CIERTOS SEMIGRUPOS COMPACTOS CONEXOS IRREDUCIBLES SOBRE UN CONJUNTO FINITO[1]

POR ROBERT P. HUNTER[2]

Quisiéramos considerar en esta nota un cierto aspecto del problema general de los arcos en los semigrupos topológicos. Koch y Wallace han demostrado en [8] que un semigrupo compacto conexo irreducible entre su núcleo y su elemento identidad es un arco(ver las definiciones más adelante). En [2] se demuestra que si $S^2 = S$, y si S tiene un elemento cero, y si S es irreducible entre dos de sus elementos, entonces S es un arco. Aquí demostramos, entre otras cosas, que si $S = ESE$, si S tiene un elemento cero, y si S es irreducible sobre un conjunto finito, entonces S es una dendrita. Estudiaremos S, además, cuando no haya un elemento cero en S. Si S tiene una identidad, demostraremos que el núcleo es una dendrita o un grupo topológico.

Crucial en nuestra investigación es la noción de continuo no-aposindético. Decimos que el continuo X es aposindético en x con respecto a p si existen un continuo M y un conjuncto abierto V tales que $X - p \supset M \supset V \supset x$. Denotaremos por T_p el conjunto de elementos x tal que X no sea aposindético en x con respecto a p. Es decir, $x \in T_p$ si es falso que existan un continuo M y un conjuncto abierto V tales que $X - p \supset M \supset V \supset x$. Si X es un continuo, entonces T_p lo es también.

Necesitaremos la proposición siguiente, que será fundamental. La demostración de ésta es consecuencia inmediata de [4].

PROPOSICIÓN A: Sea S un semigrupo compacto y conexo, que tiene un elemento identidad 1, y que no es un grupo. Si V es un conjunto abierto tal que $1 \in V$, entonces existe un continuo M tal que $1 \in M \subset V$ y $M * (S \backslash H_1)$.[3]

Recordemos algunos hechos, así como alguna terminología corriente: Decimos que un subconjunto no vacío R es un ideal a la derecha (izquierda) si $RS \subseteq R$ ($SR \subseteq R$). Si el semigrupo S es compacto, entonces existe un ideal minimal que es compacto. Llamaremos núcleo a este ideal. El continuo X se dice irreducible sobre el conjunto Z si X contiene Z y si no existe ningún subcontinuo propio de X que contenga Z. Un elemento e se dice idempotente si $e^2 = e$. El conjunto de los idempotentes será denotado por E. Si S es compacto, E lo es también. Denotamos la identidad por 1, si existe, y el cero por 0. Decimos que el continuo D es una dendrita si cada uno de sus puntos es un punto de separación de D o bien un extremo de D.

LEMA 1: Sea X un continuo irreducible sobre el conjunto compacto Z. Si T_p no interseca Z, entonces T_p separa X.

[1] Este trabajo ha sido subvencionado por The National Science Foundation Grant 13758.

[2] Es el deseo del autor poder manifestar aquí su profundo agradecimiento al profesor Lee W. Anderson, cuyas sugestiones fueron de gran valor.

[3] $A * B$ significa $A \cap B \neq \square$, donde $\square$ representa el conjunto vacío.

Demostración: Para cada punto x en $X \backslash T_p$ hay un continuo M_x y un conjunto abierto 0_x tales que $X - p \supset M_x \supset 0_x \supset x$. Los conjuntos abiertos forman una cubierta abierta de $X \backslash T_p$. Supongamos, al contrario, que $X \backslash T_p$ es conexo. Entonces existe una cadena simple $0_{x_1}, \cdots, 0_{x_n}$ con $x_1 = s, x_n \in Z$ y $0_{x_i} * 0_{x_{i+1}}$. Como Z es compacto, deducimos fácilmente que un número finito de los conjuntos abiertos cubrer $X - p$. La reunión de los continuos correspondientes, así como M_x, forman un continuo. Pero esto evidentemente constituye una contradicción, porque X es irreducible sobre Z. l.q.q.d.

