INTEGRACION p-ADICA

Por Francisco Tomás

Introducción

Tema del trabajo. El tema general de este trabajo es la "integración" de funciones definidas en grupos topológicos con valores en campos valuados completos con valuación v no arquimedeana. Es natural tratar de obtener una familia suficientemente grande de conjuntos abiertos que sean integrables. Para eso se supone que el grupo G es localmente compacto, con lo cual existe una medida de Haar m invariante por traslaciones izquierdas, aunque se presenta la dificultad de que sus valores son reales. Sin embargo, puede considerarse alguna familia de conjuntos medibles U cuyas medidas sean racionales y, si el campo P es de característica cero, se tendrá que $m(U)$ está en P. Se supone entonces que P es de característica cero. Si se quisiera aprovechar la medida de Haar aunque P no fuera de característica cero, debería considerarse restringida a una familia de conjuntos de medida entera, que sería necesariamente muy pequeña. La única manera, con la suposición de que P es de característica cero, en que se ha podido obtener una familia grande de conjuntos de medida racional ha sido con la suposición de que G es totalmente discontinuo, y tomando como tal familia la de los subgrupos abiertos y compactos K y sus trasladados izquierdos, que se denominan discos. Tiene importancia básica la función $v(m(K))$, que se denota por $v(K)$. Puede notarse que, de hecho, la estructura de campo de P no interviene a lo largo del trabajo, excepto cuando se trata con integración de productos, sino solamente su estructura de espacio vectorial sobre el subcampo P_0, adherencia del campo de los racionales, por lo que se podría substituir P por cualquier espacio vectorial sobre un campo valuado P_0.

Integral de Riemann. Se dice que una función es R-integrable si convergen las "sumas de Riemann". En la sección 1 se precisa la definición de dichas sumas, pero basta por el momento decir que están asociadas a particiones de G, o sea a descomposiciones de éste como unión de discos. Pero se encuentra que, en ciertos casos, por ejemplo[1] si $G = Z_p^2$, al tomar en consideración todos los discos sólo pueden ser R-integrables las funciones localmente constantes, lo que lleva a considerar, en lugar de la familia de todos los subgrupos abiertos y compactos, una subfamilia $\mathcal{C}$ estable por intersecciones finitas y de intersección reducida a $\{e\}$, resultando que el espacio L^R de funciones R-integrables depende de $\mathcal{C}$ (ver sección 1, ejemplos 1 y 2). Además, existen tres definiciones aceptables de suma de Riemann (ver 1.2, 1.4 y 1.5) que originan, para una misma $\mathcal{C}$, tres espacios L^R, cada uno contenido en el anterior, que sólo se demuestra que coinciden si $\mathcal{C}$ es "*amplia*" (ver 1.7). Esta condición se cumple si G es el grupo aditivo de un campo valuado localmente compacto (no necesariamente de característica

[1] En todo este trabajo se representa con Z_p el anillo de enteros del campo de números p-ádicos Q_p.

cero) y $\mathcal{C}$ es la familia de potencias del ideal de la valuación. Se demuestra que todas las funciones R-integrables son continuas y que, si $G = P_0$, son derivables y de derivada nula, aunque no toda función de derivada nula es necesariamente integrable.

Integral de Lebesgue. Para desarrollar una integración de Lebesgue es conveniente suponer que la familia $\mathcal{C}$ es totalmente ordenada y, por lo tanto, que G es metrizable. Se definen entonces un espacio vectorial *valuado* L^l que toma el lugar análogo al de L^1 en el caso real y se demuestra que es *completo* y que las "sumas de Lebesgue" de una función f de L^l convergen a un elemento de P, que se llama la integral (de Lebesgue) de f. Las integrales de Riemann y de Lebesgue (con la misma familia totalmente ordenada $\mathcal{C}$) coinciden en la intersección de los espacios correspondientes y, si $\mathcal{C}$ es amplia y G compacto, $L^R \subset L^l$. En el caso de la integral de Lebesque se exige, además, que el conjunto

$$\{v(K) \mid K \in \mathcal{C}\}$$

no sea acotado inferiormente porque, en caso contrario, solo se puede obtener una integral que no difiere de la de Riemann.

Aproximación por funciones escalonadas. En la sección 3 se busca definir un espacio de funciones que se pueden "aproximar" por funciones escalonadas con soporte compacto, obteniéndose un espacio valuado *completo* L que está caracterizado por los axiomas I-IV, pero esto se consigue solamente haciendo la hipótesis (A), que es necesaria para poder aplicar el tipo de demostraciones de que se dispone. La integral de Riemann está definida para toda función escalonada pero, posiblemente, no siempre se puede prolongar a L por continuidad. Se introduce la condición (Int) (ver 3.3), necesaria y suficiente para que esa prolongación sea posible, obteniendo entonces una "integral" sobre el espacio L. Si G es compacto y $\mathcal{C}$ es amplia, toda función R-integrable está en L y se obtiene la condición (B) necesaria y suficiente para que los dos espacios coincidan. En el caso de G metrizable y $\mathcal{C}$ totalmente ordenada, L es esencialmente igual a L^l y las integrales coinciden.

El caso de $v(K)$ acotada. Si los valores $v(K)$ forman un conjunto acotado (superior e inferiormente), L^R coincide con L y con el espacio de las funciones continuas que se anulan en ∞, con la topología de la convergencia uniforme.

La integración con respecto a variaciones de $\mathcal{C}$. Se ha señalado que la teoría depende de la elección de la familia $\mathcal{C}$. Es fácil ver que, si $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$, $L^R(\mathcal{C}) \supset L^R(\mathcal{C}')$ y $L(\mathcal{C}) \subset L(\mathcal{C}')$ (y $L^l(\mathcal{C}) \subset L^l(\mathcal{C}')$ si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son totalmente ordenadas con $\inf\{v(K_i) \mid K_i \in \mathcal{C}\} = \inf\{v(K_i') \mid K_i' \in \mathcal{C}'\} = -\infty$).

Además, se ha visto la importancia de la condición de amplitud de $\mathcal{C}$. Puede demostrarse que si (al menos) G es metrizable, existen familias amplias, pero existen también familias asociadas a ciertos grupos metrizables que no pueden sumergirse en una familia $\mathcal{C}'$ que sea amplia.

Este trabajo es la tesis doctoral del autor, desarrollada bajo la dirección del Profesor François Bruhat en el Centro de Investigación del I.P.N. Una exposi-

ción condensada, presentada por Bruhat en el Seminario Bourbaki, se encuentra en [1].

1. Integral de Riemann

Se supone un grupo topológico G localmente compacto totalmente discontinuo y un campo P valuado completo, de característica cero, con valuación real v no arquimedeana que, si es discreta, se supone normada. Se considera una familia $\mathcal{C}$ de subgrupos abiertos y compactos cuya intersección es el elemento idéntico e de G, cerrada bajo intersecciones, que debe, por lo tanto, constituir una base de las vecindades abiertas de e. La familia $\mathcal{C}$ es filtrante decreciente según el orden de inclusión. Se representa por $\tilde{\mathcal{C}}$ la familia de los trasladados izquierdos xK de elementos $K \in \mathcal{C}$, que se llamarán discos. Para cada $x \in G$, $\mathcal{C}_x$ representará la colección de los miembros de $\mathcal{C}$ que contienen a x. Se reservará la letra K para designar elementos de $\mathcal{C}$ y la letra D para designar elementos de $\tilde{\mathcal{C}}$. Sean $K \supset K'$; es claro que $(K:K') \in Z$ y que sólo existe un número finito de grupos $K_i \in \mathcal{C}$ contenidos entre K y K'.

Como G es localmente compacto, existe una medida de Haar m invariante por traslación izquierda que está definida para los miembros de $\tilde{\mathcal{C}}$ y que interesa solamente en su restricción a dicha familia. Se fijará m de tal manera que $m(K) \in Q$ para algún $K \in \mathcal{C}$. Como $m(K') = (K':K' \cap K)(K:K' \cap K)^{-1}m(K) \in Q$, se tiene que

$$m(K) \in Q \subset P$$

para todo K en $\mathcal{C}$ (y para todo $D \in \tilde{\mathcal{C}}$). Se usará la notación

$$v(K) = v(m(K)); \qquad v(D) = v(m(D)).$$

Sea F un espacio vectorial sobre P. Se dirá que F es valuado si existe $V:F \to R \cup \{\infty\}$ con las propiedades $V(a\varphi) = v(a) + V(\varphi)$ y

$$V(\varphi + \psi) \geqslant \inf\{V(\varphi), V(\psi)\}.$$

La valuación V determina una topología en F, según la cual las vecindades abiertas de $x \in F$ son los conjuntos $\{y \mid V(x - y) > N\}$ (o bien

$$\{y \mid V(x - y) \geqslant N\}).$$

Esta topología puede no ser separada. Se dirá que F es completo si para cada sucesión $\{\varphi_i\} \subset F$ tal que $\lim_{i\to\infty} V(\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \infty$ (sucesión de Cauchy), existe $\varphi \in F$ con $\lim_{i\to\infty} V(\varphi - \varphi_i) = \infty$. En este caso se escribirá

$$\varphi \sim \lim_{i\to\infty}^{F-V} \varphi_i .$$

1.1. La función $w_{\mathcal{C}}$ (seudo distancia) asociada a $\mathcal{C}$.

Definición 1.

$$w_{\mathcal{C}}(x) = \sup\{-v(K) \mid K \in \mathcal{C}_x\}.$$

Como $v(K' \cap K'') \leqslant v(K')$ y $\mathcal{C}_x$ es filtrante decreciente, se tiene:

$$w_{\mathcal{C}}(x) = \lim_{K \in \mathcal{C}_x} (-v(K)) \qquad (1.1.1)$$

Es claro que, si $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$, entonces $w_{\mathcal{C}'} \geqslant w_{\mathcal{C}}$. Pueden existir $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ tales que $w_{\mathcal{C}'} - w_{\mathcal{C}}$ no sea acotada. Sean, por ejemplo, $G = (Z_p)^2$, $\mathcal{C} = \{p^{2r}Z_p \times p^r Z_p\}$, $\mathcal{C}' = \{p^r Z_p \times p^{2r} Z_p\}$, y sean $x_i = (p^{2i}, 0)$; entonces $w_{\mathcal{C}}(x_i) = 3i$ y $w_{\mathcal{C}'}(x_i) = 6i$, de donde $\lim_{i\to\infty} (w_{\mathcal{C}'}(x_i) - w_{\mathcal{C}}(x_i)) = \infty$.

Se observa que $w_{\mathcal{C}}$ es acotada superiormente si y sólo si existe $K \in \mathcal{C}$ con $v(K:K') = 0$ para todo $K' \subset K$. Efectivamente, si no existe tal K deben existir $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ con $v(K_i:K_{i+1}) \geqslant v(p)$ (para algún primo p), y se tiene, para $x_i \in K_i$, $\lim_{i\to\infty} w_{\mathcal{C}}(x_i) = \infty$; si existe tal K, entonces $v(K'') \geqslant v(K)$ para todo $K'' \in \mathcal{C}$ y $w_{\mathcal{C}}$ es acotada.

Finalmente, puede observarse que si G es el grupo aditivo de Q_p, si $P = Q_p$, y si $\mathcal{C} = \{p^r Z_p\}_{r \in Z}$, entonces $w_{\mathcal{C}}(x) = v(x)$.

1.2. La R-integración en el caso compacto. Se supone G compacto, con $v(G) = v(m(G)) = \gamma$. Sea $f : G \to D$. Se usa la notación

$$\sum (f, K, \xi) = \sum_{i=1}^{s} m(K) f(\xi_i),$$

donde $K \in \mathcal{C}$, $s = (G:K)$ y $\{\xi_i\}$ es una colección completa mínima de representantes de las clases xK. Una suma $\sum (f, K, \xi)$ se llamará suma de Riemann de f relativa a K y $\{\xi_i\}$.

Definición 2. Se dirá que f es R–$\mathcal{C}$–integrable si existe $\lim_{K \in \mathcal{C}} \sum (f, K, \xi)$ según el orden filtrante decreciente de $\mathcal{C}$. El espacio de tales funciones se representará por $L^{R,\mathcal{C}}(G)$.

Definición 3. Sea $f \in L^{R,\mathcal{C}}(G)$; se define

$$\int^{R,\mathcal{C}} f = \lim_{K \in \mathcal{C}} \sum (f, K, \xi).$$

Se tiene, pues, que, para cada N, existe $K^N \in \mathcal{C}$ tal que

$$K \subset K^N \Rightarrow v\left(\sum (f, K, \xi) - \int^{R,\mathcal{C}} f\right) > N, \qquad (1.2.1)$$

cualquiera que sea $\{\xi_i\}$.

Se puede comprobar sin ninguna dificultad que $L^{R,\mathcal{C}}(G)$ es un espacio vectorial sobre P en donde $\int^{R,\mathcal{C}}$ es lineal e invariante por traslaciones izquierdas σ_x de las funciones $f \in L^{R,\mathcal{C}}(G)$ (se define $\sigma_x f(k) = f(xk)$). Esto último es cierto porque a cada $\sum (f, K, \xi)$ le corresponde una suma $\sum (\sigma_x f, K, x\xi)$ igual a la primera, y recíprocamente.

Usando la notación de (1.2.1), si $K'^N \subset K^N$, se tiene

$$\int^{R,\mathcal{C}} f = \lim_{N\to\infty} \sum (f, K'^N, \xi^N), \qquad (1.2.2)$$

cualesquiera que sean ξ_i^N.

Si existen $K_1' \supset K_2' \supset \cdots$ con $\bigcap K_i' = \{e\}$, para cada N existe i_N tal que

$K'_{i_N} \subset K^N$. Por (1.2.1) se tiene

$$\int^{R,\mathfrak{C}} f = \lim_{i\to\infty} \sum (f, K'_i, \xi) \qquad (1.2.3)$$

PROPOSICIÓN 1. Si $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}'$, entonces $L^{R,\mathfrak{C}} \supset L^{R,\mathfrak{C}'}$ y $\int^{R,\mathfrak{C}'} f = \int^{R,\mathfrak{C}} f$.

Efectivamente, si $f \in L^{R,\mathfrak{C}'}$, existen, según (1.2.1), $K^N(\mathfrak{C}')$ tales que $K \subset K^N(\mathfrak{C}') \Rightarrow v(\sum (f, K, \xi) - \int^{R,\mathfrak{C}'} f) > N$, cualquiera que sea $K \in \mathfrak{C}'$. Entonces, existen $K^N(\mathfrak{C}) \subset K^N(\mathfrak{C}')$ y es claro que, si $K \subset K^N(\mathfrak{C}) \subset K^N(\mathfrak{C}')$ y $K \in \mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}'$, $v(\sum (f, K, \xi) - \int^{R,\mathfrak{C}'} f) > N$, lo que demuestra que $f \in L^{R,\mathfrak{C}}$ y

$$\int^{R,\mathfrak{C}'} f = \int^{R,\mathfrak{C}} f.$$

Como en la familia de familias $\mathfrak{C}$ hay un orden filtrante creciente (existe $\mathfrak{C}''$ conteniendo $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}'$), y como al crecer $\mathfrak{C}$ decrece $L^{R,\mathfrak{C}}$, existe el mínimo espacio $L^{R,\mathfrak{C}}$, que se obtiene tomando $\mathfrak{C}$ como la familia de todos los subgrupos abiertos y compactos de G.

Se darán algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Sea $G = (Z_p)^2$. Sean $K_r = p^r Z_p \times p^{2r} Z_p$ y $K'_r = p^{2r} Z_p \times p^r Z_p$. Sean $\mathfrak{C} = \{K_r\}$ y $\mathfrak{C}' = \{K'_r\}$. Se supone que $\gamma = 0$. Sea $f = \sum_{r=0}^{\infty} p^{4r} \chi(K_r)$. Se comprueba fácilmente que $f \in L^{R,\mathfrak{C}}$. Por otra parte, sean, para cada K'_r, dos sumas de Riemann, $S_1 = \sum (f, K'_r, \xi_r)$ y $S_2 = \sum (f, K'_r, \xi'_r)$; puede suponerse que $\xi_{ri}^{-1} \xi'_{ri} \in K'_r$ y $\xi_{r1} \in K'_r$, y puede tomarse $\xi_{ri} = \xi'_{ri}$ para $i \neq 1$, $\xi_{r1} = (0, 0)$ y $\xi'_{r1} = (0, p^r)$, teniéndose entonces $v(S_1 - S_2) = v(f(\xi_{r1}) - f(\xi'_{r1})) + v(K'_r) = v(\sum_{i=0}^{\infty} p^{4i} - \sum_{i=0}^{[r/2]} p^{4i}) + v(p^{-3r}) \leqslant 4[(r + 1)/2] - 3r \leqslant 4 - r$. Entonces no existe $\lim_{r\to\infty} \sum (f, K'_r, \xi_r)$ y, por lo tanto, $f \notin L^{R,\mathfrak{C}'}$, porque en caso contrario debiera existir tal límite, según (1.2.3).

Ejemplo 2. Tomando $G = (Z_p)^2$ y $\mathfrak{C} = \{p^r Z_p \times p^s Z_p\}$, se puede comprobar que $f \in L^{R,\mathfrak{C}}$ si y sólo si existe $K \in \mathfrak{C}$ tal que f es constante en cada xK. Efectivamente, si no existe tal K, sea cualquier $K' \in \mathfrak{C}$; para cada K, existen K'', x, y, z, con $y \in xK''$, $z \in xK''$, $f(y) \neq f(z)$ y tales que y y z tienen una coordenada común pudiéndose por lo tanto obtener un tal K'' con $v(K'')$ tan pequeña como se quiera de donde siendo $v(f(y) - f(z)) + v(K'')$ una diferencia de dos sumas de Riemann, se concluye que $f \notin L^{R,\mathfrak{C}}$

1.3. R-integración y traslación derecha (G **compacto**). Se representa por $\tau_y f$ la función tal que $\tau_y f(k) = f(ky)$. Si $\xi_i \in \xi_i K$, entonces

$$\xi_i y \in \xi_i K y = \xi_i y (y^{-1} K y).$$

Por lo tanto, cada suma $\sum (f, K, \xi)$ relativa a la familia $\mathfrak{C}$ es igual a una suma $\sum (\tau_y f, y^{-1} K y, \xi y)$ relativa a la familia $y^{-1} \mathfrak{C} y = \mathfrak{C}'$, puesto que $m(y^{-1} K y) = m(K)$ por ser G unimodular. Del mismo modo, cada suma de $\tau_y f$ es igual a una suma de f, de donde $f \in L^{R,\mathfrak{C}} \Leftrightarrow \tau_y f \in L^{R,\mathfrak{C}'}$ y, además, $\int^{R,\mathfrak{C}} f = \int^{R,\mathfrak{C}'} \tau_y f$. En consecuencia, si $\mathfrak{C} = y^{-1} \mathfrak{C} y = \mathfrak{C}'$ para todo y, $\tau_y f \in L^{R,\mathfrak{C}'} = L^{R,\mathfrak{C}}$ para todo y, esto es, $L^{R,\mathfrak{C}} y \int^{R,\mathfrak{C}}$ son invariantes por traslación derecha.

