum_{k=1}^{2n} \varphi_{kj}(t) x_k \qquad j = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{9.1}$$

donde $\sigma_j > 0$, $2\sigma_j \not\equiv 0$, $\sigma_j \not\equiv \sigma_k \pmod{\omega}$, $j \neq k$, y $\varphi_{kj}(t)$ son reales, periódicas en t, de periodo $T = 2\pi/\omega$, valor medio cero, integrables en el sentido de Lebesgue en $[0, T]$. Sea M_j definida como en (6.4) correspondiente a cada una de $i\sigma_j$, $j = 1, \cdots, n$. Entonces, si (9.1) es recíproco, y $M_j < 0$, $j = 1, \cdots, n$, todas las soluciones de (9.1) son acotadas en $-\infty < t < +\infty$ para $0 < |\epsilon| < \epsilon_0$.

Demostración: Hagamos en (9.1) el cambio de variables

$$\begin{cases} x_{2j-1} = w_{4j-3} \\ x_{2j} = w_{4j-1} \\ \overset{1}{x}_{2j-1} = w_{4j-2} \\ \overset{1}{x}_{2j} = w_{4j} \end{cases} \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

que transforma (9.1) en un sistema lineal de la forma

$$w' = Aw + \epsilon\Phi(t)w, \tag{9.2}$$

donde $A = \operatorname{diag}(A_1, \cdots, A_n)$

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\sigma_j^4 & 0 & -2\sigma_j^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad j = 1, \cdots, n.$$

Cada uno de los bloques A_j se puede poner en la forma canónica

$$A_j^* = \begin{pmatrix} i\sigma_j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\sigma_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sigma_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sigma_j \end{pmatrix} \qquad j = 1, \cdots, n$$

por medio de una tranformación de similaridad utilizando los bloques

$$C_j = \begin{pmatrix} i\sigma_j & 0 & i\sigma_j & 0 \\ -\sigma_j^2 & i\sigma_j & \sigma_j^2 & i\sigma_j \\ -\sigma_j^3 & -2\sigma_j^2 & -i\sigma_j^3 & 2\sigma_j^2 \\ \sigma_j^4 & -3i\sigma_j^3 & -\sigma_j^4 & -3i\sigma_j^2 \end{pmatrix} \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Por lo tanto el cambio de variables

$$w = Cy$$

donde $C = \text{diag}\,(C_1, \cdots, C_n)$ lleva (9.2) a la forma

$$y' = A^*y + \epsilon\Phi^*(t)y, \tag{9.3}$$

donde $A^* = \text{diag}\,(A_1^*, \cdots, A_n^*)$.

Por el Teorema 6.1 y porque el sistema original es real, sabemos que los exponentes característicos de (9.3) son

$$\alpha_{2j-1}(\epsilon) = i\sigma_j + \delta\sqrt{M_j} + O(\delta^2),\ \alpha_{2j}(\epsilon) = i\sigma_j - \delta\sqrt{M_j} + O(\delta^2)$$

$$\alpha_{2j-1+2n}(\epsilon) = -i\sigma_j + \delta\sqrt{M_j} + O(\delta^2);\ \alpha_{2j+2n}(\epsilon) = -i\sigma_j + \delta\sqrt{M_j} + O(\delta^2),$$

donde $j = 1, 2, \cdots, n, \delta^2 = \epsilon$.

Como $M_j < 0, j = 1, \cdots, n$, y como el sistema original es recíproco, entonces todos los exponentes característicos de (9.3) son imaginarios puros para $0 \leqq |\epsilon| < \epsilon_0$, (vease el Teorema 3.2) y queda demostrado el teorema.

En particular (9.1) es recíproco si todas las funciones $\varphi_{jk}(t)$ son pares. Podría hacerse una enorme lista de teoremas como el anterior para diversos sistemas. En lugar de hacer ésto preferimos enunciar una especie de teorema general, para acotación e inestabilidad, cuya demostración se sigue inmediatamente de los Teoremas 6.1, 8.1 y 3.2.