Decimos que el conjunto T_p es simétrico si $x \in T_p$ implica $p \in T_x$. Recordemos que si X es un continuo, si V es un conjunto abierto, y si $p \in V$, entonces N, el componente de p en V, es tal que $N * Fr(V)$.

De aquí vemos que, si X es irreducible sobre un conjunto finito y M es un subcontinuo de X, entonces $X \backslash M$ contiene no más que un número finito de componentes, y que cada uno de éstos es abierto.

Lema 2: Sea X un continuo irreducible sobre el conjunto finito Z. Entonces cada uno de los conjuntos T_p es simétrico.

Demostración: El complemento de cada subcontinuo es la suma de un número finito de componentes. Sea $x \in T_p$, y supongamos que $p \notin T_x$. Entonces existe un subcontinuo M y un conjunto abierto 0 tal que $X - x \supset M \supset 0 \supset p$. Si Y es el componente de $X - M$ que contiene x, vemos fácilmente que $S - p \supset Y^* \supset Y \supset x$. Notemos que $p \notin Y^*$, pues $p \in 0$ y $Y \subset S - 0$, y además Y es abierto. Pero esto quiere decir que $x \notin T_p$, que es una contradicción. l.q.q.d.

Recordemos la conclusión importante de [2]: Si $S = ESE$ es un semigrupo compacto y conexo, y si $p \notin K$, entonces R es un ideal a la derecha; $R * T_p$ implica que $p \in R$. Si T_p es simétrico, entonces $T_p \subseteq R$.

Definimos los conjuntos L_p, R_p, C_p y H_p por medio de las relaciones siguientes: $x \in L_p$ si y solamente si $x \cup Sx = p \cup Sp$; $x \in R_p$ si y solamente si $x \cup xS = p \cup pS$; $H_p = L_p \cap R_p$. El componente de H_p que contiene p es C_p. Cada una de estos conjuntos define una descomposición semi-continua superiormente en caso que S sea compacto.

También, en todo lo que sigue, notemos que, si $R(L)$ es un ideal a la derecha (izquierda), entonces $R * R_p$ implica que $R \supseteq R_p$, y $L * L_p$ implica que $L \supseteq L_p$.

Lema 3: Sea S un semigrupo compacto y conexo tal que $S = ESE$. Si T_p es simétrico, entonces $T_p \subseteq C_p$. De modo más general, tenemos también: $T_p * C_q$ implica que $T_p \subseteq C_q$.

Demostración: Demostramos primero que $T_p * L_q$ implica que $T_p \subseteq L_q$: Sea $x \in T_p \cap L_q$; por el lema 2, tenemos que $p \in T_x$, pues $Sp * T_x$ y, por el mismo lema, vemos también que $x \in S_p$. Razonando análogamente, deducimos que $Sx * T_p$, pues $p \in Sx$. Entonces $L_p = L_x = L_q$.

Repitiendo nuestro razonamieto anterior, vemos igualmente que $T_p * R_q$

implica que $T_p \subseteq R_q$. Dado que $H_q = L_q \cap R_q$, hemos demostrado que $T_p * H_q$ implica que $T_p \subseteq H_q$. Siendo T_p un continuo, vemos que $T_p * C_q$ implica que $T_p \subseteq C_q$. l.q.q.d.

Sea D un semigrupo compacto; sea V un conjunto abierto en D. Sea $R_0(V)$ la reunión de todos los ideales a la derecha que están contenidos en V. Si $R_0(V)$ no es vacío, se sabe bien ([9]) que es abierto.

Notemos que, para un continuo S, la condición $S = ESE$ implica que cada ideal a la derecha (izquierda) que contenga K es conexo. En particular, el ideal a la derecha $R_0(V)$ es, si V es un conjunto abierto tal que $K \subset V$, abierto y conexo. Deducimos fácilmente que si $S = ESE$ es compacto, y si V es un conjunto abierto y conexo tal que $K \subset V$, entonces $R_0^*(V) * Fr(V)$, pues $R_0(V) \neq R_0^*(V)$ y, si $R_0^*(V)$ estuviera contenido en V, tendríamos $R_0(V) = R_0^*(V)$. ($R_0^*(V)$ es un ideal.)