Se da un ejemplo en donde $\mathfrak{C}$ no es invariante bajo todas las transformaciones $y^{-1} \mathfrak{C} y$. Sea G_1 el grupo de orden 2 que consta del elemento idéntico I y del elemento T, y sea $G_2 = Z_p^2$. Supóngase que G_1 opera en G_2 de este modo: $I(x, y) = (x, y)$ y $T(x, y) = (y, x)$. Sea G el producto semidirecto de G_1 por G_2, esto es, el grupo de las parejas (R, b), con $R \in G_1$ y $b \in G_2$, y la operación

$$(R, b)(R', b') = (RR', R'(b) + b').$$

Se toma

$$\mathcal{C} = \{(I, (p^r Z_p \times p^{2r} Z_p))\}.$$

Se tiene entonces, observando que $(T, 0)^{-1} = (T, 0)$, que $(T, 0)^{-1}(I, b)(T, 0) = (I, T(b))$ para todo $b \in G_2$, de donde

$$(T, 0)^{-1}\mathcal{C}(T, 0) = \{(I, (p^{2r} Z_p \times p^r Z_p))\} \neq \mathcal{C}.$$

1.4. R-integración en sentido estricto (caso compacto). Se puede notar que no se ha podido demostrar que, si $f \in L^{R,\mathcal{C}}(G)$ y $K \in \mathcal{C}$, entonces

$$f \mid K \in L^{R,\mathcal{C} \cap K}(K),$$

donde $\mathcal{C} \cap K = \{K' \cap K \mid K' \in \mathcal{C}\}$.

DEFINICIÓN 4. Se dirá que f es R–$\mathcal{C}$–integrable en sentido estricto, o que es R^*–$\mathcal{C}$–integrable, si $f \in L^{R,\mathcal{C}}(G)$ y, para cada $x \in G$ y cada $K \in \mathcal{C}$, $(\sigma_x f) \mid K \in L^{R,\mathcal{C} \cap K}(K)$. El espacio de las funciones R^*–$\mathcal{C}$–integrables se representará por $L^{R^*,\mathcal{C}}(G)$.

COROLARIO 1. Si $f \in L^{R^*,\mathcal{C}}(G)$, entonces $(\sigma_x f) \mid K \in L^{R^*,\mathcal{C} \cap K}(K)$ para todo $x \in G$ y $K \in \mathcal{C}$.

PROPOSICIÓN 2. La afirmación recíproca del Corolario 1 es verdadera. Además,

$$\int^{R,\mathcal{C}} f = \sum_i \int_K^{R,\mathcal{C} \cap K} \sigma_{x_i} f,$$

donde los x_i describen un sistema completo mínimo de representantes de las clases xK.

Cada $\sum (f, K', \xi)$ con $K' \subset K$ puede expresarse como

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} m(K') f(x_i \xi_{ij}) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} m(K') \sigma_{x_i} f(\xi_{ij})$$
$$= \sum_{i=1}^{s} \sum (\sigma_{x_i} f, K', \xi_i),$$

siendo $s = (G:K)$, $t = (K:K')$ y siendo cada $\{\xi_{ij}\}_{1 \le j \le t}$ una colección completa mínima de representantes de las clases xK' contenidas en K, lo que demuestra la primera parte de la proposición. Observando que, del mismo modo, cada $\sum_{i=1}^{s} \sum (\sigma_{x_i} f, K', \xi_i)$ es igual a alguna $\sum (f, K', \xi)$, se obtiene la igualdad.

1.5. R-integración "fuerte." Se supone G compacto. Puede todavía considerarse otro tipo de integración de Riemann.

Se llamará partición, y se denotará por δ, a una descomposición de G como unión $G = \bigcup_{i=1}^{t} x_i K_i$ de tal manera que $x_i K_i \cap x_j K_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y donde se supone que existe $K \in \mathcal{C}$ tal que $K_i \subset K$ para todo i. Se llamará norma de la partición, y se representará por $Nm(\delta)$, al mínimo $K \in \mathcal{C}$ que contenga todos los K_i. Se definen las sumas de Riemann correspondientes a la partición δ como

$$\sum (f, \delta, \xi) = \sum_{i=1}^{t} m(K_i) f(\xi_i),$$

donde $\xi_i \in x_i K_i$.

Definición 5. Se dirá que f es fuertemente R–$\mathcal{C}$–integrable, o que f es R'–$\mathcal{C}$–integrable, si existe

$$\lim_{Nm(\delta) \in \mathcal{C}} \sum (f, \delta, \xi),$$

esto es, para cada N debe existir K^N tal que

$$Nm(\delta) \subset K^N \Rightarrow v(\sum (f, \delta, \xi) - \textstyle\int^{R,\mathcal{C}} f) > N.$$

Se representará el espacio de las funciones R'–$\mathcal{C}$–integrables por $L^{R',\mathcal{C}}(G)$.

Es claro que $L^{R,\mathcal{C}} \supset L^{R*,\mathcal{C}} \supset L^{R',\mathcal{C}}$. Más adelante se dará una condición suficiente para que esos tres espacios coincidan.

Proposición 3. Sea G compacto. Entonces $L^{R',\mathcal{C}}$ contiene todas las funciones localmente constantes.

Dada f localmente constante, existen $x_i K_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ajenos dos a dos, cuya unión cubre G, y tales que f es constante en cada $x_i K_i$. El valor de las sumas de Riemann correspondientes a particiones δ con $Nm(\delta) \subset \bigcap_{i=1}^{n} K_i$ es siempre el mismo, luego $f \in L^{R',\mathcal{C}}$.

1.6. Integración de Riemann y "derivación". Sea G compacto.

Teorema 1. Si $f \in L^{R,\mathcal{C}}(G)$, entonces

$$\lim_{x \to y} [v(f(x) - f(y)) - w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y)] = \infty,$$

uniformemente. Esto es, para cada N existe K^N tal que, si $x^{-1}y \in K^N$,

$$v(f(x) - f(y)) - w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y) > N.$$

Sea $f \in L^{R,\mathcal{C}}$; existe K^N tal que $v[\sum (f, K, \xi) - \sum (f, K, \eta)] > N$ si $K \subset K^N$. Sea $x^{-1}y \in K \subset K^N$; escogiendo convenientemente $\{\xi_i\}$ y $\{\eta_i\}$ se obtiene que $v[f(x) - f(y)] + v(K) > N$ para todo $K \in \mathcal{C}_{x^{-1}y}$ con $K \subset K^N$, de donde, usando (1.1.1), se obtiene

$$v[f(x) - f(y)] - w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y) > N,$$

para todo $x^{-1}y \in K^N$.

Corolario 2. Toda $f \in L^{R,\mathcal{C}}(G)$ es continua.

Porque $w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y) \geqslant v(G)$, de donde $\lim_{x \to y} v(f(x) - f(y)) = \infty$.

Proposición 4. Si G es el grupo aditivo de $\mathcal{V}$, siendo $\mathcal{V}$ el anillo de valuación de P, entonces toda $f \in L^{R,\mathcal{C}}$ tiene derivada nula, si se toma $\mathcal{C} = \{p^r\}$ (P conmutativo y v discreta).

Porque

$$\lim_{x\to y} v(f(x) - f(y)/x - y) = \lim_{x\to y} [v(f(x) - f(y)) - v(x - y)]$$
$$= \lim_{x\to y} [v(f(x) - f(y)) - w_{\mathcal{C}}(x - y)] = \infty.$$

Pero no toda función de derivada nula es R–$\mathcal{C}$–integrable: sea $G = Z_p$, con $P = Q_p$, y sean

$$f_i(x) = \begin{cases} p^{2i} \text{ si } x \in p^i + p^{3i}Z_p \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Se define $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ y se comprueba que $f' = 0$ y $f \notin L^{R,\mathcal{C}}$, esto último porque $\Delta_i = (f(p^i) - f(p^i + p^{3i}))m(p^{3i-1}Z_p) = p^{2i-(3i-1)} = p^{-i+1}$ es una diferencia de dos sumas de Riemann relativas a $p^{3i-1}Z_p$ y $v(\Delta_i) = -i + 1$, que no tiende a ∞ cuando $i \to \infty$.

1.7. El caso de $\mathcal{C}$ amplia.

DEFINICIÓN 6. Se dirá que la familia $\mathcal{C}$ es amplia si existe β tal que, dados K y K' en $\mathcal{C}$, con $K \supset K'$, existen K_i tales que $K = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n = K'$ y $v(K_{i-1}:K_i) \leqslant \beta$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

TEOREMA 2. Sea G compacto. Si $\mathcal{C}$ es amplia, entonces $L^{R,\mathcal{C}} = L^{R^*,\mathcal{C}} = L^{R',\mathcal{C}}$, y $f \in L^{R,\mathcal{C}}$ si y sólo si

$$\lim_{x\to y} [v(f(x) - f(y)) - w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y)] = \infty, \tag{1.7.1}$$

uniformemente.

Según el teorema 1, basta demostrar que, si se cumple (1.7.1) entonces $f \in L^{R',\mathcal{C}}$. Sea $K^{N+\beta}$ tal que, si $K \subset K^{N+\beta}$, $v(f(x) - f(y)) - w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y) > N + \beta$ para $x^{-1}y \in K$; sean $\sum (f, \delta, \xi)$ y $\sum (f, \delta', \xi')$ tales que $Nm(\delta) \subset K^{N+\beta}$ y $Nm(\delta') \subset K^{N+\beta}$. Se demostrará que $v(\sum (f, \delta, \xi) - \sum (f, \delta', \xi')) > N$. Si δ es la partición $\bigcup_i x_iK_i = G$ y δ' es la partición $G = \bigcup_i x_i'K_i'$, y si

$$K = (\bigcap_i K_i) \cap (\bigcap_i K_i'),$$

basta demostrar que $v(\sum (f, \delta, \xi) - \sum (f, K, \eta)) > N$. Para ello es suficiente demostrar que, para cualquier i, $v(f(\xi_i)m(K_i) - \sum_{j=1}^{t} f(\eta_{ij})m(K)) > N$, donde $\{\eta_{ij}\}$ es una colección completa mínima de representantes de las clases xK contenidas en x_iK_i. Esto es, debe demostrarse que, si $K \subset K' \subset K^{N+\beta}$, entonces $v(f(\xi)m(K') - \sum_{j=1}^{t} f(\eta_j)m(K)) > N$, donde $\{\eta_j\}$ es una colección completa mínima de representantes de las clases xK contenidas en $\xi K'$, y esto queda demostrado si se demuestra, en general, que

$$v(\sum (f, K', \xi) - \sum (f, K, \eta)) > N.$$

Pero como existen K_i' con $K' = K_0' \supset K_1' \supset K_2' \supset \cdots \supset K_s' = K$ y

$$v(K_{i-1}':K_i') \leqslant \beta,$$

y como

$$v(\sum (f, K', \xi) - \sum (f, K, \eta))$$
$$\geqslant \inf \{v(\sum (f, K'_{i-1}, \xi'_{i-1}) - \sum (f, K'_i, \xi'_i)) \mid 1 \leqslant i \leqslant s\},$$

basta demostrar que $v(\sum (f, K', \xi) - \sum (f, K, \eta)) > N$ con la hipótesis adicional de que $v(K':K) \leqslant \beta$. Finalmente, es claro que basta demostrar que, si $K \subset K' \subset K^{N+\beta}$ y $v(K':K) \leqslant \beta$, entonces

$$v(\Delta) = v(f(\xi)m(K') - \textstyle\sum_{j=1}^{t} f(\eta_j)m(K)) > N,$$

donde $\{\eta_j\}$ es una colección completa mínima de representantes de las clases xK contenidas en $\xi K'$.

Como $m(K') = tm(K)$, se tiene

$$v(\Delta) = v(\textstyle\sum_{j=1}^{t} (f(\xi) - f(\eta_j))) + v(K)$$
$$\geqslant \inf \{v(f(\xi) - f(\eta_j)) \mid 1 \leqslant j \leqslant t\} + v(K)$$
$$> N + \beta + \inf \{w_{\mathcal{C}}(\xi^{-1}\eta_j) \mid 1 \leqslant j \leqslant t\} + v(K).$$

Como $w_{\mathcal{C}}(\xi^{-1}\eta_j) \geqslant -v(K')$, se tiene

$$v(\Delta) > N + \beta - v(K') + v(K) \geqslant N.$$

Corolario 4. Sea G compacto. Si $w_{\mathcal{C}}$ es acotada (si es acotada superiormente), $L^{R,\mathcal{C}}$ es el espacio de las funciones continuas.

Porque, en este caso, $\mathcal{C}$ es amplia y, además, la condición (1.7.1) equivale a $\lim_{x\to y} v(f(x) - f(y)) = \infty$, que equivale a la continuidad de f.

1.8. La integración de Riemann en el caso no compacto. Se darán dos definiciones, ambas generalizando la R^*–$\mathcal{C}$–integración del caso compacto. La segunda definición sólo tiene sentido en el caso en que la familia $\mathcal{C}$ es filtrante creciente, y amplía la primera, en ese caso.

Definición 7. Se dirá que f es estrictamente integrable, o que es R^*–$\mathcal{C}$–integrable, si para todo $K \in \mathcal{C}$ y todo $x \in G$, $(\sigma_x f) \mid K \in L^{R^*,\mathcal{C}\cap K}(K)$ y, además, para cada N, sólo existe un número finito de clases xK tal que $v(\int_K^{R,\mathcal{C}} \sigma_x f) \leqslant N$. En este caso se define

$$\int^{R,\mathcal{C}} f = \sum_{\alpha\in A} \int_K^{R,\mathcal{C}} \sigma_x f,$$

donde $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una colección completa mínima de representantes de las clases xK. El espacio de estas funciones se representa por $L^{R^*,\mathcal{C}}$

Es claro que $\int^{R,\mathcal{C}} f$ no depende de la elección de K: basta comprobarlo para $K' \subset K$, y esto es consecuencia de la proposición 2.

También es claro que es suficiente que se cumplan las condiciones de la definición para todo $K \in \mathcal{C}$ suficientemente pequeño. En otras palabras, la R^*–$\mathcal{C}$–integrabilidad sólo depende de la parte de $\mathcal{C}$ cercana a e.

Corolario 5. G es compacto si y sólo si $\chi(G)$ es R^*–$\mathcal{C}$–integrable.

Porque G es compacto si y sólo si es unión finita de clases xK, y cada $\chi(K)$ es R^*–$\mathcal{C}$–integrable.

Se supondrá a continuación que la familia $\mathcal{C}$ es filtrante creciente, lo que se indicará brevemente por $\mathcal{C}_F$. Se dará la definición de R^*–$\mathcal{C}_F$–integrabilidad, que amplía la anterior, en dos partes. Se usará la notación $G_0 = \bigcup_{K \in \mathcal{C}} K$.

Definición 8. Supóngase que $G = G_0$. Se dirá que f es R^*–$\mathcal{C}_F$–integrable, o que $f \in L^{R^*,\mathcal{C}_F}(G_0)$, si $f \mid K \in L^{R^*,\mathcal{C}\cap K}(K)$ para todo $K \in \mathcal{C}$ y $\int_K^{R,\mathcal{C}} f$ converge según el orden filtrante creciente de $\mathcal{C}$, definiéndose en este caso

$$\int^{R,\mathcal{C}} f = \lim_{K \in \mathcal{C}} \int_K^{R,\mathcal{C}} f.$$

Definición 8′. Se dirá que f es R^*–$\mathcal{C}_F$–integrable, o que $f \in L^{R^*,\mathcal{C}_F}(G)$, si para todo $x \in G$, $(\sigma_x f) \mid G_0 \in L^{R^*,\mathcal{C}_F}(G_0)$ y, además, la suma $\sum_{\alpha \in A} \int_{G_0}^{R,\mathcal{C}} \sigma_x f$ es convergente, siendo $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección completa mínima de representantes de las clases xG_0. Se define en este caso

$$\int^{R,\mathcal{C}} f = \sum_{\alpha \in A} \int_{G_0}^{R,\mathcal{C}} \sigma_{x_\alpha} f$$

Se verifica fácilmente que $L^{R^*,\mathcal{C}} \subset L^{R^*,\mathcal{C}_F}$ y que las definiciones de $\int^{R,\mathcal{C}}$ concuerdan.

Nota 1. En la definición 8 podría haberse reemplazado la condición

$$f \mid K \in L^{R^*,\mathcal{C}\cap K}(K)$$

para todo $K \in \mathcal{C}$ por la siguiente: $f \mid K \in L^{R,\mathcal{C}\cap K}(K)$ para todo $K \in \mathcal{C}$ suficientemente grande, obteniéndose así la definición de funciones R–$\mathcal{C}_F$–integrables y del espacio $L^{R,\mathcal{C}_F}(G_0)$. Del mismo modo, reemplazando en la definición 8′ la condición $(\sigma_x f) \mid G_0 \in L^{R^*,\mathcal{C}_F}(G_0)$ por la condición $(\sigma_x f) \mid G_0 \in L^{R,\mathcal{C}_F}(G_0)$, se obtiene la definición del espacio $L^{R,\mathcal{C}_F}(G)$. Es claro que, si $\mathcal{C}$ es amplia, entonces $L^{R,\mathcal{C}_F} = L^{R^*,\mathcal{C}_F}$.

Puede darse el caso de que $L^{R^*,\mathcal{C}} \neq L^{R^*,\mathcal{C}_F}$. Por ejemplo, si G_0 no es compacto y $m(K)$ converge según el orden filtrante creciente de $\mathcal{C}$; en ese caso $\chi(G_0) \notin L^{R^*,\mathcal{C}}$ y $\chi(G_0) \in L^{R^*,\mathcal{C}_F}$. Además, en este caso, como los valores de $m(K)$ son enteros y crecen, para que $m(K)$ sea convergente debe ser creciente $v(K)$, lo que implica $\int^{R,\mathcal{C}} \chi(G_0) = 0$. Este ejemplo se realiza para $G = P = Q_p$.

Se puede comprobar que $L^{R^*,\mathcal{C}}$ y $L^{R^*,\mathcal{C}_F}$ son espacios vectoriales invariantes por traslaciones izquierdas de sus funciones, donde $\int^{R,\mathcal{C}}$ es lineal.