Teorema 9.2: Dado un sistema real

$$w' = Aw + \epsilon\Phi(t)w, \tag{9.4}$$

donde $w = \text{col}\,(w_1, \cdots, w_n)$, ϵ es un parámetro pequeño, A es una matriz constante de dimensión $n \times n$, y $\Phi(t)$ es una $n \times n$ matriz de funciones periódicas en t, periodo $T = 2\pi/\omega$, integrables en el sentido de Lebesgue en $[0, T]$, con valor medio cero. Supongamos que $\rho_1, \cdots, \rho_q$ $(q \leqq n)$ son las raices características distintas de A, cada ρ_j es imaginaria pura (otras podrían discutirse por un simple argumento de continuidad) y

$$\rho_j \neq \rho_k \ (\text{mod } i\omega), \qquad j \neq k.$$

Sean $\mu_1, \cdots, \mu_q$ las multiplicidades de $\rho_1, \cdots, \rho_q$, y supongamos que estas multiplicidades coincides con los grados de los divisores elementales no simples para cada ρ_j, $j = 1, \cdots, q$. Si M_j, $j = 1, \cdots, q$, son los números definidos como en (6.4) correspondientes a cada ρ_j entonces:

(a) si $\mu_j > 2$ para alguna j, digamos $j = k$, $M_k \neq 0$, entonces una infinidad de soluciones de (9.4) no son acotadas en $-\infty < t < +\infty$, para $\epsilon \neq 0$;

(b) si $\mu_j = 2, j = 1, \cdots, q, M_j < 0, j = 1, \cdots, q$, y (9.4) es recíproco, entonces todas las soluciones de (9.4) son acotadas en $-\infty < t < +\infty$, $0 \leqq |\epsilon| < \epsilon_0$;

(c) si $\mu_j = 2, j = 1, \cdots, q$, y alguna M_j es real positivo o tiene parte imaginaría distinta de cero, entonces una infinidad de soluciones de (9.4) no están acotadas en $-\infty < t < +\infty$ para toda $\epsilon \neq 0$.

10. Un ejemplo

Resultados como el Teorema 9.1 o la parte (b) del Teorema 9.2 no pueden mejorarse esencialmente como veremos con el siguiente ejemplo.

Consideremos la ecuación escalar

$$u^{IV} + 2\sigma^2 u^{II} + \sigma^4 u = \epsilon[\varphi_1(t)u + \varphi_2(t)u^{II}] \tag{10.1}$$

con las mismas condiciones que la ecuación (3.5), $\epsilon > 0$ es un parámetro pequeño, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ son integrables en el sentido de Lebesgue en $[0, T]$, $m[\varphi_j(t)] = 0$, $j = 1, 2$, $2\sigma \not\equiv 0 \pmod{\omega}$, $T = 2\pi/\omega$.

Si en (10.1) hacemos sucesivamente los cambios de variables

(a) $(u, u^I, u^{II}, u^{III}) = (w_1, w_2, w_3, w_4)$,

(b) $w = Cy$,

(c) $y = Pz$,

(d) $x = e^{(i\sigma+\delta\beta)t}z$,

donde C es como la matriz C_j en la demostración del Teorema 9.1, la matriz P, está definida por $P = \operatorname{diag}(1, \delta, 1, 1)$, $\delta^2 = \epsilon$, obtenemos al final el sistema

$$x' = Hx + \delta\Phi(t, \delta, \beta)x,$$

en el cual

$$H = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2i\sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2i\sigma \end{array}\right),$$

$$\Phi(t, \delta, \beta) = \begin{pmatrix} -\beta + \delta\varphi_{11} & 1 + \delta^2\varphi_{12} & \delta\varphi_{11} & -\delta\varphi_{12} \\ \varphi_{21} & -\beta + \delta\varphi_{22} & \varphi_{21} & -\varphi_{22} \\ \delta\bar{\varphi}_{11} & -\delta^2\bar{\varphi}_{12} & -\beta + \delta\bar{\varphi}_{11} & \delta\bar{\varphi}_{12} \\ \delta\bar{\varphi}_{21} & -\delta^2\bar{\varphi}_{22} & \delta\bar{\varphi}_{21} & -\beta + \delta\bar{\varphi}_{22} \end{pmatrix},$$

donde

$$\varphi_{11} = -\frac{i\varphi_1}{4\sigma^3} + \frac{i\varphi_2}{4\sigma}; \qquad \varphi_{12} = \frac{\varphi_2}{2\sigma^2}$$

$$\varphi_{21} = -i\sigma\varphi_{11}; \qquad \varphi_{22} = -i\sigma\varphi_{12}$$

$$\bar{\varphi}_{jk} = \text{conjugado de } \varphi_{jk} \qquad j, k = 1, 2.$$

Calculando en las aproximaciones sucesivas encontramos que el número M dado por (6.4) está determinado por

$$M = m\{\varphi_{21}[\textstyle\int\varphi_{11} + \int\int\varphi_{21}] + \varphi_{22}\int\varphi_{21} + \varphi_{21}e^{-2i\sigma t}[\int\bar{\varphi}_{11}e^{2i\sigma t}$$
$$- \textstyle\int\bar{\varphi}_{21}te^{2i\sigma t} + t\int\bar{\varphi}_{21}e^{2i\sigma t}] - \varphi_{22}e^{-2i\sigma t}\int\bar{\varphi}_{21}e^{2i\sigma t}\}.$$