Lema 4: Sea S un semigrupo compacto y conexo tal que $S = ESE$. Si $p \notin K$, entonces C_p tiene interior vacío. En particular, si $R_0 = R_0(S \backslash C_p)$, entonces $R_0^* \supseteq C_p$. De aquí, se deduce que, si M es el componente de K en $S \backslash C_p$, entonces $M^* \supseteq C_p$.

Demostración: Dado que $S - C_p$ es abierto y contiene K, sabemos que $R_0 = R_0(S \backslash C_p)$ es no vacío y abierto ([9]). Sabemos bien que R_0^* es un ideal a la derecha. Siendo S conexo, vemos que $R_0^* \neq R_0$, de donde deducimos que $R_0^* * C_p$. Tenemos entonces que $R_0^* \supseteq C_p$. Finalmente, dado que R_0 es un ideal a la derecha y $S = ESE$, sabemos que R_0 es conexo. De esto se deduce que R_0 está contenido en el componente de K en $S \backslash C_p$. l.q.q.d.

Recordemos que una dendrita es un continuo en el cual cada punto es un punto de separación o bien un extremo.

Como ya notamos en ocasión anterior, los conjuntos C_p forman una descomposición semi-continua superiormente. Denotamos el espacio de ésta por $S/\mathfrak{C}_{\mathcal{H}}$.

Lema 5: Sea S un semigrupo compacto y conexo tal que $S = ESE$. Si S es irreducible sobre un conjunto finito Z y si además contiene un cero, entonces $S/\mathfrak{C}_{\mathcal{H}}$ es una dendrita simple.

Demonstración: Sea $Z = z_1 \cup z_2 \cup \cdots \cup z_n$. Supongamos que $C_p \neq C_{z_i}$ para $i = 1, \cdots, n$. Entonces, por el Lema 3, se tiene $T_p \cap C_{z_i} = \square$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Por el Lema 1, sabemos que C_p separa S. Por lo tanto, $S/\mathfrak{C}_{\mathcal{H}}$ es separado por cada uno de sus puntos, con la sola posible excepción de los puntos $\{C_{z_1}\}, \cdots, \{C_{z_n}\}$. Ahora nos es fácil ver que $S/\mathfrak{C}_{\mathcal{H}}$ es una dendrita simple. l.q.q.d.

Sea D un semigrupo compacto. Entonces, como ya notamos anteriormente, el conjunto E de los idempotentes es también es también compacto. Si ponemos, para dos puntos g y h de E, $g \leqslant h$ si y solamente si $gh = hg = g$, vemos entonces que $\leqslant$ es un orden parcial continuo. Deducimos de esto que, si $S = ESE$ y

$p \in S$, existe entonces al menos un idempotente g tal que $pg = p$, siendo g, además, minimal con respecto a esta propiedad. Es decir, si f es un idempotente tal que $pf = p$ y $f \leqslant g$, entonces $f = g$.

Recordemos algunos resultados importantes debidos a Koch. Sea D un semigrupo compacto. Si $x \in D$, entonces el conjuncto $(x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots)^*$ contiene un idempotente único e; éste tiene además la propiedad siguiente: $\bigcap_n x^n S = eS$ (ver [7]). Si $px = p$, entonces $px^2 = px = p$, y en general, vemos que $px^n = p$ para toda n. De aquí deducimos, usando la continuidad de la multiplicación, que $pe = p$.

Lema 6: Sea D un semigrupo compacto con un cero y tal que $D = EDE$. Si $x \in D$ y si e es un idempotente minimal con respecto a la propiedad $xe = x$, entonces $x(eDe \backslash H_e) \cap R_x = \square$; de aquí deducimos también que $x(eDe \backslash H_e) \cap C_x = \square$.

Demostración: Supongamos, al contrario, que $x(eDe \backslash H_e) * R_x$. Sea $xt \in x(eDe \backslash H_e) \cap R_x$. Entonces $xtD \supseteq R_x$ y $xts = x$ para algún punto $s \in D$. Vemos que $xts = x$ implica que $xtse = xe = x$, y como $te = t$, tenemos que $xtese = x$. Dado que $eDe \backslash H_e$ es un ideal de eDe, vemos que $xq = x$ con $q \in eDe \backslash H_e$. Pero entonces $xf = f$, con $f \in \Gamma(q) \subseteq eDe \backslash H_e$; por lo tanto $xf = x$ y $f < e$, lo cual es contradictorio a la minimalidad de e. l.q.q.d.