Por razonamiento análogo al del inciso 1.3 se ve que

$$f \in L^{R^*,\mathcal{C}} \Leftrightarrow \tau_y f \in L^{R^*,y^{-1}\mathcal{C}y}$$

y que si $\mathcal{C}$ es invariante por automorfismos interiores, cada $\tau_y f \in L^{R^*,\mathcal{C}}$ y

$$\int^{R,\mathcal{C}} \tau_y f = \Delta(y) \int^{R,\mathcal{C}} f,$$

donde Δ es el módulo del grupo. Son válidas las afirmaciones análogas para

$L^{R^*,\mathcal{C}_F}$. Debe notarse aquí que $\Delta(y) \in Q$ porque $y^{-1}Ky$ es un subgrupo abierto y compacto de G.

1.9. Integración en grupos cocientes.

TEOREMA 3. Sea G compacto, con la familia $\mathcal{C}$ de subgrupos abiertos y compactos. Sea H un subgrupo compacto normal de G, y considérese el grupo G/H con la familia $\mathcal{C}' = \{KH/H \mid K \in \mathcal{C}\}$. Sea $\pi: G \to G/H$ el homomorfismo canónico. Sea $f: G/H \to P$. Si $f\circ\pi \in L^{R,\mathcal{C}}(G)$, $f \in L^{R,\mathcal{C}'}(G/H)$. Son válidas también las afirmaciones correspondientes para $L^{R^*,\mathcal{C}}$ y $L^{R',\mathcal{C}}$.

Se hará la demostración para el caso de $L^{R',\mathcal{C}}$. La misma demostración, simplificada, es válida para el caso $L^{R,\mathcal{C}}$. La afirmación para $L^{R^*,\mathcal{C}}$ es consecuencia inmediata de la afirmación para $L^{R,\mathcal{C}}$ y de la definición de $L^{R^*,\mathcal{C}}$.

Sea $m(\pi(KH)) = m(K)$ paro todo $K \in \mathcal{C}$. Sean K^N tales que $Nm(\delta) \subset K^N \Rightarrow v(\sum (f\circ\pi, \delta, \xi) - \int^{R,\mathcal{C}} f\circ\pi) > N$. Sean $K'^N = K^NH/H$. Bastará demostrar que, para cada δ' con $Nm(\delta') \subset K'^N$, cada $\sum (f, \delta', \xi')$ es igual a una suma

$$\sum (f\circ\pi, \delta, \eta)$$

con $Nm(\delta) \subset K^N$. Sea $Nm(\delta') \subset K'^N$ y

$$\sum (f, \delta', \xi') = \sum_{i=1}^{s} f(\xi_i')m(K_i') = \sum_{i=1}^{s} f\circ\pi(\xi_i)m(K_i').$$

Sea $K_i = \pi^{-1}K_i' \cap K^N$; es claro que $\pi^{-1}K_i' = K_iH = \bigcup_{j=1}^{r_i} K_ih_{ij}$ y que $K_i' = \pi(K_iH)$. Entonces $\sum (f, \delta', \xi') = \sum_{i=1}^{s} f(\xi_i')m(K_i') = \sum_{i=1}^{s} f\circ\pi(\xi_i)m(K_i') = \sum_{i=1}^{s} r_i f\circ\pi(\xi_i)m(K_i) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r_i} f\circ\pi(\xi_ih_{ij})m(K_i) = \sum (f\circ\pi, \delta, \eta)$.

1.10. Integración de productos.

TEOREMA 4. Sea G compacto. Si $\mathcal{C}$ es amplia, el producto de funciones R–$\mathcal{C}$–integrables es R–$\mathcal{C}$–integrable.

Según el teorema 2 debe demostrarse que si se cumple (1.7.1) para f y para g, también se cumple para fg. Se tiene

$$\begin{aligned} v(f(x)g(x) - f(y)g(y)) &= v(f(x)(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))g(y)) \\ &\geqslant \inf\{\inf\{v(f(x))\}, \inf\{v(g(y))\}\} \\ &\quad + \inf\{v(g(x) - g(y)), v(f(x) - f(y))\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $v(f(x) - f(y)) - w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y) > N$ y

$$v(g(x) - g(y)) - w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y) > N,$$

se tiene

$$v(f(x)g(x) - f(y)g(y)) - w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y) > N - \inf\{\inf\{v(f(x))\}, \inf\{v(g(y))\}\},$$

que demuestra el teorema puesto que la frontera inferior es constante.

1.11. Dos contraejemplos.

1.11.1. Se da un ejemplo de función $f \in L^{R,\mathcal{C}} - L^{R^*,\mathcal{C}}$ para un grupo G con una familia $\mathcal{C}$ no amplia. Se usará la notación $p[r] = p^{2^r}$. Sea

$$G = Z_p \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = \{p[r]Z_p\}_{r \geq 0}.$$

Sean $f_i' = p[i]\chi(\sum_{j=1}^{i-1} p[j] + p[i]Z_p), f_i'' = -p[i]\chi(\sum_{j=0}^{i-1} p[j] + p[i]Z_p)$. Entonces $f = \sum_{i=1}^{\infty} (f_i' + f_i'')$ cumple con la condición requerida porque

$$f \in L^{R,\mathcal{C}} \quad \text{y} \quad f \mid pZ_p \notin L^{R,\mathcal{C} \cap pZ_p}(pZ_p),$$

según se comprueba a continuación:

(a) $v(\sum (f, p[r]Z_p, \xi) - \sum (f, p[r]Z_p, \xi')) \geqslant \inf \{v(f(x)) - f(y)) \mid$ $x - y \in p(r)Z_p\} + v(p[r]Z_p) \geqslant 2^{r+1} - 2^r = 2^r$ que tiende a ∞ cuando $r \to \infty$.

(b) Sea $\Delta = \sum (f, p[r]Z_p, \xi) - (f, p[r+1]Z_p, \eta)$. Se tiene

$$\Delta = (p[r]f(\xi') - \textstyle\sum_{i=1}^{p[r]} f(\eta_i'))(p[r+1])^{-1} + (p[r]f(\xi'') - \sum_{i=1}^{p[r]} f(\eta_i''))$$
$$(p[r+1])^{-1}$$

donde $\xi' \in \sum_{j=1}^{r-1} p[j] + p[r]Z_p$ y los η_i' representan las distintas clases laterales izquierdas de $p[r+1]$ contenidas en $\sum_{j=1}^{r-1} p[j] + p[r]Z_p$, y análogamente para ξ'', η_i'' y $\sum_{j=0}^{r-1} p[j] + p[r]Z_p$. Por lo tanto, como $f(\xi') = \sum_{i=1}^{s'} p[i]$ y $\sum_{i=1}^{p[r]} f(\eta_i') = p[r]\sum_{j=1}^{r} p[j] + \sum_{j=r+1}^{t'} p[j]$, donde $s' \geqslant r$ y $t' > r$, se tiene

$$(p[r]f(\xi') f \textstyle\sum_{i=1}^{p[r]} f(\eta_i'))(p[r+1])^{-1}$$
$$= (p[r]\textstyle\sum_{i=r+1}^{s'} p[i] + \sum_{j=r+1}^{t'} p[j])(p[r+1])^{-1}$$

y análogamente,

$$(p[r]f(\xi'') - \textstyle\sum_{i=1}^{p[r]} f(\eta_i''))(p[r+1])^{-1}$$
$$= -(p[r]\textstyle\sum_{i=r+1}^{s''} p[i] + \sum_{j=r+1}^{t''} p[j])(p[r+1])^{-1},$$

de donde Δ es de forma $(\pm p[r]\sum_{i=s_1}^{s_2} p[i] \pm \sum_{j=t_1}^{t_2} p[j])(p[r+1])^{-1}$ con $s_1 > r$ y $t_1 > r$, lo que implica que $v(\Delta) \geqslant 2^r$. Se concluye de (a) y (b) que $f \in L^{R,\mathcal{C}}$.

(c) Si $\Delta_1 = \sum (f \mid pZ_p, p[r]Z_p, \xi) - (f \mid pZ_p, p[r+1]Z_p, \eta)$, es claro que $\Delta_1 = (p[r]\sum_{i=r+1}^{s''} p[i] + \sum_{j=r+1}^{t''} p[j])(p[r+1])^{-1}$, de donde $v(\Delta_1) = 0$ y $f \mid pZ_p \notin L^{R,\mathcal{C} \cap pZ_p}(pZ_p)$.

1.11.2. Se da un ejemplo de función $f \in L^{R^*,\mathcal{C}} - L^{R',\mathcal{C}}$. Considérense los mismos G y $\mathcal{C}$ de 1.11.1. Sean $f_i = p[i]\chi(\bigcup(j + p[i]Z_p))$, tomada la unión para $0 \leqslant j \leqslant p[i-1] - 1$, y sea $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$. Se ve fácilmente que $\sum (\sum_{j=1}^{i} f_j$, $p[i]Z_p, \xi_i) = \sum_{j=0}^{i-1} p[j]$ y que $v[\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j, p[i]Z_p, \xi_i] \geqslant p[i]$, de donde $\sum (f,$ $p[i]Z_p, \xi_i) = \sum_{j=0}^{i-1} p[j] + \Delta_i$, con $v(\Delta_i) \geqslant p[i]$ de donde se concluye que $f \in L^{R,\mathcal{C}}(G)$; por una repetición de este argumento para cada $\sigma_x f$ y cada $p^r Z_p$, se comprueba que $f \in L^{R^*,\mathcal{C}}$. Se observa, además, que, escogiendo los ξ_{ij} convenientemente, se puede tener $\sum (f, p[i]Z_p, \xi_i) = \sum_{j=0}^{i-1} p[j]$ para todo i.

Sea δ la partición formada por los trasladados de $p[i]Z_p$ diferentes de $p[i]Z_p$ y los trasladados de $p[i+1]Z_p$ contenidos en $p[i]Z_p$. Se tiene entonces una suma $\sum (f, \delta, \eta) = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} p[j]$, de donde $\sum (f, p[i]Z_p, \xi_i) - \sum (f, \delta, \eta) = -1$, lo que muestra que $f \notin L^{R', \mathfrak{C}}$.

1.12. Sobre familias $\mathfrak{C}$ amplias. Se da, en primer lugar, un ejemplo de una familia $\mathfrak{C}$ que no está contenida en ninguna familia amplia:

(a) Sea F_q el campo de q elementos y T_q el conjunto de las matrices triangulares inferiores inversibles de orden 2 con coeficientes en F_q. Entonces, T_q es subgrupo de $GL(2; F_q)$ de índice $q+1$ (puesto que T_q tiene $(q-1)^2 q$ elementos y $GL(2; F_q)$ tiene $(q-1)^2 q(q+1)$ elementos).

(b) Se demuestra que T_q es máximo. Sea

$$X = \begin{pmatrix} a & x \\ b & c \end{pmatrix} \in GL(2; F_q)$$

con $x \neq 0$, y sea G' el subgrupo generado por T_q y X. Se consideran varios casos:

(i) Si $ac \neq 0$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a & x \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-1}a^{-1}x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} zx^{-1} & 0 \\ -b(ac - bx) & a(ac - bx)^{-1} \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G' \quad \text{para todo } z.$$

Si $y \neq 0$, se tiene

$$\begin{pmatrix} y & u \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ v & w - y^{-1}uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} y & u \\ v & w \end{pmatrix} \in G'.$$

Usando, para $u \neq 0$, la igualdad

$$\begin{pmatrix} y & u \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & w^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - w^{-1}uv & 0 \\ v & w \end{pmatrix},$$

queda demostrado que $G' = GL(2; F_q)$.

(ii) Si $a = 0$ y $c = 0$. Entonces $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ b & 0 \end{pmatrix}$ y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x + b & x \end{pmatrix} \in G',$$

reduciéndose este caso al caso (i)

(iii) Si $a \neq 0$ y $c \neq 0$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -cx^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ b & 0 \end{pmatrix} \in G',$$

y este caso se reduce al (ii).

(iv) Si $a \neq 0$ y $c = 0$. Como en el caso anterior,

$$\begin{pmatrix} a & x \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ax^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ b & 0 \end{pmatrix} \in G'.$$

(c) Para cada potencia p^n del primo p existe un primo q con $p^n \mid q + 1$, puesto que en la progresión -1, $-1 + p^n$, $-1 + 2p^n$, $\cdots$, existen una infinidad de primos. Sea q_n un primo tal que $p^n \mid q_n + 1$; sea $G = \prod_{i=1} GL(2; F_{q_n})$ y sea la familia de subgroupos $K_n = \prod_{i=1}^{n} T_{q_n} \times \prod_{m>n} GL(2; F_{q_n})$. Es claro que cada K_{n+1} es subgrupo máximo de K_n y, por lo tanto, $\mathcal{C}$ no se puede extender, lo que, al ser $\mathcal{C}$ amplia, da el ejemplo buscado.

Finalmente se observa que, dado cualquier grupo G metrizable, se puede formar una familia $\mathcal{C}$ que sea amplia. En primer lugar, se toma un subgrupo compacto G' y una familia de subgrupos mormales de G' ordenados por inclusión. Entre cada dos elementos $K \supset K'$ de la familia consecutivos se intercalan subgrupos K_i de tal manera que, en la serie

$$K/K' = K_0/K' \supset K_1/K' \supset \cdots \supset K_n/K' = K'/K',$$

K_0/K' sea p-subgrupo de Sylow de K/K' y que $[K_{r+1}/K' : K_r/K'] = p$ para $r > 0$, con lo que se obtiene una familia amplia.

2. Integral de Lebesgue

Se conservan las mismas suposiciones de la sección anterior, pero se supone, además, que la familia $\mathcal{C}$ está totalmente ordenada por inclusión. Como entre dos elementos K y K' de $\mathcal{C}$ sólo puede haber un número finito de elementos de $\mathcal{C}$, cada $K \in \mathcal{C}$ contiene un $K' \in \mathcal{C}$ máximo (en $\mathcal{C}$) y es el máximo elemento de $\mathcal{C}$ contenido en un $K'' \in \mathcal{C}$, esto último con una posible excepción, si K contiene a todos los $K' \in \mathcal{C}$. En consecuencia, los elementos de $\mathcal{C}$ forman una sucesión $\{K_i\}$ estrictamente decreciente, con $-\infty < i < \infty$, o bien, $0 \leqslant i < \infty$.

Se supondrá, además, que

$$\lim_{i\to\infty} v(K_i) = -\infty.$$

2.1. Valuación de un conjunto.

Definición 1. Sea $A \subset G$. Se define, para $A \neq \emptyset$,

$$v^{\mathcal{C}}(A) = \sup\{v(K) \mid K \in \mathcal{C} \text{ y } AK = A\},$$

donde se conviene en que $\sup \emptyset = -\infty$. Se completa la definición con

$$v^{\mathcal{C}}(\emptyset) = v^{\mathcal{C}}(G) = \sup\{v(K) \mid K \in \mathcal{C}\}.$$

Es claro que la definición de $v^{\mathfrak{C}}(A)$ coincide, en el caso de $A = K$, con la definición de $v(K)$, y que si $A \neq \emptyset$, $v^{\mathfrak{C}}(A) = -\infty$ si y sólo si no existe $K \in \mathfrak{C}$ con $AK = A$.

La función $v^{\mathfrak{C}}$ depende de $\mathfrak{C}$, pero se suprimirá el índice superior y sólo se usará la notación completa $v^{\mathfrak{C}}$ cuando se trate con diferentes familias $\mathfrak{C}$.

Lema 1.
(a) $v(A \cup B) \geqslant \inf\{v(A), v(B)\}$,
(b) $v(A \cap B) \geqslant \inf\{v(A), v(B)\}$,
(c) $v(G - A) = v(A)$,
(d) $v(G) = v(\emptyset) = \sup_{K \in \mathfrak{C}}\{v(K)\}$.

Las demostraciones para $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$ son inmediatas. Se supondrá $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. (a) es inmediata porque, si $AK = A$ y $BK = B$, $(A \cup B)K = AK \cup BK = A \cup B$. Observando que $v(A) = \sup\{v(K) \mid K \in \mathfrak{C}$ y $(x \in A \Rightarrow xK \in A)\}$ y que $v(\emptyset) = v(G) \geqslant v(C)$ para todo C, se obtiene (b). Si $AK = A$, $(G - A)K \supset G - A$, de donde $v(G - A) \leqslant v(A)$ y, por simetría, se obtiene (c). Finalmente, es claro que $v(G) = \sup_{K \in \mathfrak{C}}\{v(K)\}$.

Por la observación hecha después de la definición, si $v(A) > -\infty$, A es abierto. En este caso, si A es acotado, se expresa como unión finita de discos ajenos y está definida $m(A)$, teniéndose

$$v(m(A)) \geqslant v(A).$$

2.2. Valuación de una función, G compacto.

Definición 2. Sea G compacto; sea $f: G \to P$. Para cada $a \in P$ y $r \geqslant v(a)$, se definen:

$$E_r(f, a) = \{x \mid v(f(x) - a) > r\},$$

$$v_r^{\mathfrak{C}}(f, a) = v^{\mathfrak{C}}(E_r(f, a)),$$

$$W_r^{\mathfrak{C}}(f) = \inf_a\{r + v^{\mathfrak{C}}(f, a) \mid E_r(f, a) \neq \emptyset\},$$

$$W^{\mathfrak{C}}(f) = \inf_r\{W_r^{\mathfrak{C}}(f)\}.$$

También se suprimirán los índices superiores $\mathfrak{C}$ en $v_r^{\mathfrak{C}}(f, a)$, $W_r^{\mathfrak{C}}(f)$ y $W^{\mathfrak{C}}(f)$. Se observa que v_r es una función decreciente de r, para a fija.

Es importante notar que

$$v(\{x \mid v(f(x)) > r\}) \geqslant \inf_a\{v_r(f, a)\};$$

efectivamente, porque si $\inf_a\{v_r(f, a)\} = M > -\infty$ existe, por la propiedad $v(K_i) \to -\infty$, un K_i con $v(K_i) = M$ y $E_r(f, a)K_i \subset E_r(f, a)$ para todo a (con $v(a) \leqslant r$), de donde $\{x \mid v(f(x)) > r\}K_i \subset \{x \mid v(f(x)) > r\}$ y

$$v_r(\{x \mid v(f(x)) > r\}) \geqslant M.$$

PROPOSICIÓN 1.

(a) $W(af) = v(a) + W(f)$,

(b) $W(f + g) \geqslant \inf \{W(f), W(g)\}$.