Si en particular hacemos $\varphi_1 = a \cos \omega t$, $\varphi_2 = b \cos \omega t$, entonces:

$$M = \frac{1}{32\sigma^2\omega^2(4\sigma^2 - \omega^2)^2}[(8\sigma^2\omega^2 + 4\omega^4 + 32\sigma^4 - 16\omega^2)ab + (4\sigma^4\omega^2 + 3\sigma^2\omega^4)b^2 + (8\sigma^4\omega^2 - \sigma^2\omega^4 - 16\sigma^6)b - (4\omega^2 + 16\sigma^2)a^2]$$

El signo de M determina la estabilidad, excepto sobre curvas aisladas del espacio de coeficientes, de aquellas curvas para las cuales $M = 0$. Si además hacemos $\sigma = 1$; $\omega = \frac{3}{2}$, y $a = b$, entonces

$$M = \frac{49a(a-1)}{3528}. \tag{10.2}$$

A partir de (10.2) tenemos:

(i) si $a > 1$ o $a < 0$, entonces $M > 0$;
(ii) si $0 < a < 1$, entonces $M < 0$.

Así que en el caso (i) una infinidad de soluciones de (10.1) no son acotadas en $-\infty < t < +\infty$ para $\epsilon \neq 0$, y en el caso (ii) todas las soluciones son acotadas en $-\infty < t < +\infty, 0 \leqq |\epsilon| \leqq \epsilon_0$.

11. Perturbación de matrices constantes

Vamos ha considerer el siguiente problema de valores característicos. Supóngase que $A(\epsilon)$ es una matriz de dimensión $n \times n$ que depende continuamente de un parámetro $\epsilon \geqq 0$, y que tiene la forma

$$A(\epsilon) = A_0 + \epsilon A_1 + o(\epsilon), \tag{11.1}$$

donde A_0, A_1 son independientes de ϵ. Si $\rho_j(\epsilon)$, $j = 1, \cdots, n$, son las raices características de $A(\epsilon)$, entonces $\rho_j(0) = \rho_{j0}$, $j = 1, \cdots, n$, son las raices características de A_0. Supongamos que A_0 está en forma canónica de Jordan. Estamos interesados en calcular $\rho_j(\epsilon)$, $j = 1, \cdots, n$.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$x' = A(\epsilon)x = A_0x + \epsilon(A_1 + o(\epsilon)/\epsilon)x, \tag{11.2}$$

que es del tipo de sistemas estudiados antes. Por lo tanto podemos aplicar la técnica desarrollada antes y obtener las raices característica de $A(\epsilon)$ por medio de las ecuaciones de bifurcación de (11.2).

Para ilustrar el procedimiento consideramos un ejemplo particular, aun cuando el método es bien general en su aplicabilidad.

Consideremos

$$A(\epsilon) = A_0 + \epsilon A_1 + 0(\epsilon^2), \tag{11.3}$$

donde

$$A_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 1 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix}; \qquad A_1 = (a_{jk}^{(1)}), \qquad j, k = 1, 2, 3.$$

Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales

$$(11.4) \qquad x' = A(\epsilon)x$$

y hagamos en él los cambios de variables sucesivos

(a) $x = Py$, $P = \text{diag}\,(1, \delta, \delta^2)$, $\delta^3 = \epsilon$, $\delta \geqq 0$,
(b) $y = e^{(\rho_0+\delta\beta)t}z$,

con éstas transformaciones llevamos (11.4) a

$$(11.5) \qquad z' = \delta B(\beta, \delta)z + O(\delta^6)z,$$

donde

$$B(\beta, \delta) = \begin{pmatrix} -\beta + \delta^2 a_{11}^{(1)} & 1 + \delta^3 a_{12}^{(1)} & \delta^4 a_{13}^{(1)} \\ \delta a_{21}^{(1)} & -\beta + \delta^2 a_{22}^{(1)} & 1 + \delta^3 a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & \delta a_{32}^{(1)} & -\beta + \delta^2 a_{33}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Apliquemos a (11.5) el método de aproximaciones sucesivas para determinar las ecuaciones sucesivas de bifurcación. Tenemos los casos siguientes:

(i) si $a_{31}^{(1)} \neq 0$,

$$P_0\left[\begin{pmatrix} -\beta & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ a_{31}^{(1)} & 0 & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right] = 0,$$

y, por lo tanto,

$$\beta^3 = a_{31}^{(1)} + O(\delta)$$

y las raices características de (11.3) son (vease el Teorema 7.1)

$$\rho_j(\epsilon) = \rho_0 + \delta\beta_j + O(\delta^{4/3}), \qquad j = 1, 2, 3,$$

donde $\delta^3 = \epsilon$, y β_j, $j = 1, 2$ y 3, son las raices cúbicas de $a_{31}^{(1)}$;

(ii) si $a_{31}^{(1)} = 0$ y $a_{21}^{(1)} + a_{32}^{(1)} = l \neq 0$,

$$P_0\left[\begin{pmatrix} -\beta & 1 & 0 \\ \delta a_{21}^{(1)} & -\beta & 1 \\ 0 & \delta a_{32}^{(1)} & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right] = 0,$$

y, por lo tanto,

$$\beta^3 = \beta\delta l + O(\delta^2),$$

y se tiene

$$\rho_1(\epsilon) = \rho_0 + O(\delta^\alpha), \qquad \alpha \geqq 2,$$
$$\rho_j(\epsilon) = \rho_0 + \delta^{3/2}\beta_j + o(\delta^{3/2}), \qquad j = 1, 2,$$

donde $\delta^3 = \epsilon$, β_j, $j = 1$ y 2, son las raices cuadradas de l.

(iii) si $a_{31}^{(1)} = 0$, $a_{21}^{(1)} + a_{32}^{(1)} = 0$, entonces

$$P_0\left[\begin{pmatrix} -\beta + \delta^2 a_{11}^{(1)} & 1 & 0 \\ \delta a_{21}^{(1)} & -\beta + \delta^2 a_{22}^{(1)} & 1 \\ 0 & \delta a_{32}^{(1)} & -\beta + \delta^2 a_{33}^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right] = 0,$$

y ésta ecuacíón es como (7.11) y ya ha sido discutida allí.

Nótese que toda la información obtenida, así como la técnica utilizada, se pueden utilizar con facilidad en cómputos reales. Esto es importante ya que el problema de esta sección puede considerarse básicamente como un problema de análisis numérico. Además, es posible manejar matrices completamente arbitrarias $A(\epsilon)$ del tipo (11.1).

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO Y RIAS, BALTIMORE, MARYLAND

BIBLIOGRAFÍA

[1] L. CESARI, "Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations," *Ergbn. d. Math.*, N.F. Heft 16, Springer Verlag (1959).

[2] L. CESARI, "Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations," por aparecer, *Arch. Rat. Mech. Anal.*

[3] E. A. CODDINGTON, y N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill (1955).

[4] G. FLOQUET, "Sur les équations différentielles linéares a coefficients périodiques," *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. París* (2) **12,** 47–89 (1883).

[5] K. O. FRIEDERICHS, Special topics in analysis, N.Y.U. Notas (1953).

[6] M. GOLOMB, "Expansion and boundedness theorems for solutions of linear differential equations with periodic or almost periodic coefficients," *Arch. Rat. Mech. Anal.* **3** (1958) 284–308.

[7] J. K. HALE, "On differential equations containing a small parameter," por aparecer en *Contributions to Diff. Eq.*

[8] J. K. HALE, "On the characteristic exponents of linear periodic differential systems," *Bol. Soc. Mat. Mex.* **5,** 58–66 (1960).

[9] M. YA. KUSHUL, "On quasi harmonic systems which are adjacent to systems with constant coefficients in which purely imaginary roots of the characteristic equation have non-simple elementary divisors," *Prik. Mat. Mek.*, **22** (4), 519–533 (1959).

[10] D. C. LEWIS, "On the role of first integrals in the perturbation of periodic solutions," *Ann. Math.* **63** (1956), 535–548.

[11] S. LEFSCHETZ, *Differential equations, Geometric theory*, Interscience Pub. (1957).

[12] A. LIAPUNOV, *Problême général de la stabilité du mouvement*, Ann. of Math. Study 17, Princeton (1947).

[13] J. H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, París, Gauthier-Villars (1897).

[14] Y. SIBUYA, "Nonlinear differential equations with periodic coefficients," *Funcialoj Ekuacioj* **1** (1958), 121–204.

[15] V. A. YAKUBOVIC, "The small parameter method for canonical systems with periodic coefficients," *Prik. Mat. Mek.* **23** (1959), 17–34.

[16] R. J. WALKER, *Algebraic curves*, Princeton Univ. Press (1950).

[17] S. SAKS, y A. ZYGMUND, *Analytic functions*, Varsovia (1952).