Lema 7: Sea S un semigrupo compacto y conexo que no es un grupo. Sea g un idempotente tal que gSg no es un grupo. Entonces, si V es un conjunto abierto cualquiera tal que $g \in V$, existe un continuo M tal que $g \in M \subseteq V$ y $M * (gSg \backslash H_g)$.

Demostración: Este lema es una consecuencia evidente de la Proposición A.

Si la dendrita X tiene no más que un número finito de extremos, decimos que X es una dendrita simple. En este caso, X es la suma de un número finito de arcos. Si r y s son dos puntos de X, siendo X una dendrita simple, designamos el arco de r a s por $[r, s]$. Existe entonces un sub-arco $[t, s]$ de $[r, s]$ tal que $(t, s) = [t, s] \backslash \{t, s\}$ es abierto.

Lema 8: Con las mismas hipótesis del Lema 5, tenemos: cada conjunto C_p es exactamente $\{p\}$. De aquí deducimos que S es una dendrita.

Demostración: Sea θ el cero de S. Es claro que $C_\theta = \{\theta\}$. Sean $p \in S$, $p \neq \theta$, y g un idempotente minimal con respecto a la propiedad $pg = p$. Por el Lema 7, sabemos que, para un conjunto abierto U tal que $g \in U$, existe un continuo M tal que $g \in M$, $M \subseteq gSg$, y $M * gSg \backslash H_g$. Puesto que $pg = p$ y la multiplicación es continua, deducimos que, para un conjunto abierto V tal que $p \in V$, hay un continuo de la forma pM. (Por supuesto, M depende de V.) Por el Lema 6, sabemos que $p(gSg \backslash H_g) \cap C_p = \square$. Es evidente que $p(gSg \backslash H_g) \subseteq R_0^* = R_0^*(S \backslash C_p)$, de donde deducimos que pM no está contenido en C_p. Tenemos pues $pM \subseteq pS$, $pM \subseteq R_0^*(S \backslash C_p)$, $p \in pM$, y $pM * C_p$. Así, vemos que, si V es un conjunto abierto tal que $p \in V$, entonces existe un continuo P con las propiedades siguientes: $P \subset V$, $p \in P$, y $P \subset R_0^*(S \backslash C_p)$. Además, C_p no separa P, porque el componente de θ en $S \backslash C_p$ contiene P. (Este componente contiene también $R_0 = R_0(S \backslash C_p.)$ Podemos suponer también que P es irreducible entre C_p y un punto que no esté en C_p.

Volviendo al espacio $S/\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, nos damos cuenta del hecho que, dado que $S/\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ es una dendrita simple, el arco de $\gamma(C_\theta)$ a $\gamma(C_p)$ contiene un sub-arco de un punto $\gamma(C_\tau)$ a $\gamma(C_p)$ tal que $I = (\gamma(C_\tau), \gamma(C_p))$ es abierto. Vemos esto fácilmente como consecuencia del hecho que el complemento del arco de $\gamma(C_0)$ a $\gamma(C_p)$ es la suma de un número finito de componentes cuyas fronteras están reducidas a un solo punto. Ahora bien, dado que γ es continua, podemos tomar P lo suficientemente pequeño para que $\gamma(P)$ esté contenido en I^*: para ver ésto, recordemos que I está contenido en $\gamma(R_0^*)$ y que $P \subseteq R_0^*$, puesto que $\gamma(P) \subseteq \gamma(R_0^*)$. Así, tomando P suficientemente pequeño, debemos tener que $\gamma(P) \subseteq I^*$.