$E_r(af, b) = E_{r-v(a)}(f, a^{-1}b)$, lo que implica que $v_r(af, b) = v_{r-v(a)}(f, a^{-1}b)$, y $r + v_r(af, b) = v(a) + (r - v(a)) + v_{r-v(a)}(f, a^{-1}b)$, lo que implica $W_r(f) = v(a) + W_{r-v(a)}(f)$ para todo r, de donde se obtiene (a).

Se tiene $E_r(f + g, a) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, donde $E_1 = \bigcup (E_r(f, b) \cap E_r(g, c))$, tomada la unión sobre todas las intersecciones tales que $v(b + c - a) > r$,

$E_2 = E_r(f, a) \cap \{x \mid v(g(x)) > r\}$, y

$E_3 = \{x \mid v(f(x)) > r\} \cap E_r(g, a)$, de donde

$$v_r(f + g, a) \geqslant \inf \{\inf \{v_r(f, b)\}, \inf \{v_r(g, c)\}\},$$

de donde

$$W_r(f + g) \geqslant \inf \{W_r(f), W_r(g)\},$$

que implica (b).

PROPOSICIÓN 2. Si $W(f) > -\infty$, f es continua.

Sea $x \in G$ con $f(x) \neq 0$ y sea $N \geqslant v(f(x))$. Entonces

$$v_N(f, f(x)) \geqslant w(f) - N > -\infty,$$

y $E_N(f, f(x))$ es abierto, de donde f es continua en x. Si $f(y) = 0$,

$$f(\{x \mid v(f(y)) > N\}) \geqslant \inf \{v_N(f, a)\} \geqslant W(f) - N > -\infty$$

y f es continua en y.

2.3. La integral de Lebesgue en el caso compacto. Se supone G compacto, con $v(G) = \gamma$.

PROPOSICIÓN 3.

$$\inf \{v(f(x)) \mid x \in G\}$$
$$= \inf \{r \mid \text{existe a con } v(a) \leqslant r \text{ y } E_r(f, a) \neq \emptyset\} \geqslant W(f) - \gamma.$$

COROLARIO 1. $W(f) = \infty \Leftrightarrow \quad f = 0$.

El corolario es evidente. La igualdad de la proposición es inmediata. Por último, $v_r(f, a) \leqslant \gamma$, de donde $r + v_r(f, a) \leqslant r + \gamma$, de donde

$$W(f) \leqslant \inf \{r \mid \text{existe } a \text{ con } v(a) \leqslant r \text{ y } E_r(f, a) \neq \emptyset\} + \gamma,$$

de donde la proposición.

DEFINICIÓN 3. Se dirá que f es l-$\mathfrak{C}$-integrable, o que $f \in L^{l,\mathfrak{C}}(G)$, si $W(f) > -\infty$ y $\lim_{r\to\infty} W_r(f) = \infty$.

Observación:

$$f \in L^{l,\mathfrak{C}} \Leftrightarrow f \text{ es continua y } \lim_{r\to\infty} W_r(f) = \infty.$$

Ya se ha visto la implicación de izquierda a derecha. A la inversa, si f es continua, todo $E_r(f, a)$ es abierto y, siendo G compacto, f es acotada, de donde, como el conjunto $R_0 = \{r \mid W_r(f) \leqslant 0 \text{ y } r \geqslant \inf \{v(f(x)) \mid x \in G\}\}$ es finito, el conjuncto $\{r + v_r(f, a) \mid r \in R_0 \text{ y } E_r(f, a) \neq \emptyset\}$ es acotado, de donde $W(f) > -\infty$.

Teorema 1. El espacio $L^{l,\mathfrak{C}}$ es un espacio vectorial valuado completo separado (con la valuación W). Contiene las funciones características $\chi(D)$ de discos $D \in \tilde{\mathfrak{C}}$, que forman un conjunto total en $L^{l,\mathfrak{C}}$. Se tiene $W(\chi(D)) = v(D)$. Además, $L^{l,\mathfrak{C}}$ consta de functiones continuas y su aplicación idéntica (inclusión) en el espacio de las funciones continuas con la topología de la convergencia uniforme es una aplicación continua.

La Proposición 1 y el Corolario 1 muestran que $L^{l,\mathfrak{C}}$ es espacio vectorial valuado separado. Se demuestra que es completo:

Sean $f_i \in L^{l,\mathfrak{C}}$, $(i = 1, 2, \cdots)$, con $\lim_{i\to\infty} W(f_i) = \infty$. Entonces $\sum_i f_i$ converge uniformemente a una función f (según la Proposición 3). Se demuestra primero que $f \in L^{l,\mathfrak{C}}$. Sea N; sea S_1 tal que $i > S_1 \Rightarrow W(f_i) > N$; sea S_2 tal que $(r > S_2 \text{ y } 1 \leqslant i \leqslant S_1) \Rightarrow W_r(f_i) > N$. Entonces, para cada

$$r > \sup \{S_1, S_2\},$$

existe S_3 con $i > S_3 \Rightarrow \inf \{v(f_i(x)) \mid x \in G\} > r$, y se tiene

$$E_r(f, a) = E_r(\textstyle\sum_{i=1}^{S_3} f_i, a)$$

y $W_r(f, a) = W_r(\sum_{i=1}^{S_3} f_i, a) \geqslant \inf \{W_r(f_i, a) \mid 1 \leqslant i \leqslant S_3\} \geqslant N$, lo que demuestra que $\lim_{r\to\infty} W_r(f) = \infty$. Por otra parte, para cada r existe S tal que $i > S \Rightarrow \inf \{v(f_i(x)) \mid x \in G\} > r$, de donde $E_r(f, a) = E_r(\sum_{i=1}^{S} f_i, a)$ y $W_r(f, a) = W_r(\sum_{i=1}^{S} f_i, a) \geqslant \inf \{W_r(f_i, a) \mid 1 \leqslant i \leqslant S\} \geqslant \inf W_r(f_i, a) \geqslant \inf \{W(f_i, a)\}$, de donde

$$W(f, a) \geqslant \inf \{W(f_i, a)\}, \tag{2.3.1}$$

que demuestra que $f \in L^{l,\mathfrak{C}}$.

Se demuestra ahora que $\sum f_i$ converge en $L^{l,\mathfrak{C}}$ a f. Del mismo modo que se ha demostrado que $f \in L^{l,\mathfrak{C}}$ y que se cumple (2.3.1), puede demostrarse que cada $\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i \in L^{l,\mathfrak{C}}$ y que $W(\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i, a) \geqslant \inf \{W(f_i, a) \mid i > n\}$, de donde es inmediato lo que se quiere demostrar.

Se comprueba sin ninguna dificultad que $\chi(D) \in L^{l,\mathfrak{C}}$ y que $W(\chi(D)) = v(D)$, esto último porque cada $E_r(\chi(D), a)$ es D ó bien $\emptyset$, por lo que, en cualquier caso $v(\chi(D), a) \geqslant v(D)$ y, como $r \geqslant 0$, si $E_r(\chi(D), a) \neq \emptyset$ se tiene $W_r(\chi(D)) \geqslant v(D)$; finalmente como $W_0(\chi(D)) = 0 + v_0(\chi(D), 1) = v(D)$, se tiene $W(\chi(D)) = v(D)$.

Sea ahora cualquier $f \in L^{l,\mathfrak{C}}$ y sea N; quiere demostrarse que existe $g =$

$\sum_{i=1}^{n} a_i\chi(D_i)$ tal que $W(f - g) > N$. Sea r_0 tal que $r \geqslant r_0 \Rightarrow W_r(f) > N$. Es claro que cada $E_{r_0}(f, a) \neq \emptyset$ puede expresarse como unión finita de discos: $E_{r_0}(f, a) = \bigcup_i x_{ai}K_a$. Sea $f_0 = \sum_a \sum_i f(x_{ai})\chi(x_{ai}K_a)$, donde la suma se toma sobre una colección completa mínima de representantes a de las clases de $P/\mathfrak{I}_{r_0}(\mathfrak{I}_{r_0} = \{b \in P \mid v(b) > r_0\})$. Esa suma debe ser finita porque, en caso contrario, se tendrían una infinidad de puntos $x_i \in G$ con $v(f(x_i) - f(x_j)) \leqslant r_0$ para $i \neq j$ y, habiendo un punto de acumulación, esto contradiría la continuidad de f. Falta ahora demostrar que $W(f - f_0) \geqslant N$, no habiendo problema para $W_r(f - f_0)$ si $r \leqslant r_0$ porque, en este caso, $E_r(f - f_0, a) = \emptyset$. Sea $r > r_0$; entonces $E_r(f - f_0, a)$ puede expresarse como unión de intersecciones

$$E_r(f, b) \cap E_r(f_0, c)$$

y conjuntos $E_r(f, d)$ y, como cada $E_r(f_0, c)$ es igual a algún $E_{r_0}(f_0, c) = E_{r_0}(f, c)$, se tiene, según el Lema 1, $v_r(f - f_0, a) \geqslant \inf\{\inf\{v_r(f, b)\}, \inf\{v_{r_0}(f, b)\}\}$ y $r + v_r(f - f_0, a) \geqslant \inf\{W_r(f), r - r_0 + W_{r_0}(f)\} > N$, de donde

$$W_r(f - f_0) > N$$

para todo r, y $W(f - f_0) > N$.

Ya se ha visto que toda $f \in L^{l,\mathfrak{C}}$ es continua. La Proposición 3 muestra que, si $\sum_i f_i$ converge en $L^{l,\mathfrak{C}}$, la serie $\sum f_i$ es uniformemente convergente, lo que termina la demostración del teorema.

Proposición 4. Si $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\chi(D_i)$, con $\lim_{i\to\infty}(v(a_i) + v(D_i)) = \infty$, entonces $f \in L^{l,\mathfrak{C}}$ y $W(f) \geqslant \sup\{\inf\{v(a_i) + v(D_i)\}\}$, donde la frontera superior se toma sobre todos los posibles a_i, D_i con las propiedades anteriores.

Como $W(a_i\chi(D_i)) = v(a_i) + W(\chi(D_i)) = v(a_i) + v(D_i)$, se tiene

$$W(a_i\chi(D_i)) \to \infty,$$

por lo que $\sum_i a_i\chi(D_i)$ converge en L, a alguna función $f' \in L^{l,\mathfrak{C}}$. Como, según el Teorema 1, debe converger uniformemente a esa función, y puesto que converge uniformemente a f (porque $v(D_i) \leqslant \gamma$), se tiene $f = f' \in L^{l,\mathfrak{C}}$.

Además, $W(f) \geqslant \inf\{W(a_i\chi(D_i))\}$, lo que implica la segunda parte de la proposición.

Definición 4. Sea f continua, con $W(f) > -\infty$. Se llamará suma de Lebesgue de orden r a una suma de la forma

$$L(f, r, a_i) = \sum_i a_i m(E_r(f, a_i)),$$

donde los a_i describen un sistema completo mínimo de representantes de las clases de P módulo $\mathfrak{I}_r$.

Por ser f acotada, cada suma es finita.

Teorema 2. Si $f \in L^{l,\mathfrak{C}}$, las sumas de Lebesgue convergen cuando $r \to \infty$; el límite se denotará por $\int^{l,\mathfrak{C}} f$. La función $\int^{l,\mathfrak{C}}$ es una forma lineal continua sobre $L^{l,\mathfrak{C}}$. Se tiene $\int^{l,\mathfrak{C}} \chi(D) = m(D)$, para $D \in \tilde{\mathfrak{C}}$, y $v(\int^{l,\mathfrak{C}} f) \geqslant W(f)$.

Si $\{a_{\delta,k}\}$, $(\delta \geqslant 0)$, es una colección de representantes módulo $\mathcal{G}_{r+\delta}$ y si a_{δ,i_j} son los representantes que cumplen con $E_{r+\delta}(f, a_{\delta,i_j}) \subset E_r(f, a_i)$, esto es, con $v(a_{\delta,i_j} - a_i) > r$, la diferencia entre dos sumas, correspondientes a $\{a_i\}$ y $\{a_{\delta,k}\}$, es una suma de términos $(a_{\delta,i_j} - a_i)m(E_{r+\delta}(f, a_{\delta,i_j}))$, y el valor v de la diferencia es $>r + v_{r+\delta}(f, a_{\delta,i_j}) > W_{r+\delta}(f) - \delta$. Si existe un valor de v que sea $\leqslant \delta$, entonces dadas dos sumas $L(f, r, a_i)$ y $L(f, s, b_i)$ con $s \geqslant r$, siempre existen sumas $L(f, r_j, a_{ji})$ con $r_{j+1} - r_j \leqslant \delta$ y $r = r_0 \leqslant r_1 \leqslant \cdots \leqslant r_t = s$, de donde, por comparaciones sucesivas, se obtiene que, para cada δ con esa propiedad,

$$\begin{aligned} v(L(f, r, a_i) - L(f, s, b_i)) &\geqslant \inf\{W_{r+k\delta}(f) \mid k = 0, 1, 2, \cdots\} - \delta \\ &\geqslant \inf\{W_t(f) \mid t \geqslant r\} - \delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si v no es discreta, para $s \geqslant r$ se cumple

$$v(L(f, r, a_i) - L(f, s, b_i)) \geqslant \inf\{W_t(f) \mid t \geqslant r\}. \tag{2.3.2}$$

Por otra parte, si v es discreta, puede tomarse $\delta = 1$ en el razonamiento anterior y se tiene $v(L(f, r, a_i) - L(f, s, b_i)) > W_{r+1}(f) - 1$, de donde, para $s \geqslant r$,

$$v(L(f, r, a_i) - L(f, s, b_i)) \geqslant W_{r+1}(f). \tag{2.3.3}$$

De (2.3.2) y (2.3.3) se concluye la convergencia de las sumas. Pero, además, se concluye que, para cualesquiera r y s,

$$v(L(f, r, a_i) - L(f, s, b_i)) \geqslant W(f). \tag{2.3.4}$$

Si se toma $r = \inf\{v(f(x)) \mid x \in G\}$, se tiene $v(L(f, r, a_i)) \geqslant \inf\{r + v(f, a_i)\} \geqslant W(f)$, lo que, junto con (2.3.4) implica que $v(\int^{l,\mathfrak{C}} f) \geqslant W(f)$.

Se comprueba fácilmente que $\chi(D) \in L^{l,\mathfrak{C}}$ y que $\int^{l,\mathfrak{C}} \chi(D) = m(D)$. Se demuestra que $\sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i) \in L^{l,\mathfrak{C}}$ y que $\int^{l,\mathfrak{C}} \sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i) = \sum_{i=1}^n a_i m(D_i)$: Sea K tal que, si $xK \cap D_i \neq \emptyset$, $xK \subset D_i$, y sean $x_{j_i}K$ los diferentes trasladados izquierdos de K contenidos en D_i; entonces

$$\sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j_i} a_i\chi(x_{j_i}K) = \sum_{j=1}^m a_j'\chi(D_j'),$$

donde los D_j' son trasladados de K, y a_j' es la suma de los a_i tales que $D_i \supset D_j'$, y es claro que $\sum_{i=1}^n a_i m(D_i) = \sum_{j=1}^m a_j' m(D_j')$. Falta sólo demostrar que $\sum_{j=1}^m a_j'\chi(D_j') \in L^{l,\mathfrak{C}}$ y que $\int^{l,\mathfrak{C}} \sum_{j=1}^m a_j'\chi(D_j') = \sum_{j=1}^m a_j' m(D_j')$. Lo primero es cierto porque la función es continua y cada $v_r(\sum_{j=1}^m a_j'\chi(D_j'), a) \geqslant v(K)$; la igualdad es verdadera porque, para cada $r \geqslant \inf\{v(a_j' - a_k') \mid a_j' \neq a_k'\}$, existe una suma de Lebesgue $L(\sum_{j=1}^m a_j'\chi(D_j'), r, b_i)$ que es igual a

$$\sum_{j=1}^m a_j' m(D_j'),$$

puesto que la función es constante sobre cada E_r.

Es claro que $\int^{l,\mathfrak{C}}$ es continua, porque $V(\int^{l,\mathfrak{C}} f) \geqslant W(f)$. Por esto y por la linealidad de $\int^{l,\mathfrak{C}}$ en el subespacio de combinaciones lineales finitas de funciones $\chi(D)$ se concluye que $\int^{l,\mathfrak{C}}$ es lineal, lo que concluye la demostración del teorema.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$, es inmediato que $v^{\mathcal{C}'} \geqslant v^{\mathcal{C}}$. Las dos valuaciones pueden ser diferentes. Sea, por ejemplo, $G = Z_p$ y $P = Q_p$, y sean $\mathcal{C}' = \{p^r Z_p\}$ y $\mathcal{C} = \{p^{r^2} Z_p\}$; entonces $v^{\mathcal{C}'}(p^{r^2+1} Z_p) = (r^2 + 1)$ y

$$v^{\mathcal{C}}(p^{r^2+1} Z_p) = -(r+1)^2 = -(r^2+1) - 2r.$$

De $v^{\mathcal{C}'} \geqslant v^{\mathcal{C}}$ se concluye inmediatamente que $W_r^{\mathcal{C}'} \geqslant W_r^{\mathcal{C}}$ para cada r, de donde $L^{l,\mathcal{C}'} \supset L^{l,\mathcal{C}}$. Se puede dar el caso de la inclusión propia, si

$$\lim_{r\to\infty} W_r^{\mathcal{C}'}(f) = \infty$$

y no existe $\lim_{r\to\infty} W_r^{\mathcal{C}}(f)$. En el mismo ejemplo anterior,

$$f = \sum_{r=0}^{\infty} p^{r^2+r} \chi(p^{r^2+1} Z_p)$$

está en $L^{l,\mathcal{C}'}$ y no está en $L^{l,\mathcal{C}}$.

Se observa que la inclusión entre los espacios L relativos a $\mathcal{C}$ y a $\mathcal{C}'$ es en sentido inverso que en el caso de la R-integración.

Finalmente, si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, con $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ son amplias, $v^{\mathcal{C}'} - v^{\mathcal{C}}$ es acotada y $L^{l,\mathcal{C}'} = L^{l,\mathcal{C}}$.

2.4. Traslaciones. Se supone G compacto. Las traslaciones izquierdas no varían la función v en conjuntos, porque transforman discos en discos. En consecuencia, el espacio $L^{l,\mathcal{C}}$ es invariante por traslaciones izquierdas de sus funciones y es inmediato comprobar que $\int^{l,\mathcal{C}}$ también es invariante.

De manera parecida a como se han tratado las traslaciones derechas en el inciso 1.3, pueden tratarse en el caso de la l-$\mathcal{C}$-integración, y se obtienen los resultados análogos.

2.5. l-$\mathcal{C}$-integración y R-$\mathcal{C}$-integración. En este inciso se sigue suponiendo que G es compacto.