Si $s \in I \cap P$, escojamos C_q de tal manera que $\gamma(C_q) = s$. El punto a separa $S/\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ en exactamente dos componentes F y G; supongamos que $0 \in G$. Como γ es monótona, C_q separa S en dos componentes $\gamma^{-1}(F)$ y $\gamma^{-1}(G)$. Recordándonos que el continuo P contiene p y q, así como que S es irreducible sobre un conjunto finito, vemos que $R_0^*(S \backslash C_p)$ está contenido en $\gamma^{-1}(G^*) \cup P \cup C_p$, de donde $R_0^*(S \backslash C_p) \subseteq \gamma^{-1}(G^*) \cup P$. Sabemos por el Lema 4 que $R_0^*(S \backslash C_p) \supseteq C_p$. Pero entonces, si C_p no fuera igual a $\{p\}$, obtendríamos una contradicción por medio del argumento siguiente: como $\gamma^{-1}(G^*)$ no puede contener C_p, dado que $C_p \cap \gamma^{-1}(G^*) = \square$, deducimos que $C_p \subseteq P$. Esta es la contradicción deseada, pues sabemos que P puede ser escogido lo suficientemente pequeño para que C_p no esté contenido en P. l.q.q.d.

Sea S un semigrupo compacto; sea I un ideal compacto de S. Consideremos la descomposición de S cuyo único elemento no degenerado es I. Denotaremos este espacio (el llamado cociente de Rees) por S/I. La aplicación canónica es un homomorfismo continuo.

LEMA 9: Sea S un semigrupo compacto conexo tal que $S = ESE$. Si S es irreducible sobre un conjunto finito, entonces S/K es una dendrita simple.

Demostración: Siendo K un continuo, vemos inmediatamente que S/K es irreducible sobre un conjunto finito. Por el Lema 8, deducimos que S/K es una dendrita simple. l.q.q.d.

Como vamos a considerar la situación en que K es no degenerado, nos es necesario hacer algunas observaciones. Supongamos que $S = ESE$ es un semigrupo compacto conexo tal que S/K es una dendrita simple. El complemento es la suma de un número finito de componentes. Sean $p \notin K$ y K^p el componente de $S \backslash K$ que contiene p. Es evidente que, si $q \in K^p$, entonces $K^p = K^q$. El componente K^p es abierto y la frontera $Fr(K^p)$ está contenida en K. Deducimos ahora que, siendo S/K una dendrita, la frontera $Fr(K^p)$ es un continuo, posiblemente reducido a un punto. Poniendo $B_p = Fr(K^p)$, vemos que $q \in K^p$ implica que $B_q = B_p$. Si $p \notin K$ y si $K(p)$ denota el continuo irreducible entre K y $\{p\}$, entonces $K \cap K(p) = B_p$.

LEMA 10: Con las mismas hipótesis del Lema 9, tenemos: si $e \in E \backslash K$, entonces el sub-continuo irreducible sobre $K \cup \{e\}$, que denotaremos por K_e, es un sub-semigrupo, y K_e/K es un arco. También tenemos: si $K(e)$ es el sub-continuo irreducible entre $\{e\}$ y K, entonces $K(e) \cap K = B_e$. El conjunto B_e es, o bien degenerado, o bien un grupo compacto, conexo, y abeliano; en el segundo caso, tenemos también que $K(e)$ es un sub-semigrupo.

Demostración: Siendo S/K una dendrita, $\gamma(e)$ un idempotente, y $\gamma(K)$ un cero, sabemos, en virtud de ciertos teoremas de Faucett ([11]), que el arco $[\gamma(K), \gamma(e)]$ es un semigrupo abeliano. Tenemos que $\gamma^{-1}(A) = K_e$ y que A es isomórfico a K_e/K. Ya hicimos resaltar en ocasión anterior el hecho que $K(e) \cap K = F_e$. De aquí, es claro que $K(e) \backslash K$ es un arco semi-abierto. Ahora bien, si B_e es no degenerado, deducimos que $K(e) \backslash K$ es un sub-semigrupo abeliano: pues si $xs \in K$, con $x, s \in K(e) \backslash K$, entonces $x[s, e]$ contendría un arco entre $xs \in K$ y $s \notin K$; pero entonces deduciríamos que B_e es degenerado. La parte restante de la conclusión, que B_e es un grupo compacto, conexo y abeliano en caso que B_e no sea degenerado, es consecuencia directa del Lema 2.1 de [2]. l.q.q.d.

LEMA 11: Sea S un semigrupo compacto y conexo que contiene una identidad y que es irreducible sobre un conjunto finito. Sea $B_1 = K(1) \cap K = Fr(K^1)$ no degenerado. Entonces B_1 es un grupo compacto, conexo y abeliano. Si $B_1 \neq K$, entonces el interior de B_1 relativo a K es vacío. Si $q \notin K$, y si B_q es no degenerado, entonces $B_q \subseteq qB_1$. Además, si b es un punto de B_q, entonces $bB_1 = B_q$. En este caso, el interior de B_q relativo a K es vacío.

Demostración: En virtud del Lema 10, ya sabemos bien que B_1 es un grupo. Supongamos que $B_1 \neq K$, y consideremos el continuo $K(q)$, irreducible entre K y $\{q\}$. Es evidente que $K(q) \subseteq qK(1)$, puesto que $q \in qK(1)$ y $qK(1) * K$. Dado que $K(1) \backslash B_1$ es conexo por arcos y B_q es no degenerado, deducimos que $t \in K(1) \backslash K$ implica que $qt \notin K$. Por lo tanto, vemos que $qB_1 \supseteq B_q$. De la continuidad de la multiplicación deducimos que $bB_1 \supseteq B_q$. La aplicacion $k \longrightarrow kb$ siendo un homeomorfismo de K sobre K, vemos que el interior de B_q relativo a K es vacío. l.q.q.d.

LEMA 12: Sea S un semigrupo compacto conexo que contiene una identidad y que es irreducible sobre un conjunto finito. Si *int* $K = \square$, entonces K es un grupo abeliano, posiblemente cero; y, además, $B_1 = K$.

Demostración: Si $K(1) \cap K = B_1$ es degenerado, vemos, considerando las traslaciones del arco $K(1)$, que $q \in K$ implica que B_q es degenerado. En este caso tendríamos entonces que K es finito, y un punto es un cero. Si B_1 es no degenerado y si $B_1 \neq K$, aplicamos el lema 11 para obtener una contradicción: como *int* $K = \square$, tenemos $K = B_1 \cup \cdots \cup B_n$, donde $K^1, \cdots, K^n$ son los componentes del complemento de K. Esto dice que K es la reunión de un número finito de conjuntos densos en ninguna parte, que es la contradicción deseada. Así, debemos tener $B_1 = K$. l.q.q.d.

Necesitamos un resultado de Koch y Wallace ([8]); si S es un semigrupo compacto y si K no es un producto cartesiano, entonces tenemos una de las propiedades siguientes:

(i) $xy = x$ para todas $x, y \in K$;

(ii) $xy = y$ para todas $x, y \in K$;

(iii) K es un grupo.

LEMA 13: Sea S un semigrupo compacto conexo que contiene una identidad y que es irreducible sobre un conjunto finito. Si *int* $K \neq \square$, entonces K no es un producto cartesiano. De acuerdo con el resultado que acabamos de mencionar, una de las propiedades (i), (ii), (iii) debe ser satisfecha. Si (i) o (ii) es satisfecha, entonces K y S son dendritas. Si (iii) es satisfecha, entonces K, además de ser un grupo, es un continuo indescomponible.

Demostración: Sean $K^1, \cdots, K^n$ los componentes de $S \backslash K$, con $1 \in K^1$. Pongamos, otra vez, $B_i = Fr(K^i)$. Es claro que $B_1 \neq K$, dado que *int* $K \neq \square$. Usando el Lema 11, vemos que cada conjunto B_i es denso en ninguna parte de K, o sea, que $K \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ es denso en K. Definimos ahora un conjunto Q seleccionando un punto de cada uno de los conjuntos $B_1, \cdots, B_n$. Podemos ver fácilmente que K es irreducible sobre el conjunto Q. De aquí, un momento de reflexión nos permite llegar a la conclusión que K no puede ser un producto cartesiano. Supongamos primeramente que (i) o (ii) es satisfecha; entonces B_1 tiene que ser degenerado, por el Lema 11. Sea pues $B_1 = \{c\}$; entonces, considerando las traslaciones del arco [c, 1], vemos que S es conexo por arcos. Es claro, entonces, que S y K son dendritas. Para terminar, supongamos que (iii) es satisfecha; siendo K un grupo, vemos que K es homogéneo. Ahora sólo tenemos que aplicar un resultado de Burgess ([1]), en el cual se demuestra que un continuo homogéneo que es irreducible sobre un conjunto finito es indescomponible. l.q.q.d.