PROPOSICIÓN 5. Sea $\mathcal{C}$ amplia. Entonces $L^{R,\mathcal{C}} \subset L^{l,\mathcal{C}}$.

Se supone primero que v no es acotada en G. Sea $f \in L^{R,\mathcal{C}}$; se tiene que

$$\lim_{x\to y} [v(f(x) - f(y)) - w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y)] = \infty.$$

Sea N; existe K tal que $x^{-1}y \in K \Rightarrow v(f(x) - f(y)) > N + w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y)$. Sea cualquier $s \geqslant N - v(K)$; existen K' y K'' con $K'' \subset K' \subset K$ y

$$v(K') - v(K'') \leqslant \beta$$

tales que $N - v(K') \leqslant s \leqslant N - v(K'')$, de donde

$$x^{-1}y \in K'' \Rightarrow v(f(x) - f(y)) > N + w_{\mathcal{C}}(x^{-1}y) \geqslant N - v(K'') \geqslant s,$$

de donde $v_s(f, a) \geqslant v(K'')$, y $s + v_s(f, a) \geqslant N - v(K') + v(K'') \geqslant N - \beta$, que demuestra que $\lim_{s\to\infty} W_s(f) = \infty$. Observando que f es continua, se obtiene que $f \in L^{l,\mathcal{C}}$.

Si v es acotada en G, $L^{R,\mathcal{C}}$ y $L^{l,\mathcal{C}}$ son el espacio de las funciones continuas.

PROPOSICIÓN 6. Si $f \in L^{R,\mathcal{C}} \cap L^{l,\mathcal{C}}$, entonces $\int^{R,\mathcal{C}} f = \int^{l,\mathcal{C}} f$.

Se tiene $\int^{l,\mathcal{C}} f = \lim_{r\to\infty} L(f, r, a) = \lim_{r\to\infty} \sum_i a_i m(E_r(f, a_i))$. Para $r = 1, 2, \cdots$ se obtienen K_r tales que $E_r(f, a_i)K_r = E_r(f, a_i)$ y

$$v(K_r) = \inf \{v_r(f, a_i) \mid r \text{ fija}\},$$

implicando esto último que $r + v(K_r) \to \infty$. Entonces $E_r(f, a_i) = \bigcup_j \xi_{ij} K_r$ y se tiene $\int^{l,\mathcal{C}} f = \lim_{r\to\infty} [\sum_i \sum_j (a_i - f(\xi_{ij}))m(K_r) + \sum_i \sum_j f(\xi_{ij}) m(K_r)]$. Como $v(a_i - f(\xi_{ij})) > r$ y $r + v(K_r) \to \infty$,

$$\int^{l,\mathcal{C}} f = \lim_{r\to\infty} \sum_i \sum_j f(\xi_{ij}) m(K_r),$$

que es límite de sumas de Riemann donde cada ξ_{ij} se toma arbitrariamente en su clase y es, por lo tanto, igual a $\int^{R,\mathcal{C}} f$.

2.6. l-$\mathcal{C} \cap K$-integrabilidad de $f \mid K$. Se supone G compacto. Sea $K \in \mathcal{C}$ fijo. Se tiene $E_r(f \mid K, a) = E_r(f, a) \cap K$, de donde $v_r(f \mid K, a) \geqslant \inf \{v_r(f, a), v(K)\}$ y $W_r(f \mid K) \geqslant \inf \{W_r(f), r + v(K)\}$. Si $f \in L^{l,\mathcal{C}}$, la última desigualdad implica que $W_r(f \mid K) \to \infty$ cuando $r \to \infty$. Como f es continua, $f \mid K$ también lo es y, según la observación de 2.3, resulta que $f \mid K \in L^{l,\mathcal{C}\cap K}(K)$. Se tiene, además:

PROPOSICIÓN 7. $f \in L^{l,\mathcal{C}}(G)$ si y sólo si, para todo $K \in \mathcal{C}$ y toda clase xK, $(\sigma_x f) \mid K \in L^{l,\mathcal{C}\cap K}(K)$, cumpliéndose entonces

$$\int^{l,\mathcal{C}} f = \sum_i \int_k^{l,\mathcal{C}} \sigma_{x_i} f$$

donde los x_i describen un sistema mínimo de representantes de las clases xK.

Basta comprobar que $(\sigma_x f) \mid K \in L^{l,\mathcal{C}\cap K}(K) \Rightarrow (\sigma_x f) \mid K \in L^{l,\mathcal{C}}(G)$, o, suponiendo que $x = e$ y que f se anula fuera de K, basta demostrar que

$$f \in L^{l,\mathcal{C}\cap K}(K) \Rightarrow f \in L^{l,\mathcal{C}}(G).$$

Pero esto es claro puesto que $v_r^{\mathcal{C}}(f, a) = \sup \{v(K') \mid E_r(f, a)K' = E_r(f, a)\} = \sup \{v(K' \cap K) \mid E_r(f, a)(K' \cap K) = E_r(f, a)\}$, puesto que, si $E_r(f, a)K' = E_r(f, a)$, $K' \subset K$, y la última frontera superior es $v_r^{\mathcal{C}\cap K}(f, a)$.

2.7. La integral de Lebesgue en el caso no compacto. Sea $G_0 = \bigcup_{K\in\mathcal{C}} K$. Se recuerda que los elementos de $\mathcal{C}$ forman una sucesión $\{K_i\}$, con $K_i \supset K_{i+1}$.

DEFINICIÓN 5. Supóngase que $G = G_0$. Se dirá que f es l–$\mathcal{C}$–integrable, o que $f \in L^{l,\mathcal{C}}(G_0)$, si cada $f \mid K \in L^{l,\mathcal{C}\cap K}(K)$ y $\lim_{i\to-\infty} W(f \mid K_i - K_{i+1}) = \infty$. En este caso se define

$$W(f) = \lim_{i\to-\infty} W(f \mid K_i);$$

$$\int^{l,\mathcal{C}} f = \lim_{i\to-\infty} \int_{K_i}^{l,\mathcal{C}} f.$$

DEFINICIÓN 5′. Se dirá que $f \in L^{l,\mathcal{C}}(G)$ si cada $(\sigma_x f) \mid G_0$ está en $L^{l,\mathcal{C}}(G_0)$ y

$\lim_{\alpha \in A} W((\sigma_{x_\alpha} f) \mid G_0) = \infty$, entendiéndose por esto que si $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una colección completa mínima de representantes de la clases xG_0, para cada N sólo existe un número finito de índices $\alpha \in A$ con $W((\sigma_x f) \mid G_0) \leqslant N$. En este caso se definen

$$W(f) = \inf W((\sigma_x f) \mid G_0);$$
$$\int^{l,\mathfrak{C}} f = \sum_\alpha \int_{G_0}^{l,\mathfrak{C}} \sigma_{x_\alpha} f.$$

Teorema 3. $L^{l,\mathfrak{C}}$ es un espacio vectorial valuado (con la valuación W) completo. Contiene las funciones características de discos, que forman un conjunto total en $L^{l,\mathfrak{C}}$. La función $\int^{l,\mathfrak{C}}$ es lineal continua, y se tiene $v(\int^{l,\mathfrak{C}} f) \geqslant W(f)$.

(a) Se supone primero que $G = G_0$ y que $G_0 \notin \mathfrak{C}$. Si G_0 fuera compacto, no habría nada que demostrar. Sean f y g en $L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$; entonces $\lim_{i \to -\infty} W((f+g) \mid K_i - K_{i+1}) = \infty$ y

$$\lim_{i \to -\infty} W(af \mid K_i - K_{i+1}) = \infty,$$

de donde $f+g$ y af están en $L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$. Además,

$$W(f+g) = \lim_{i \to -\infty} W((f+g) \mid K_i) \geqslant \lim_{i \to -\infty} \inf \{W(f \mid K_i), W(g \mid K_i)\}$$
$$= \inf \{W(f), W(g)\}$$

y, análogamente, $W(af) = v(a) + W(f)$, lo que demuestra que $L^{l,\mathfrak{C}}$ es espacio vectorial valuado. Es claro que $L^{l,\mathfrak{C}}$ contiene a cada $\chi(D)$, puesto que cada $D \in \tilde{\mathfrak{C}}$ está contenido en algún K_i. Sea cualquier $f \in L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$ y sea N; sea K_r tal que $W(f \mid K_r - f) > N$. Como existe una función

$$g = \sum_{i=1}^n a_i \chi(D_i) \in L^{l,\mathfrak{C}}(K_r) \subset L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$$

tal que $W(f \mid K_r - g) > N$, resulta que las funciones características de discos forman un conjunto total en $L^{l,\mathfrak{C}}$. Como $\int^{l,\mathfrak{C}} f = \lim_{i \to -\infty} \int_{K_i}^{l,\mathfrak{C}} f$ y

$$v(\int_{K_i}^{l,\mathfrak{C}} f) \geqslant W(f \mid K_i),$$

se tiene $v(\int^{l,\mathfrak{C}} f) \geqslant W(f)$, $\int^{l,\mathfrak{C}}$ es continua, y es lineal, porque $\int^{l,\mathfrak{C}} (f+g) = \lim_{i \to -\infty} \int_{K_i}^{l,\mathfrak{C}} (f+g) = \lim_{i \to -\infty} \int_{K_i}^{l,\mathfrak{C}} f + \lim_{i \to -\infty} \int_{K_i}^{l,\mathfrak{C}} g$.

Se demuestra que $L^{l,\mathfrak{C}}$ es completo. Sean $f_j \in L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$ con $\lim_{j \to \infty} W(f_j) = \infty$.

(a.1) Supóngase primero que v es acotada superiormente en G_0, esto es, que existe V con $v(K_i) \leqslant V$ para todo i. Supóngase que $v(K_{s+i}) = v(K_s)$ para todo $i \leqslant 0$, y sea $V = v(K_s)$. Se observa que $v_r(f, a) \leqslant V$ para cualquier función f, de donde $v_r(f \mid K_s, a) = v(E_r(f, a) \cap K_s) \geqslant \inf \{v_r(f, a), V\} = v_r(f, a)$ y, del mismo modo, $v_r(f \mid K_{s+i}, a) \geqslant v_r(f, a)$ para $i \leqslant 0$; por lo tanto,

$$W(f \mid K_{s+i}) \geqslant W(f)$$

y $W(f \mid K_{s+i} - K_{s+i+1}) \geqslant W(f)$, para $i \leqslant 0$. Se aplica esta observación a las funciones f_j. Según se ha visto en el caso compacto,

$$g_s = \sum_{j=1}^\infty f_j \mid K_s \in L^{l,\mathfrak{C}}(K_s),$$

y $\sum_j f_j \mid K_s$ converge uniformemente a g_s. Del mismo modo, para $i < 0$,

$$g_{s+i} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \mid K_{s+i} - K_{s+i+1} \in L^{l,\mathfrak{C}}(K_{s+i})$$

y $\sum_j f_j \mid K_{s+i} - K_{s+i+1}$ converge uniformemente a g_{s+i}. Se tiene, además, $W(g_s) \geqslant \inf W(f_j \mid K_s)$ y $W(g_{s+i}) \geqslant \inf_j W(f_j \mid K_{s+i} - K_{s+i+1})$. Sea $g = \sum_{-i=0}^{\infty} g_{s+i} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$. Sea N y sea j_0 tal que $j \geqslant j_0 \Rightarrow W(f_i) > N$. Sea $i_0 < 0$ tal que $(i \leqslant i_0$ y $j < j_0) \Rightarrow W(f_j \mid K_{s+i} - K_{s+i+1}) > N$. Entonces, para $i \leqslant i_0$, se tiene

$$W(g \mid K_{s+i} - K_{s+i+1}) = W(g_{s+i}) \geqslant \inf \{\inf \{W(f_j \mid K_{s+i} - K_{s+i+1}) \mid j \geqslant j_0\},$$
$$\inf \{W(f_j \mid K_{s+i} - K_{s+i+1}) \mid j < j_0\}\} \geqslant \inf \{N, N\} = N,$$

lo que demuestra que $g \in L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$. Además,

$$W(g) = \lim_{n\to\infty} W(\sum_{-i=0}^{n} g_{s+i}) \geqslant \lim_{n\to\infty} \inf_i \{W(f_j \mid K_{s-n})\} = \inf_j \{W(f_j)\}.$$

Del mismo modo se demuestra que $\sum_{j=t}^{\infty} f_j \in L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$ y que

$$W(\sum_{j=t}^{\infty} f_j) \geqslant \inf \{W(f_j) \mid j \geqslant t\},$$

lo que demuestra que $\sum_j f_j$ converge en $L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$ a la función g.

(a.2) Se supone ahora que v no es acotada superiormente en G_0. Entonces $v(K_i) \longrightarrow \infty$ cuando $i \longrightarrow -\infty$, y $\chi(G_0) \in L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$, teniéndose $W(\chi(G_0)) = \infty$. Sean $f_i' = f_j - f_j(e)\chi(G_0)$. Debe demostrarse solamente que $\sum_j f_i'$ es convergente en $L^{l,\mathfrak{C}}$. Se observa que, si la función f se anula en e, debe tenerse, para cualquier $E_r(f, a) \neq \emptyset$, que, si $E_r(f, a) \cap K_i \neq \emptyset$, entonces $v_r(f, a) \leqslant v(K_i)$. Por lo tanto, $v_r(f \mid K_i, a) = v(E_r(f, a) \cap K_i) \geqslant v_r(f, a)$, de donde $W(f \mid K_i) \geqslant W(f)$, y, también $W(f \mid K_i - K_{i+1}) \geqslant W(f)$. Aplicando este resultado a las funciones f_j', la demostración se termina como en el caso anterior.

Conviene destacar algunas consecuencias. De (a.1) se obtiene:

(1) Si v es acotada superiormente en G_0 y si $\{\sum_{j=1}^{n} f_j\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$, entonces $\sum_j f_j$ converge uniformemente a una función $f \in L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$, teniéndose $\inf \{v(\sum_{j=t}^{\infty} f_j(x))\} \geqslant \inf \{W(f_j) \mid j \geqslant t\} - V$; además, $\sum_j f_j$ converge a f como sucesión de $L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$.

La uniformidad de la convergencia es debida a que, para cada $i \leqslant 0$, y cada t,

$$\inf \{v(\sum_{j=t}^{\infty} f_j(x)) \mid x \in K_{s+i}\} \geqslant W(\sum_{j=t}^{\infty} f_j) - V$$
$$\geqslant \inf \{W(f_j) \mid j \geqslant t\} - V.$$

De (a.2) se obtiene:

(2) Si $\{\sum_{j=1}^{n} f_j'\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$ y $f_j'(e) = 0$ para todo j, entonces $\sum_j f_j'$ converge a una función $f \in L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$ para todo valor $x \in G_0$, y $\sum_j f_j'$ converge a f como sucesión de $L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$.

Como consecuencia de (a.2) se tiene también:

(3) Si $\{\sum_{j=1}^{n} f_j\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$, existen g_j con $W(g_j) = \infty$ tales que cada $f_j + g_j$ se anula en e.

Se prosigue con la demostración:

(b) Se supone que $G \neq G_0$, donde G_0 puede ser compacto. Es inmediato que $L^{l,\mathcal{C}}(G)$ es espacio vectorial valuado que contiene las funciones características de discos y que $\int^{l,\mathcal{C}}$ es lineal y continua y cumple con $v(\int^{l,\mathcal{C}} f) \geqslant W(f)$. Sea cualquier $f \in L^{l,\mathcal{C}}$; dado N, existen α_i, $(1 \leqslant i \leqslant s)$, tales que

$$W(f \mid \textstyle\bigcup_{i=1}^{s} x_{\alpha_i} G_0 - f) > N;$$

existen g_i que son combinaciones lineales finitas de funciones $\chi(D)$ tales que $W(f \mid x_{\alpha_i} G_0 - g_i) > N$. Por lo tanto, $W(f \mid \bigcup_{i=1}^{s} x_{\alpha_i} G_0 - \sum_{i=1}^{s} g_i) > N$, que demuestra que el conjunto de las combinaciones lineales finitas de funciones $\chi(D)$ es denso en $L^{l,\mathcal{C}}$.

Finalmente, se demuestra que $L^{l,\mathcal{C}}(G)$ es completo. Sean $f_i \in L^{l,\mathcal{C}}$, con $\lim_{i \to \infty} W(f_i) = \infty$. Para cada α se tiene $\lim_{i \to \infty} W(f_i \mid x_\alpha G_0) = \infty$ y existen, por lo tanto, f_α tales que $\sum_i f_i \mid x_\alpha G_0$ converge en $L^{l,\mathcal{C}}$ a f_α, teniéndose $W(f_\alpha) = \lim_{n \to \infty} W(\sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_\alpha G_0) \geqslant \inf_i W(f_i \mid x_\alpha G_0)$. Sea S tal que $i \geqslant S \Rightarrow W(f_i) > N$. Entonces $i \geqslant S \Rightarrow W(f_i \mid x_\alpha G_0) > N$ para todo α, y existe, por lo tanto, solamente un número finito de índices α para los cuales $W(f_\alpha) \leqslant N$, de donde $f = \sum_\alpha f_\alpha \in L^{l,\mathcal{C}}(G)$. Se demuestra que $\sum_i f_i$ converge a f en $L^{l,\mathcal{C}}$ por un procedimiento análogo al usado en (a), lo que termina la demostración del teorema.

Se da el ejemplo de una función f, para G no compacto, que está en $L^{R,\mathcal{C}}$ y no está en $L^{l,\mathcal{C}}$. Sea $G = P = Q_p$ y $\mathcal{C} = \{p^r Z_p\}_{r \in Z}$. Sean $f_0'' = \chi(Z_p - pZ_p)$, $f_i''(x) = 0$ si $x \notin p^{-i} Z_p - p^{-i+1} Z_p$, $f_i''(ap^{-i} + x) = f_{i-1}''(x)$, $(1 \leqslant a \leqslant p-1)$; sean $f_i' = \sum_{j=0}^{i} f_j''$; sean $f_i(x) = 0$ si $x \notin p^{-i} + p^{-i+1} Z_p$, $f_i(p^{-i} + x) = f_{i-1}'(x)$. La función $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ está en $L^{R,\mathcal{C}}$ y no está en $L^{l,\mathcal{C}}$.

Se demuestran varias proposiciones complementarias:

Proposición 8. Si v es acotada superiormente, $L^{l,\mathcal{C}}(G)$ es separado y su inclusión en el espacio de las funciones continuas con la topología de la convergencia uniforme es una función continua.

Es consecuencia de la observación (1) de este inciso y de la definición 5'.