Estamos finalmente en posición de enunciar nuestro teorema, que es consecuencia de los lemas anteriormente demonstrados:

TEOREMA: Sea S un semigrupo compacto y conexo que es irreducible sobre un conjunto finito, y tal que $S = ESE$. Tenemos:

a) caso en que $S \neq K$. En este caso, S/K es una dendrita. Si S contiene una identidad, tenemos los sub-casos siguientes:

(i) si int $K = \square$, entonces K es un grupo abeliano y coincide con la frontera del componente de $S \backslash K$ que contiene 1.

(ii) si *int* $K \neq \square$, entonces K esta compuesto de ceros a la derecha (o a la izquierda), o bien K es un grupo; en la primera alternativa, S y K son dendritas, y en la segunda, K es un continuo indescomponible.

b) caso en que $S = K$. En este caso, vemos inmediatamente que $S = K$ no es un producto cartesiano. Entonces, usando el resultado de Koch y Wallace ya mencionado en ocasión anterior, que dice que una de las condiciones (i), (ii), (iii) debe ser satisfecha, llegamos a la conclusión que S es indescomponible.

Ejemplos: Antes de concluir esta nota, será conveniente considerar el ejemplo siguiente:

Por la construccion de [8], podemos ver que, si G es un grupo compacto y conexo que es, además, abeliano y métrico, entonces existe un semigrupo S con identidad que es un continuo irreduicble entre su núcleo isomórfico a G y su identidad.

Sea X un continuo irreducible sobre n puntos. Definimos en X la multiplicación $xy = x$. Formenos el producto cartesiano $X \times J$, donde J denota, como de costumbre, el intervalo $[0, 1]$ de la recta real. Entonces $X \times \{0\} \cup \{p\} \times J$, donde p es un punto cualquiera de X, es un semigrupo irreducible sobre un conjunto finito. Por tanto, si S no contiene una identidad, no se puede obtener las conclusiones del teorema.

THE UNIVERSITY OF GEORGIA

BIBLIOGRAFÍA

[1] C. E. BURGESS, *Some theorems on n-homogeneous continua*, Proc. A.M.S., vol. 5 (1954), pp. 136–143.

[2] R. P. HUNTER, *On the semigroup structure of continua*, Trans. A.M.S., vol. 93, no. 2, pp. 356–368.

[3] R. P. HUNTER, *Certain upper semi-continuous decompositions of a semigroup*, Duke Math., June 1960, pp. 283–290.

[4] R. P. HUNTER, *On a conjecture of Koch*, Proc. A.M.S., Feb. 1961, pp. 138–139.

[5] F. B. JONES, *Aposyndetic continua and certain boundary problems*, Amer. J. Math., vol. 67 (1941), pp. 545–553.

[6] F. B. JONES, *Concerning non-aposyndetic continua*, Amer. J. Math., vol. 70 (1948), pp. 403–413.

[7] R. J. KOCH, *On monothetic semigroups*, Proc. A.M.S., vol. 8 (1957), pp. 397–401.

[8] R. J. KOCH and A. D. WALLACE, *Admissability of semigroup structures on continua*, Trans. A.M.S., vol. 88 (1958), pp. 277–287.

[9] R. J. KOCH and A. D. WALLACE, *Maximal ideals in compact semigroups*, Duke Math. J., vol. 21 (1954), pp. 681–685.

[10] A. D. WALLACE, *The position of C-sets in semigroups*, Proc. A.M.S., vol. 6 (1955), pp. 639–642.

[11] W. M. FAUCETT, *Topological semigroups and continua with cut points*, Proc. A.M.S., vol. 6 (1955) pp. 748–756.