Proposición 9. Si $\{\sum_{j=1}^{n} f_j\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^{l,\mathcal{C}}(G)$, existen g_j con $W(g_j) = \infty$ tales que la sucesión $\{\sum_{j=1}^{n} (f_j + g_j)\}$ converge a una función $f \in L^{l,\mathcal{C}}(G)$ para cada $x \in G$, y converge a la misma función f como sucesión en $L^{l,\mathcal{C}}(G)$.

En el caso de v acotada superiormente, la proposición es consecuencia inmediata de la Proposición 8 y del hecho de que $L^{l,\mathcal{C}}$ es completo. Se supone que v no es acotada superiormente. Según las observaciones (2) y (3) de este inciso, para cada x_α existen $g_{\alpha j}$ que se anulan fuera de $x_\alpha G_0$ tales que

$$\{\textstyle\sum_{j=1}^{n} (\sigma_{x_\alpha} f_j + \sigma_{x_\alpha} g_{\alpha j})\}$$

converge a una función $\sigma_{x_\alpha} f_\alpha$, que se anula fuera de G_0, en cada punto, y como sucesión de $L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$. Según la Definición 5′, las funciones $g_j = \sum_{\alpha\in A} g_{\alpha j}$ y $f = \sum_{\alpha\in A} f_j$ cumplen las condiciones de la proposición.

Proposición 10. Si v no es acotada superiormente en G, cada f con $W(f) = \infty$ se puede expresar como $f = \sum_{\alpha\in A} a_\alpha\chi(x_\alpha G_0)$.

Según la Definición 5′, basta demostrar que, si $f \in L^{l,\mathfrak{C}}(G_0)$, $f = a\chi(G_0)$, lo que equivale a demostrar, puesto que $W(a\chi(G_0)) = \infty$, que si $f(e) = 0$ y $W(f) = \infty$, entonces $f = 0$. Esto es cierto, porque, según se ha observado en (a.2), si $f(e) = 0$, $W(f \mid K_i) \geqslant W(f) = \infty$ para todo i, lo que implica que f se anula en cada K_i.

Proposición 11. Si $\{\sum_{j=1}^n f_j\}$ es una sucesión de Cauchy de $L^{l,\mathfrak{C}}(G)$ que converge en x, entonces converge en todo punto de xG_0.

Basta demostrarlo para $x = e$, y puede suponerse que $G = G_0$. Es claro que, si $g_j = -f_j(e)\chi(G_0)$ y $f'_j = f_j + g_j$, la sucesión $\{\sum_{j=1}^n f_j\}$ converge en x' si y sólo si $\{\sum_{j=1}^n f'_j\}$ converge en x'. Además, $f'_j(e) = 0$. Según (a.2) es claro que $\{\sum_{j=1}^n f'_j\}$ converge en x'.

2.8. l-$\mathfrak{C}$-integración de productos.

Proposición 12. Sea G compacto. Si f y g están en $L^{l,\mathfrak{C}}$, entonces $fg \in L^{l,\mathfrak{C}}$, y se tiene $W(fg) \geqslant \inf\{W(f) + V_2, W(g) + V_1\}$, donde $V_1 = \inf\{v(f(x))\}$ y $V_2 = \inf\{v(g(x))\}$.

Sea $x \in E_r(fg, a)$. Se tiene que $E_r(fg, a) \supset E_{r-v(g(x))}(f, f(x)) \cap E_{r-v(f(x))}(g, g(x))$, y $E_r(fg, a)$ puede expresarse como unión de intersecciones de este tipo, de donde $v_r(fg, a) \geqslant \inf\{\inf_x\{v_{r-v(g(x))}(f, f(x))\}, \inf_x\{v_{r-v(f(x))}(g, g(x))\}\}$, de donde $W_r(fg) \geqslant \inf\{\inf\{W_{r+s}(f) \mid s \geqslant -V_2\} + V_2,$

$$\inf\{W_{r+s}(g) \mid s \geqslant -V_1\} + V_1\},$$

lo que demuestra que $fg \in L^{l,\mathfrak{C}}$ y que $W(fg) \geqslant \inf\{W(f) + V_2, W(g) + V_1\}$.

Corolario 2. Si f y g están en $L^{l,\mathfrak{C}}(G)$ y son acotadas, entonces $fg \in L^{l,\mathfrak{C}}(G)$.

Corolario 3. Si v es acotada en G, el producto de funciones l–$\mathfrak{C}$–integrables es l–$\mathfrak{C}$–integrable.

Definición 6. Se dirá que $A \subset G$ es integrable si $\chi(A) \in L^{l,\mathfrak{C}}(G)$.

Proposición 13. Si A y B son integrables, $A \cap B$ y $A \cup B$ también lo son, y se cumple

$$\int^{l,\mathfrak{C}} \chi(A) + \int^{l,\mathfrak{C}} \chi(B) = \int^{l,\mathfrak{C}} \chi(A \cup B) + \int^{l,\mathfrak{C}} \chi(A \cap B).$$

$A \cap B$ es integrable porque $\chi(A \cap B) = \chi(A)\circ\chi(B)$. Entonces,

$$\chi(A - A \cap B) = \chi(A) - \chi(A \cap B) \in L^{l,\mathfrak{C}}$$

y $\chi(A \cup B) = \chi(A - A \cap B) + \chi(B) \in L^{l,\mathfrak{C}}$, cumpliéndose

$$\int^{l,\mathcal{C}} \chi(A \cup B) = \int^{l,\mathcal{C}} \chi(A - A \cap B) + \int^{l,\mathcal{C}} \chi(B)$$
$$= \int^{l,\mathcal{C}} \chi(A) - \int^{l,\mathcal{C}} \chi(A \cap B) + \int^{l,\mathcal{C}} \chi(B).$$

No se cumple, en general, que si f^2 y g^2 están en $L^{l,\mathcal{C}}$, $fg \in L^{l,\mathcal{C}}$. Sea $G = Z_p$, $P = Q_p$. Como $\chi(Z_p) \in L^{l,\mathcal{C}}(Z_p)$, el cumplimiento de esa afirmación implicaría que, si $f^2 \in L^{l,\mathcal{C}}(Z_p)$, también $f \in L^{l,\mathcal{C}}(Z_p)$, pero esto no es así, como se comprueba con el ejemplo, ya usado, donde

$$f_i(x) = \begin{cases} p^{2i} \text{ si } x \in p^i + p^{3i}Z_p \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}.$$

y $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$, para el cual $f^2 \in L^{l,\mathcal{C}}(Z_p)$ y $f \notin L^{l,\mathcal{C}}(Z_p)$.

También se puede construir A integrable y $f \in L^{l,\mathcal{C}}$ tales que $f \mid A \notin L^{l,\mathcal{C}}$. Sea, por ejemplo, para $G = P = Q_p$, $f = \sum_{r=1}^{\infty} p^{-r+\lambda_r}\chi(p^{-r}Z_p - p^{-r+1}Z_p)$, con $\lambda_r > 1$, $\lambda_r \to \infty$ y $r - \lambda_r \to \infty$; y sea $A = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_r$, con $D_r \subset p^{-r}Z_p - p^{-r+1}Z_p$ y $v(D_r) = r - \lambda_r$. Se comprueba que $f \mid A \notin L^{l,\mathcal{C}}$, siendo $f \in L^{l,\mathcal{C}}$.

3. Un tratamiento axiomático.

3.1. La condición (A). En esta sección se conservan las hipótesis generales de la Sección 1, pero en toda la sección se hará siempre la siguiente hipótesis adicional:

(A) Para cada $K \in \mathcal{C}$ existe $\lambda(K)$ tal que

$$K'' \not\supset K' \supset K \Rightarrow v(K' \cap K'') \geqslant v(K'') - \lambda(K).$$

Una manera equivalente de expresar la condición (A) es la siguiente: Para cada $K \in \mathcal{C}$ existe $\lambda(K)$ tal que

$$(K' \supset K \;\&\; v(K' \cap K'') < v(K'') - \lambda(K)) \Rightarrow K'' \supset K'. \qquad (3.1.1)$$

Un caso particular se obtiene para $K' = K$:

$$v(K \cap K'') < v(K'') - \lambda(K) \Rightarrow K'' \supset K. \qquad (3.1.2)$$

Una consecuencia de (A) a través de (3.1.1), es que si v no es acotada superiormente, la familia $\mathcal{C}$ es filtrante. Efectivamente, sean K' y K_0' elementos de $\mathcal{C}$, y sea $K = K' \cap K_0'$; sea K'' tal que $v(K') < v(K'') - \lambda(K)$ y $v(K_0') < v(K'') - \lambda(K)$. Se tiene entonces $v(K' \cap K'') \leqslant v(K') < v(K'') - \lambda(K)$, y análogamente para K_0', de donde $K'' \supset K'$ y $K'' \supset K_0'$.

Por lo tanto, existe el subgrupo $G_0 = \bigcup_{K \in \mathcal{C}} K$.

Se observa también que, si $\mathcal{C}$ es totalmente ordenada, se cumple (A) con $\lambda(K) = 0$.

Tamién se cumple (A) si v es acotada, con $\lambda = 2V$ si $|v(K)| \leqslant V$ para todo $K \in \mathcal{C}$.

Por último, si G es compacto se cumple (A). Porque $(K'':K \cap K'')m(K) \leqslant m(G)$, de donde $(K'':K'' \cap K) \leqslant m(G)/m(K)$, lo que implica que $v(K'') - v(K \cap K'')$ es acotado por el mínimo r tal que $p^r \geqslant m(G)/m(K)$, si $v(p) \neq 0$, y por 0 si no existe p con $v(p) \neq 0$, lo que implica (3.1.2); y además

$$(K'':K'' \cap K') \leqslant m(G)/m(K'),$$

que implica que $v(K'') - v(K' \cap K'')$ es acotado por una cota menor que la anterior, lo que implica (3.1.1).

3.2. El espacio $L^{\mathfrak{C}}$. Se sobreentenderá siempre que las afirmaciones y definiciones son relativas a una familia $\mathfrak{C}$.

Definición 1. Se dirá que f admite una expresión normal si se puede expresar como $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\chi(D_i)$ con $\lim_{i\to\infty} (v(a_i) + v(D_i)) = \infty$. Una expresión tal de f se llamará normal.

Lema 1. Si v es acotada superiormente en G (si $v(K) \leqslant V$ para todo $K \in \mathfrak{C}$) y $f = \sum_i a_i\chi(D_i)$ en expresión normal, entonces $\lim_{i\to\infty} v(a_i) = \infty$.

Es inmediato

Definición 2. Se define el espacio vectorial L, con la valuación W, de este modo:

(i) L es el espacio de las funciones que admiten una expresión normal;
(ii) $W(f) = \sup \{\inf \{v(a_i) + v(D_i)\} \mid f = \sum_i a_i\chi(D_i) \text{ (normal)}\}$.

Más adelante se demostrará que la valuación W es igual a la W definida en la Sección 2; pero para evitar confusiones, se denotará de momento esta última por W^l.

Lema 2. Si v es acotada superiormente, $\inf \{v(f(x)) \mid x \in G\} \geqslant W(f) - V$, donde $V \geqslant v(K)$ para todo K.

Porque $\inf \{v(f(x)) \mid x \in G\} \geqslant \inf \{v(a_i)\} \geqslant \inf \{v(a_i) + v(D_i)\} - V$ para cada expresión normal de f, y para cada $\epsilon > 0$ puede encontrarse una tal expresión con $\inf \{v(a_i) + v(D_i)\} \geqslant W(f) - \epsilon$.

Lema 3. Si $W(f) = \infty$, f es constante en cada xG_0.

Sea N; se demuestra que $v(f(x) - f(e)) > N$ para todo $x \in G_0$. Sea $x \in K$; sea $f = \sum_i a_i\chi(D_i)$ (normal) tal que $\inf \{v(a_i) + v(D_i)\} > N + v(K) + \lambda(K)$. Para todo i con $v(a_i) \leqslant N$ se tiene $v(D_i) > v(K) + \lambda(K)$ de donde, según (A), si $D_i \ni x$, $D_i \supset K \ni e$, lo que implica que $v(f(x) - f(e)) > N$.

Se enuncian y demuestran una serie de proposiciones:

Proposición 1. Toda $f \in L$ es continua.

Sea $x \in G$ y sea N. Sea $\{i_j\}$ el conjunto de índices tales que

$$D_{i_j} \ni x \qquad \text{y} \qquad v(a_{i_j}) \leqslant N;$$

y sea $D' = \bigcap_j D_{i_j}$. Sea $\{i_k\}$ el conjunto de índices tales que $D_{i_k} \not\ni x$, $D_{i_k} \cap D' \neq \emptyset$ y $v(a_{i_k}) \leqslant N$. Como $\lim_{k\to\infty} [v(a_{i_k}) + v(D_{i_k})] = \infty$ y $v(a_{i_k}) \leqslant N$, $\lim_{k\to\infty} v(D_{i_k}) =$

∞, de donde, como $D_{i_k} \not\supset D'$, según (A) el conjunto $\{i_k\}$ debe ser finito. Existe entonces $D \subset D'$ con $D \cap D_{i_k} = \emptyset$ y entonces, para todo $y \in D$,

$$v(f(x) - f(y)) > N.$$

Proposición 2. Si $f \in L$, $f \mid D \in L$ para todo $D \in \tilde{\mathfrak{C}}$.

Sea $\{i_j\}$ el conjunto de índices tales que $D_{i_j} \supset D$. Entonces $\lim_{j\to\infty} v(a_{i_j}) = \infty$, de donde $\sum_j a_{i_j}\chi(D_{i_j}) \in L$. Sea $\{i_k\}$ el conjunto de índices tales que

$$D_{i_k} \cap D \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad D_{i_k} \not\supset D.$$

Entonces, según (A), $v(D_{i_k} \cap D) \geqslant v(D) - \lambda(D)$, de donde

$$\lim_{k\to\infty} (v(a_{i_k}) + v(D_{i_k} \cap D)) = \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_k a_{i_k}\chi(D_{i_k} \cap D) \in L.$$

Por lo tanto, $f \mid D = \sum_j a_{i_j}\chi(D_{i_j}) + \sum_k a_{i_k}\chi(D_{i_k} \cap D) \in L$.

Proposición 3. El conjunto de las combinaciones lineales finitas de funciones $\chi(D)$ es denso en L.

Para cada N existe S tal que $i > S \Rightarrow v(a_i m(D_i)) > N$. Por lo tanto,

$$W(f - \textstyle\sum_{i=1}^{S} a_i\chi(D_i)) = W(\sum_{i=S+1}^{\infty} a_i\chi(D_i)) > N.$$

Proposición 4. $L \cap L^{R,\mathfrak{C}}$ es denso en L.

Puesto que cada $\sum_{j=1}^{n} a_j\chi(D_j) \in L^{R,\mathfrak{C}}$ y el conjunto de estas funciones es denso en L.

Proposición 5. Si v es acotada superiormente, L es separado. (De donde, si G es compacto, L es separado.)

Si $W(f) = \infty$, por el Lema 2 se tiene $\inf\{v(f(x)) \mid x \in G\} = \infty$, de donde $f = 0$.

Proposición 6. Toda f con $V(f) = \infty$ se puede expresar como

$$f = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i\chi(x_iG_0)$$

(v no acotada superiormente).

Sean x_i tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} x_iG_0 \supset \{x \mid f(x) \neq 0\}$. Sea $f' = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\chi(x_iG_0)$. Entonces $f - f'$ se anula en cada x_i lo que implica, según el Lema 3, que $f = f'$.

Proposición 7. Si $f \in L$, $f \mid A \in L$ siempre que $W(\chi(A)) = 0$.

Según la Proposición 6, $\chi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi(x_iG_0)$. Si $D_i \cap A \neq \emptyset$, existe j tal que $D_i \cap x_jG_0 \neq \emptyset$. Si $x \in D_i$, $K = x^{-1}D_i \subset G_0 = x^{-1}x_jG_0$, de donde

$$D_i \subset x_jG_0 \subset A.$$

Por lo tanto, $f \mid A = \sum_j a_{i_j}\chi(D_{i_j})$, donde $\{i_j\}$ es conjunto de índices tales que $D_{i_j} \cap A \neq \emptyset$, de donde $f \mid A \in L$.

PROPOSICIÓN 8. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en L, existen $f'_n \in L$ con $W(f'_n) = \infty$ y $f \in L$ tales que $f(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) + f'_n(x))$ para todo $x \in G$, y $f \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W} f_n$. (Por lo tanto, si v es acotada superiormente, $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f \in L$ tal que $f \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W} f_n$.)

Se supone primero que v no es acotada superiormente. Sean x_i tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} x_i G_0 \supset \{x \mid f_n(x) \neq 0 \text{ para algún } n\}$. Sean $f'_n = -\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x_i)\chi(x_i G_0)$, que cumplen con $W(f'_n) = \infty$ y $\lim_{n\to\infty}^{L-W} (f_n + f'_n) \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W} (f_n)$. Entonces $\{f_n + f'_n\}$ converge en cada x_i. Se demuestra que si $x \in x_i G_0$, $\{f_n + f'_n\}$ converge en x. Sean $g_1 = f_1 + f'_1$, $g_n = (f_n + f'_n) - (f'_{n-1} - f'_n)$, para $n > 1$. Se demuestra, por ejemplo, que si $\lim_{n\to\infty} W(g_n) = \infty$ y $\{\sum_{i=1}^{n} g_i\}$ es convergente en e, es convergente en cualquier $x \in G_0$. Supóngase que no existe $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$; sean S y un conjunto de índices $\{i_j\}$ tales que $v(g_{i_j}(x)) \leqslant S$; sea K tal que $x \in K$ y supóngase que para todo i_j, $W(g_{i_j}) > S + v(K) + \lambda(K) + \epsilon$. Para cada $\epsilon > 0$ deben existir expresiones normales $g_{i_j} = \sum_k a'_{j_k}\chi(D'_{j_k})$ con

$$\inf\{v(a'_{j_k}) + v(D'_{j_k})\} > W(g_{i_j}) - \epsilon,$$

y en cada expresión normal se tiene que $v(a'_{j_k}) \leqslant S \Rightarrow v(D'_{j_k}) > W(g_{i_j}) - \epsilon - v(a'_{j_k}) > S + v(K) + \lambda(K) - v(a'_{j_k}) \geqslant v(K) + \lambda(K)$, que implica, según (A), que si $v(a'_{j_k}) \leqslant S$ y $D'_{j_k} \ni x$, entonces $D'_{j_k} \ni e$, demostrándose igualmente que si $v(a'_{j_k}) \leqslant S$ y $D'_{j_k} \ni e$, $D'_{j_k} \ni x$. Por lo tanto, $v(g_{i_j}(x) - g_{i_j}(e)) > S$, contra la hipótesis de que existe $\sum_i g_i(e)$.

En conclusión, $\{f_n - f'_n\}$ es convergente en cada punto de G.

Si v es acotada superiormente, $\{f_n\}$ es uniformemente convergente, según el Lema 2, y se tomarán $f'_n = 0$.

Sea $f = \lim_{n\to\infty} (f_n + f'_n)$. Es claro que f se puede expresar en forma normal, de donde $f \in L$, y además, $W(f) \geqslant \inf\{W(f_n)\}$. Del mismo modo, cada

$$f - (f_n + f'_n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} g_i \in L \qquad \text{y} \qquad W(f - (f_n + f'_n)) \to \infty,$$

de donde $f \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W} (f_n + f'_n)$.

PROPOSICIÓN 9. Si $f \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W} f_n$, existen $f'_n \in L$ con $W(f'_n) = \infty$ tales que $f(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) + f'_n(x))$ para todo x. (De donde, si G es compacto, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo x.)

En la demostración anterior se han encontrado f'_n con $W(f'_n) = \infty$ tales que $f' = \lim_{n\to\infty} (f_n + f'_n) \in L$ para todo x y $f' \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W} f_n$. Por lo tanto,

$$W(f - f') = \infty$$

y, poniendo $f'_1 + f - f'$ en lugar de f'_1, se termina la demostración.

TEOREMA 1. El espacio L, con la valuación W, es el único que cumple con el siguiente sistema de axiomas, que son independientes:

I. L es P-espacio vectorial valuado completo.

II. L contiene toda $\chi(D)$, y $W(\chi(D)) \geqslant v(D)$.

III. Si la sucesión $\{f_n\} \subset L$ es convergente en L y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ para todo x, entonces $g \in L$ y $g \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W} f_n$.

IV. Si L y W cumplen con I, II y III y L' y W' cumplen con las condiciones correspondientes, y si $L' \subset L$ y $W'(f) \leqslant W(f)$ para toda $f \in L'$, entonces $L' = L$ y $W' = W$.

(a) Se demuestra que el espacio L cumple con I–IV.

(a.I) Es claro que L es P-espacio vectorial valuado. La condición de ser completo es consecuencia de la Proposición 8.

(a.II) Es inmediata.

(a.III) Se usa la Proposición 9. Como $\{f_n\}$ es convergente para todo x, lo mismo sucede con $\{f'_n\}$. Sea $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ para todo x. Se tiene que $f' \in L$, porque, como $W(f'_n) = \infty$ para todo n, f' se puede expresar en forma normal. Por lo tanto, $f - f' \in L$ y es claro que $\{f_n\}$ converge a $f - f'$ para todo x y que $f - f' \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W} f_n$, puesto que $W(f') = \infty$.

(a.IV) Si $f = \sum_i a_i\chi(D_i)$ (normal), por II se tiene que

$$\lim_{i\to\infty} W'(a_i\chi(D_i)) = \infty$$

y por I se tiene que $\{\sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i)\}$ es convergente en L', de donde, según III, $\sum_i a_i\chi(D_i) \in L'$, esto es, $L' = L$. Debe entonces demostrarse solamente que, si se substituye W por otra valuación W' tal que $W'(f) \leqslant W(f)$ y que cumpla las condiciones I–III, entonces $W'(f) = W(f)$ para toda $f \in L$. Sea

$$f = \sum_i a_i\chi(D_i) \in L,$$

en expresión normal. Si $W'(f) < \inf\{v(a_i) + v(D_i)\}$, la sucesión

$$\{\sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i) - f\}$$

sería convergente en (L, W'), por ser suma de sucesiones convergentes, teniéndose $W'(\sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i) - f) = W'(f)$ para todo n, y existiría $g \in L$ con $W'(g) = W'(f)$ y $g \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W'} (\sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i) - f)$. Pero como $W' \leqslant W$, se tendría $g \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W} (\sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i) - f)$ y $W(g) = \lim_{n\to\infty} W(\sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i) - f) = \infty$, y, por la Proposición 6, $W'(g) = \infty \neq W'(f)$, lo que da una contradicción.

(b) Se demuestra la unicidad. Sea L', W', otro sistema que cumple con I–IV. Si $f = \sum_i a_i\chi(D_i)$ (normal), según II se cumple $\lim_{i\to\infty} W'(a_i\chi(D_i)) = \infty$ y, según I, la sucesión $\{\sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i)\}$ es convergente en (L', W'), de donde, según III, $f \in L'$. Se tiene pues, $L \subset L'$. Se demuestra ahora que, para toda $f \in L$, $W(f) \leqslant W'(f)$, lo que demuestra, según IV, que $L = L'$ y $W = W'$. Efectivamente, se tiene $f \sim \lim_{n\to\infty}^{L',W'} \sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i)$; entonces

$$W'(f) = \lim_{n\to\infty} W'(\sum_{i=1}^n a_i\chi(D_i)) \geqslant \inf\{v(a_i) + v(D_i)\}$$

para cada expresión normal, de donde $W'(f) \geqslant W(f)$.

(c) Se demuestra la independencia de los axiomas.

(c.IV) Sea $\varphi \notin L$ (por ejemplo, $\varphi = \chi(x)$, donde $x \in G$). Sea $F = P\varphi$.

Sea $L' = L + F$ y $W'(f, a\varphi) = W(f)$. Se comprueba fácilmente que L' y V' cumplen con I, II y III pero no con IV.

(c.III) En este caso y los siguientes no será necesario ocuparse de la condición IV porque se tratará de construir sistemas que no cumplan alguna de las tres primeras condiciones, con lo cual se cumple la IV por no cumplirse su hipótesis.

Si en el sistema L, V, se substituye alguna $f \in L$ por una función $\varphi \notin L$, definiendo $V(\varphi) = V(f)$, el nuevo sistema cumple con I y II, sin cumplir III.

(c.II) Sea D. Es claro que $L' = \{a\chi(D) \mid a \in P\}$, con $W'(\chi(D)) = v(D)$ cumple con I y III, sin cumplir II.

(c.I) Sea G compacto. Según la Proposición 9,

$$f \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W} f_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

para todo x. Sea L' el subespacio de L formado por las combinaciones lineales finitas de funciones $\chi(D)$. El sistema L', W, deja de cumplir I, se sigue cumpliendo II, y se cumple III porque, si $f \in L - L'$ y si $f \sim \lim_{n\to\infty}^{L-W} f_n$ en el espacio original, $\{f_n\}$ deja de ser convergente en el nuevo espacio.

3.3. $\mathfrak{C}$-integración.

Definición 3. Se llamará integral ($\mathfrak{C}$-integral) a una forma lineal continua en L, que se representará por $\int^{\mathfrak{C}}$, tal que $\int^{\mathfrak{C}} \chi(D) = m(D)$.

Corolario 1. Si existe una integral, es única.

Proposición 10. Si existe una integral, se cumple $v(\int^{\mathfrak{C}} f) \geqslant W(f)$.

Porque, por linealidad y continuidad, $\int^{\mathfrak{C}} \sum_{i=1}^{\infty} a_i\chi(D_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i m(D_i)$, de donde $v(\int^{\mathfrak{C}} f) \geqslant \inf\{v(a_i) + v(D_i)\}$ para cada expresión normal de f.

Lema 4. Existe la integración si y sólo si se cumple la siguiente condición:

(Int). Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\chi(D_i)$ es una expresión normal de la función cero, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i m(D_i) = 0$.

La necesidad es consecuencia de la linealidad y continuidad de $\int^{\mathfrak{C}}$. Recíprocamente, si se cumple (Int), es inmediato que la forma $\int^{\mathfrak{C}} \sum_{i=1}^{\infty} a_i'\chi(D_i') = \sum_{i=1}^{\infty} a_i' m(D_i')$ está bien definida en L y es lineal y continua.

3.4. Integración local.

Definición 4. Se dirá que existe una $\mathfrak{C}$-integral local si, para cada $K \in \mathfrak{C}$. con $\mathfrak{C}_K = \{K' \in \mathfrak{C} \mid K' \subset K\}$, existe una $\mathfrak{C}_K$-integral sobre el espacio $L^{\mathfrak{C}_K}(K)$. Esto equivale a que, para cada K, se cumpla la condición (Int) con la hipótesis adicional de que todos los D_i estén en K.

Teorema 2. Existe una integral si y sólo si existe una integral local.

Supóngase que existe la integral. Sea $\sum_i a_i\chi(D_i) = 0$ (normal), con $D_i \subset K$. Es claro que $\sum_i a_i m(D_i) = 0$, luego existe la integral local.

Supóngase, recíprocamente, que existe la integral local. Se consideran dos casos.

(a) Supóngase que W es acotada superiormente ($v(K) \leqslant V$ para todo $K \in \mathcal{C}$). Sea $0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\chi(D_i)$ (normal) y sea cualquier $K \in \mathcal{C}$. Por (A), $v(K \cap D_i) \geqslant v(D_i) - \lambda(K)$ ó bien

$$v(K \cap D_i) = v(K) = v(D_i) - (v(D_i) - v(K)) \geqslant v(D_i) - V;$$

se cumple, pues, $v(K \cap D_i) \geqslant v(D_i) - \sup\{\lambda(K), V\}$, de donde, si D_j' son trasladados de K y $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j' \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$,

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_i a_i m(D_i) &= \sum\nolimits_i a_i \sum\nolimits_j m(D_j' \cap D_i)\\ &= \sum\nolimits_j \sum\nolimits_i a_i m(D_j' \cap D_i) = 0.\end{aligned}$$

(b) Supóngase que W no es acotada superiormente. Sea la misma expresión de cero, y sean x_j tales que $\bigcup_{j=1}^{\infty} x_jG_0 \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$. Si $D_i \cap x_jG_0 \neq \emptyset$, $D_i \subset x_jG_0$ y se tiene $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$, donde $f_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\chi(D_{j_k})$, siendo $\{j_k\}$ la colección de índices para los cuales $D_{j_k} \subset x_jG_0$. Debe demostrarse que $\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} m(D_{j_k}) = 0$ para cada j. Para simplificar la notación puede suponerse que, desde un principio, $D_i \subset G_0$ para todo i. Sea K_0 cualquiera. Sea S tal que

$$i > S \Rightarrow v(a_i) + v(D_i) > N$$

y tal que ($i > S$ y $D_i \supset K_0$) $\Rightarrow v(a_i) > N$. Sea K tal que $K \supset \bigcup_{i=1}^{S} D_i$ y $K \supset K_0$. Si $D_i \cap K \neq \emptyset$ y $D_i \not\supset K$, quiere decir que

$$v(D_i \cap K) \geqslant v(D_i) - \lambda(K_0),$$

y entonces se tiene $a_i\chi(D_i) = \sum_{j=1}^{r} a_i\chi(D_i \cap D_j')$, donde $\{D_j'\}$ es la familia de los trasladados de K, cumpliéndose que $v(a_i) + v(D_i \cap D_j') \geqslant v(a_i) + v(D_i) - \lambda(K_0) \geqslant N - \lambda(K_0)$; si $D_i \supset K$, $a_i\chi(D_i) = \sum_{j=1}^{t} a_i\chi(D_j'')$, con $v(a_i) + v(D_j'') \geqslant v(a_i) + v(K_0) \geqslant N + v(K_0)$, siendo los D_j'' trasladados de K. Por lo tanto se puede expresar f como $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^*\chi(D_i) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{**}\chi(D_i^{**})$, donde $D_i^* \subset G_0 - K$, $v(a_i^*) + v(D_i^*) \geqslant N - \sup\{\lambda(K_0), -v(K_0)\}$, y $D_i^{**} \subset K$, siendo las dos sumas expresiones normales. Como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{**}\chi(D_i^{**}) = 0$, se tiene

$$\sum\nolimits_i a_i\chi(D_i) = \sum\nolimits_i a_i^*\chi(D_i^*),$$

de donde $v(\sum_{i=1}^{\infty} a_i m(D_i)) \geqslant N - \sup\{\lambda(K_0), -v(K_0)\}$ para todo N, de donde $\sum_i a_i m(D_i) = 0$.

3.5. Una condición suficiente.

Proposición 11. Sea G compacto. Si existe λ tal que, para toda colección finita $\{K_i\} \subset \mathcal{C}$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, se cumple

$$v(\bigcap\nolimits_{i=1}^{n} K_i) \geqslant \inf\{v(K_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} - \lambda$$

entonces se cumple la condición (Int).

Sea $0 = \sum_i a_i\chi(D_i)$ (normal). Necesariamente, $\lim_{i\to\infty} v(a_i) = \infty$; supóngase que $v(a_{i+1}) \geqslant v(a_i)$ y que $a_i \neq 0$ para todo i. Sea $f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi(D_i)$; se tiene $v(f_n(x)) \geqslant v(a_{n+1})$ para todo $x \in G$. Sea D_i trasladado de K_i y sea

$$K'_n = \bigcap_{i=1}^{n} K_i .$$

Sean $D_{n1}, \cdots, D_{nt}$ los trasladados de K'_n. Si $D_{nj} \cap D_i \neq \emptyset$, con $i \leqslant n$, entonces $D_i \supset D_{nj}$. Por lo tanto, f_n es constante sobre cada D_{nj}, con un valor que se representará por $f_n(D_{nj})$. Como $v(f_n(x)) \geqslant v(a_{n+1})$, se tiene

$$v(f_n(D_{nj})m(D_{nj})) \geqslant v(a_{n+1}) + v(K_n)$$

y, puesto que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i m(D_i) = \sum_{j=1}^{t} f_n(D_{nj})m(D_{nj}) + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i m(D_i)$, se tiene $v(\sum_{i=1}^{\infty} a_i m(D_i)) \geqslant \inf\{v(a_{n+1}) + v(K'_n), \inf\{v(a_i m(D_i)) \mid i > n\}\}$. Como $\inf\{v(a_i) + v(D_i) \mid i > n\} \to \infty$, para demostrar que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i m(D_i) = 0$, basta demostrar que $\lim_{n\to\infty} (v(a_{n+1}) + v(K'_n)) = \infty$. Se tiene, según la hipótesis, que

$$\begin{aligned} v(K'_n) &\geqslant \inf\{v(D_i) \mid i \leqslant n\} - \lambda \\ &= \inf\{\inf\{v(D_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant s\}, \inf\{v(D_i) \mid s < i \leqslant n\}\} - \lambda. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \inf\{v(D_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant s\} &\geqslant \inf\{v(a_i) + v(D_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant s\} - v(a_s) \\ &\geqslant \inf\{v(a_i) + v(D_i)\} - v(a_s) = k - v(a_s), \end{aligned}$$

donde k es constante; además,

$$\inf\{v(D_i) \mid s < i \leqslant n\} \geqslant \inf\{v(a_i m(D_i)) \mid i > s\} - v(a_n),$$

de donde

$$\begin{aligned} v(a_{n+1}) + v(K'_n) &\geqslant v(a_{n+1}) \\ &\quad + \inf\{k - v(a_s), \inf\{v(a_i) + v(D_i) \mid i > s\} - v(a_n)\} \\ &\geqslant \inf\{k + v(a_{n+1}) - v(a_s), \inf\{v(a_i) + v(D_i) \mid i > s\}\}. \end{aligned}$$

Dado N, sea s_0 tal que $\inf\{v(a_i) + v(D_i) \mid i > s_0\} > N$, y sea n_0 tal que

$$v(a_{n+1}) - v(a_{s_0}) > N - k$$

para todo $n \geqslant n_0$. Entonces, para $n \geqslant n_0$, $v(a_{n+1}) + v(K'_n) > N$, como se quería demostrar.

3.6. Integración y R-integración, G compacto. En este inciso se supondrá que G es compacto.

Proposición 12. Si $\mathfrak{C}$ es amplia, $L^{R,\mathfrak{C}} \subset L$. Además, si existe la $\mathfrak{C}$-integral, se tiene $\int^{\mathfrak{C}} = \int^{R,\mathfrak{C}}$.

Sea $f \in L^{R,\mathfrak{C}}$. Sea una sucesión $\{K_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} v(\Sigma(f, K_n, \xi_n) - \textstyle\int^{R,\mathfrak{C}} f) = \infty.$$

Puede suponerse que $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ Entonces H es un subgrupo cerrado. Sean x, y con $x^{-1}y \in H$. Cada expresión $(f(x) - f(y))m(K_n)$ es una diferencia de dos sumas de Riemann relativas a K_n. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} [v(f(x) - f(y)) + v(K_n)] = \infty,$$

de donde $f(x) = f(y)$; esto es, f es constante sobre cada trasladado izquierdo de H. Sean D_{j_n}, $(1 \leqslant j_n \leqslant s_n)$, los trasladados de K_n. Se definen

$$f_1 = \textstyle\sum_{j_1=1}^{s_1} f(\xi_{j_1})\chi(D_{j_1}) \quad \text{y} \quad f_n = \sum_{j_n=1}^{s_n} [f(\xi_{j_n}) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\xi_{j_n})]\chi(D_{j_n}),$$

donde $\xi_{j_n} \in D_{j_n}$. Se demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$. Basta hacer la demostración para e; se demuestra, pues, que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(e) = f(e)$. Si se conviene en que $D_{1_n} = K_n$, se tiene $f_n(e) = f(\xi_{1_n}) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\xi_{1_n}) = f(\xi_{1_n}) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(e)$, de donde $\sum_{k=1}^{n} f_k(e) = f(\xi_{1_n})$ y $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(e) = \lim_{n\to\infty} f(\xi_{1_n}) = f(e)$, existiendo este límite porque, si $\bar{\xi}_{1_n}$ es la clase de ξ_{1_n} en G/H (izquierda), siendo f continua en G/H, $\lim_{n\to\infty} f(\bar{\xi}_{1_n}) = \lim_{n\to\infty} f(\bar{\xi}_{1_n}) = f(\lim_{n\to\infty} \bar{\xi}_{1_n}) = f(H) = f(e)$ (con abuso de notación). Se demuestra ahora que $f \in L^{\mathfrak{C}}$. Como

$$f = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j_{n-1}=1}^{s_{n-1}} f_{n,j_{n-1}},$$

donde $f_{n,j_{n-1}} = f_n \mid D_{j_{n-1}}$ para $n > 1$ y $f_{1,j_0} = f_1$, basta demostrar que

$$W(f_{n,j_{n-1}}) \to \infty$$

cuando $n \to \infty$. Del mismo modo que se ha visto que $\sum_{k=1}^{n} f_k(e) = f(\xi_{1_n})$, puede verse que, si $D_{j_k} \supset D_{j_{k+1}}$ y $\xi \in D_{j_n}$, entonces $\sum_{k=1}^{n} f_k(\xi) = f(\xi_{j_n})$. Por lo tanto, $\sum_{k=1}^{n-1} f_k(\xi_{j_n}) = f(\xi_{j_{n-1}})$ y

$$(f(\xi_{j_n}) - \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} f_k(\xi_{j_n}))\chi(D_{j_n}) = (f(\xi_{j_n}) - f(\xi_{j_{n-1}}))\chi(Dj_n),$$

de donde $f_{n,j_{n-1}} = \sum_{t=1}^{(K_{n-1}:K_n)} (f(\xi_{j_{nt}}) - f(\xi_{j_{n-1}}))\chi(D_{j_{nt}})$, donde $\{j_{nt}\}$ es el conjunto de índices j_n tales que $D_{j_{nt}} \subset D_{j_{n-1}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} W(f_{n,j_{n-1}}) &= v[\textstyle\sum_{t=1}^{(K_{n-1}:K_n)} (f(\xi_{j_{nt}}) - f(\xi_{j_{n-1}}))m(D_{j_{nt}})] \\ &= v[\textstyle\sum_{t=1}^{(K_{n-1}:K_n)} (f(\xi_{j_{nt}}) - f(\xi_{j_{n-1}}))m(D_{j_{n-1}})] - v(K_{n-1}:K_n) \\ &\geqslant \inf_t \{v[(f(\xi_{j_{nt}}) - f(\xi_{j_{n-1}}))m(D_{j_{n-1}})]\} - v(K_{n-1}:K_n). \end{aligned}$$

Cada $(f(\xi_{j_{nt}}) - f(\xi_{j_{n-1}}))m(D_{j_{n-1}})$ es una diferencia de dos sumas de Riemann relativas a K_{n-1}. Por otra parte, como $\mathfrak{C}$ es amplia, puede suponerse desde el principio que $v(K_{n-1}:K_n) \leqslant \beta$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} (f_{n,j_{n-1}}) = \infty$.

Se tiene además, si existe la $\mathfrak{C}$-integral:

$$\begin{aligned} f &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j_{n-1}=1}^{s_{n-1}} \int^{\mathfrak{C}} f_{n,j_{n-1}} \\ &= \textstyle\int^{\mathfrak{C}} f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j_{n-1}=1}^{s_{n-1}} \sum_{t=1}^{(K_{n-1}:K_n)} (f(\xi_{j_{nt}}) - f(\xi_{j_{n-1}}))m(D_{j_{nt}}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} [\sum_{j_{n-1}=1}^{s_{n-1}} \sum_{t=1}^{(K_{n-1}:K_n)} f(\xi_{j_{nt}}) m(D_{j_{nt}}) - \sum_{j_{n-1}=1}^{s_{n-1}} f(\xi_{j_{n-1}}) m(D_{j_{n-1}})]$$
$$+ \int^{\mathfrak{C}} f_1$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} [\sum_{j_n=1}^{s_n} f(\xi_{j_n}) m(K_j) - \sum_{j_{n-1}=1}^{s_{n-1}} f(\xi_{j_{n-1}}) m(K_{n-1})] + f(\xi_{j_1}) m(G)$$
$$= \lim_{r\to\infty} \sum_{j_r=1}^{s_n} f(\xi_{j_r}) m(K_r) = \int^{R,\mathfrak{C}} f.$$

Se usará la siguiente condición:

(B). Existen $\bar{K}$ y Λ tales que $(K' \subset \bar{K}$ y $v(K') < v(K'') - \Lambda) \Rightarrow K' \subset K''$.

PROPOSICIÓN 13. Si se cumple (B), entonces $L^{\mathfrak{C}} \subset L^{R,\mathfrak{C}}$ y la R-$\mathfrak{C}$-integración restringida a $L^{\mathfrak{C}}$ es una $\mathfrak{C}$-integración.

Sea $f = \sum_i a_i \chi(D_i)$ (normal). Cada $\chi(D)$ es R–$\mathfrak{C}$–integrable. Sea $K' \subset \bar{K}$. Si $xK' \subset D$, $\sum (a\chi(D), K', \xi) = am(D)$; si $xK' \cap D \neq \emptyset$ y $xK' \not\subset D$, se tiene $v(K') \geqslant v(D) - \Lambda$, de donde, para cada sumando A de $\sum (a\chi(D), K', \xi)$, se tiene $v(A) \geqslant v(a) + v(D) - \Lambda$. Por lo tanto, para cualquier $K' \subset \bar{K}$ se cumple $v(\sum (a\chi(D), K', \xi)) \geqslant v(a) + v(D) - \sup\{0, \Lambda\}$. Como $v(a_i) + v(D_i) \to \infty$, se tiene $\sum (f, K', \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum (a_i\chi(D_i), K', \xi)$. Sea S tal que $i > S \Rightarrow v(a_i) + v(D_i) > N + \sup\{0, \Lambda\}$. Si $D_i = x_i K_i$, sea cualquier $K' \subset (\bigcup_{i=1}^{S} K_i) \cap \bar{K}$. Entonces

$$\sum (f, K', \xi) = \sum_{i=1}^{S} a_i m(D_i) + \sum_{i=S+1}^{\infty} \sum (a_i\chi(D_i), K', \xi),$$

donde el valor de v en el segundo sumando es $\geqslant N$, lo que demuestra que

$$f \in L^{R,\mathfrak{C}}.$$

Lo anterior demuestra también que $\sum_i a_i m(D_i) = \int^{R,\mathfrak{C}} f$, independientemente de la expresión particular de f, lo que demuestra (Int), que muestra que existe una $\mathfrak{C}$-integral, que es la R–$\mathfrak{C}$–integral restringida a L.

PROPOSICIÓN 14. Si $\mathfrak{C}$ es amplia, $L^{\mathfrak{C}} = L^{R,\mathfrak{C}}$ si y sólo si se cumple (B).

Siendo $\mathfrak{C}$ amplia, $L^{R,\mathfrak{C}} \subset L^{\mathfrak{C}}$, según la Proposición 12. Por la Proposición 13, si se cumple (B), $L^{R,\mathfrak{C}} = L^{\mathfrak{C}}$ y $\int^{R,\mathfrak{C}}$ es la $\mathfrak{C}$-integración. Se demuestra que, si no se cumple (B), existe una función f que tiene una expresión normal y no está en $L^{R,\mathfrak{C}}$.

Al no cumplirse (B) debe existir una sucesión de parejas K'_i, K''_i, y una sucesión $\{\lambda_i\}$ con $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty$ tales que $K'_i \not\subset K''_i$ y $v(K'_i) = v(K''_i) - \lambda_i$. Además, esta sucesión puede tomarse de tal manera que $K'_i \subset \bigcap_{j=1}^{i-1} K''_j$ y $K'_i \supset K'_{i+1}$ para todo i. Más todavía, como cada K'_i contiene algún subgrupo abierto y compacto H_i (no necesariamente en $\mathfrak{C}$) que es normal, puede suponerse que $K'_{i+1} \subset H_i$, de donde $\bigcap_i K'_i = \bigcap_i H'_i$. Entonces $H = \bigcap_i K'_i$ es un subgrupo normal cerrado y compacto, y $H \subset K''_i$ para todo i, teniéndose además que, como $v(K'_i) \to -\infty$, H no contiene ningún $K \in \mathfrak{C}$.

Tómese una sucesión $\{a_i\} \subset P$ tal que $\lim_{i\to\infty} (v(a_i) + v(K''_i)) = \infty$ pero con $v(a_i) + v(K''_i) \leqslant \lambda_i$. Como $v(K''_i) \leqslant v(G)$, $\lim_{i\to\infty} v(a_i) = \infty$. Pueden, pues, tomarse subsucesiones $\{K'_{i_j}\}$, $\{K''_{i_j}\}$, $\{\lambda_{i_j}\}$ con las mismas propiedades que las originales pero, además, con $v(a_{i_{j+1}}) > v(a_{i_j})$. Puede suponerse que las sucesiones originales ya tienen esa propiedad y se aceptará, pues, que

$$v(a_{i+1}) > v(a_i).$$

Como $\lim_{i\to\infty} v(a_i) = \infty$, existe $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\chi(K_i'')$ (normal) que tiene la propiedad de ser constante en todo trasladado izquierdo de H. Sea cualquier n y considérense dos sumas, $S_1 = \sum (f, K_n', \xi)$ y $S_2 = \sum (f, K_n', \eta)$, tomando $\xi_i = \eta_i$ si ξ_i y η_i están en un mismo trasladado de K_n' distinto de K_n' y, si se supone que ξ_1 y η_1 están en K_n', tomando $\xi_1 \in K_n''$ y $\eta_1 \notin K_n''$. Entonces $S_1 - S_2 = m(K')[f(\xi_1) - f(\eta_1)]$. Sea $m \leqslant n$ el primer índice para el cual $\xi_1 \in K_m''$ y $\eta_1 \notin K_m'$ ó bien $\xi_1 \notin K_m''$ y $\eta_1 \in K_m''$. Entonces, por la condición $v(a_{i+1}) > v(a_i)$,

$$v[f(\xi_1) - f(\eta_1)] = v(a_m) \leqslant v(a_n),$$

de donde $v(S_1 - S_2) \leqslant v(K_n') + v(a_n) = v(a_n m(K_n'')) - \lambda_n \leqslant 0$, luego no existe $\lim_{n\to\infty} \sum (f, K_n', \xi)$.

Sea $G' = G/H$, con la familia $\mathfrak{C}' = \{KH/H \mid K \in \mathfrak{C}\}$, y sea $\pi: G \to G'$ el homomorfismo canónico. Supóngase además que $m(G') = m(G)$, lo que implica que $m(KH/H) = m(K)$ para todo $K \in \mathfrak{C}$. Se demostrará que $f \notin L^{R,\mathfrak{C}}(G)$ demostrando que $g \notin L^{R,\mathfrak{C}'}(G')$, donde g es la función tal que $g\circ\pi = f$, y usando el teorema de la Sección 1 sobre R-integración en grupos cocientes. Tómese $K_i = K_i'H/H$. Cada suma $\sum (f, K_n'', \xi)$ es igual a una suma $\sum (g, K_n, \pi\xi)$, de donde, como $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ y $\bigcap_i K_i = \{e\}$, $g \notin L^{R,\mathfrak{C}'}(G')$.

Corolario 2. Si v es acotada, $L^{\mathfrak{C}}$ es el espacio de las funciones continuas y existe la $\mathfrak{C}$ integral.

Puesto que, en ese caso, $\mathfrak{C}$ es amplia y se cumple (B) con cualquier $\bar{K}$ y $\lambda > 2V$, si $|v(K)| \leqslant V$ para todo K.

3.7. El caso de v acotada (G no compacto).

Proposición 15. Si v es acotada, existe la $\mathfrak{C}$-integración, y $L^{\mathfrak{C}}$ es el espacio de las funciones continuas que se anulan en ∞.

Existe la integración porque, según el Corolario 2, existe la integración local. Sea $f = \sum_i a_i\chi(D_i)$ (normal). Sea $K \in \mathfrak{C}$; existe una sucesión $\{D_j'\}$ de trasladados de K tal que $f = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i\chi(D_i \cap D_j')$ donde, para cada j,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\chi(D_i \cap D_j')$$

es una expresión normal y, por lo tanto, está en $L^{\mathfrak{C}}$. Entonces f puede expresarse como $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ donde cada f_j es continua y se anula fuera de un trasladado de K. Como $v(a_i) \to \infty$, para cada N el conjunto de los f_j tales que $\inf\{v(f_j(x))\} \leqslant N$ es finito, lo que demuestra la primera parte. Recíprocamente, sea f continua que se anule en ∞. Deben existir trasladados D_i' de K tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i'$ contiene al conjunto de los $x \in G$ donde $f(x) \neq 0$, y se tiene $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$, donde cada f_i se anula fuera de D_i' y $\lim_{i\to\infty} \inf\{v(f_i(x))\} = \infty$. Según el Corolario 1, cada

$f_i \in L$. En la demostración de la Proposición 12 se ha construído una expresión normal de f_i con términos $a\chi(D)$ tales que $v(a) \geqslant \inf\{v(f_i(x))\}$ y, como v es acotada, se tiene $\lim_{i\to\infty} W(f_i) = \infty$, lo que concluye la demostración.

3.8. El caso de $\mathcal{C}$ totalmente ordenada con $v(K_i) \to -\infty$.

LEMA 5. $L^{\mathcal{C}} \subset L^{l,\mathcal{C}}$ y la inclusión es una aplicación continua.

Según el axioma IV y la demostración de la unicidad, (b), basta demostrar que el espacio $L^{l,\mathcal{C}}$ con la valuación W^l cumple con I, II y III, puesto que en (b) se ha demostrado que, en este caso, $L^{l,\mathcal{C}} \supset L$ y $W^l \geqslant W$. Las condiciones I y II son consecuencias inmediatas del Teorema 3 de la Sección 2 y de la definición de W^l. En cuanto a la condición III, se ha visto que existen f'_n tales que $W^l(f'_n) = \infty$, y $\{f_n + f'_n\}$ converge en cada punto y como sucesión de $L^{l,\mathcal{C}}$ a una misma función $f \in L^{l,\mathcal{C}}$ (ver (a.1) y (a.2) de la Sección 2), de donde $\{f'_n\}$ converge a alguna función g' en cada x, que se puede expresar como $\sum_\alpha a_\alpha\chi(x_\alpha G_0)$ y, por lo tanto, $g' \in L^{l,\mathcal{C}}$ y $W^l(g') = \infty$, de donde $g = \lim_{n\to\infty} f_n \in L^{l,\mathcal{C}}$, de donde $\{f_n\}$ converge en $L^{l,\mathcal{C}}$ a g (puesto que $\{f'_n\}$ converge en $L^{l,\mathcal{C}}$ a g').

PROPOSICIÓN 16. Existe la $\mathcal{C}$-integral, que es la restricción de $\int^{l,\mathcal{C}}$ a L.

Porque, por el lema anterior, $\int^{l,\mathcal{C}}$ restringida a L es lineal y continua.

LEMA 6. $W^l = W$ en L.

Habiéndose demostrado que $W^l \geqslant W$, debe demostrarse que $W^l \leqslant W$. Si $W(f) = \infty$, no hay nada que demostrar; se supone $W(f) \neq \infty$. Sea una expresión normal $f = \sum_i a_i\chi(D_i)$ y sean n tal que $i > n \Rightarrow v(a_i) + v(D_i) > W(f)$. Entonces $W^l(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i\chi(D_i)) > W(f)$ y basta demostrar que

$$W^l(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i\chi(D_i)) \leqslant W(\sum_{i=1}^{n} a_i\chi(D_i)) = W(f).$$

Puede suponerse que $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Sea $E_{s_1}(f, a_1)$, con $s_1 = v(a_1)$; este conjunto contiene D_1 y, si intersecta D_i, lo contiene. Sea

$$f_1 = a_1\chi(E_{s_1}(f, a_1));$$

se tiene $W^l(f_1) = s_1 + v_{s_1}(f, a_1) \geqslant W^l(f)$, de donde $W^l(f - f_1) \geqslant W^l(f)$. Además, $f - f_1$ se puede expresar como $f - f_1 = \sum_{i=2}^{n} a'_i\chi(D_i)$, donde $a'_i = a_i$ si $D_i \not\subset E_{s_1}(f, a_1)$ y $a'_i = a_i - a_1$ en caso contrario. Repitiendo la construcción, se obtienen $f_1, \cdots, f_r$, con $r \leqslant n$ tales que $W^l(f_i) \geqslant W^l(f)$ y $f = \sum_{i=1}^{r} f_i$. Además, cada f_i es constante en su soporte y, por lo tanto, se puede expresar como $f_i = \sum_{j=1}^{s_i} a_{i_j}\chi(D_{i_j})$, con

$$v(a_{i_j}) + v(D_{i_j}) = W^l(a_{i_j}\chi(D_{i_j})) \geqslant W^l(f_i) \geqslant W^l(f).$$

En conclusión, existe una expresión $f - \sum_{i=1}^{m} a'_i(D'_i)$ con

$$v(a'_i) + v(D'_i) \geqslant W^l(f),$$

lo que demuestra que $W(f) \geqslant W^l(f)$.

TEOREMA 3. $L^{l,\mathfrak{C}} = L + L_0^{l,\mathfrak{C}}$, donde $L_0^{l,\mathfrak{C}}$ es la adherencia de cero en $L^{l,\mathfrak{C}}$. Si v es acotada superiormente, o si la colección de los trasladados de G_0 es numerable, $L^{l,\mathfrak{C}} = L$, y la igualdad se cumple solamente en esos casos.

Para la primera parte basta demostrar que, para cada $f \in L^{l,\mathfrak{C}}$, existen $a_i\chi(D_i)$ con $\lim_{i\to\infty} W(a_i\chi(D_i)) = \infty$ tales que $\{\sum_{i=1}^{n} a_i\chi(D_i)\}$ converge en $L^{l,\mathfrak{C}}$ a la función f. Para cada i existen combinaciones lineales finitas f_i de funciones $\chi(D)$ tales que $W^l(f_i - f) > i$. Por lo tanto, existen funciones g_i del mismo tipo, con $W^l(g_i) = W(g_i) \to \infty$, tales que $\sum_i g_i$ converge a f en $L^{l,\mathfrak{C}}$. Pero cada g_i se puede expresar como $g_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\chi(D_{ij})$ con

$$\inf \{v(a_{ij}) + v(D_{ij})\} \geqslant W(g_i) - \epsilon,$$

lo que implica que se puede formar una serie $\sum_i a_i\chi(D_i)$ que converge a f en $L^{l,\mathfrak{C}}$ y existen $g_i \in L_0^{l,\mathfrak{C}}$ tales que $\sum_i (g_i + a_i\chi(D_i))$ converge a f en cada $x \in G$. Es claro que, si v es acotada superiormente o si la colección de trasladados de G_0 es numerable, $g_i \in L$, y puede, en caso contrario, construirse $g \in L_0^{l,\mathfrak{C}}$ que no esté en L.

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, MÉXICO 14, D.F.

BIBLIOGRAFÍA

[1] F. BRUHAT, *Intégration p-adique,* Sém. Bourbaki, 1961–62, No. 229.
[2] H. HASSE, Zahlentheorie, Akademie Verlag, Berlin, 1949.
[3] D. MONTGOMERY Y L. ZIPPIN, Topological Transformation Groups, 1955, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics.
[4] A. WEIL, *L'intégration sur les groupes topologiques et ses applications*, Paris, 1940 (Act. Sc. et Ind., No. 869).
[5] H. ZASSENHAUS, The Theory of Groups, Chelsea Publishing Co., 1949.