VARIEDADES ALGEBRAICAS CON CIERTAS CONDICIONES EN SUS TANGENTES

Por Emilio Lluis*

1. Introducción

Sea C una curva en el plano proyectivo tal que todas las tangentes a C en sus puntos simples pasan por un punto fijo. Supongamos que C está definida sobre un campo k de característica p y que C es irreducible. Sea

$$\Phi(X_0, X_1, X_2) = 0$$

su ecuación sobre k. Podemos suponer que el punto por donde pasan las tangentes es $(0, 1, 0)$. Entonces

$$\Phi_1 = \partial\Phi/\partial X_1 = 0.$$

Se tiene pues

$$X_0\Phi_0 + X_2\Phi_2 = m\Phi,$$

siendo Φ_0 y Φ_2 las derivadas parciales correspondientes y m el grado de Φ.

Si $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ y $m > 1$ entonces Φ_0, Φ_2 son polinomios de grado $m - 1 > 0$ (o bien uno de ellos es cero). Por lo tanto existe al menos un punto P tal que

$$\Phi_0(P) = \Phi_2(P) = \Phi(P) = 0,$$

es decir C tiene puntos singulares.

Si $m \equiv 0 \pmod{p}$ y $m > 2$, se tiene

$$X_0\Phi_0 + X_2\Phi_2 = 0,$$

de donde

$$\Phi_0 = X_2\Psi$$

$$\Phi_2 = X_0\Psi,$$

con Ψ de grado mayor que 0. Los puntos comunes de Ψ y Φ son entonces puntos singulares de C.

Así pues se ha demostrado que *si C no es una recta o una cónica en característica 2, C tiene puntos singulares.*

Por otro lado es trivial encontrar ejemplos de cónicas no singulares en característica 2, cuyas tangentes concurran en un punto.

En esta nota se darán algunas generalizaciones de esta propiedad.

De paso observaremos también la siguiente propiedad de nuestra curva C:

Si el punto por donde pasan las tangentes no está en la curva entonces $m \equiv 0$ (mod p) y si dicho punto está en la curva y es simple en C, entonces $m \equiv 1$ (mod p).

* Este trabajo fue parcialmente auspiciado por la National Science Foundation según el contrato NSF-G 14010.

En efecto, si (0, 1, 0) no está en C, $m\Phi(0, 1, 0) = 0$, de donde $m \equiv 0$ (mod p). Si (0, 1, 0) está en C y es simple, entonces, digamos $\Phi_2(0, 1, 0) \not\equiv 0$. Esto significa que en Φ figura, con coeficiente no nulo, el término

$$X_1^{m-1}X_2 .$$

Pero como $\Phi_1 = 0$, Φ es función de X_i^p , de donde $m - 1 \equiv 0$ (mod p).

Esta última propiedad vale también para hipersuperficies en general.

2. Ramas analíticas y ramas analíticas lineales

Sea V una variedad algebraica y V^* el modelo (absolutamente) normal derivado de V y φ: $V^* \rightarrow V$ la transformación birracional respectiva. Sea k un campo común de definición de V y V^*. Sea P un punto de V, $\mathfrak{o}$ su anillo local en $k(V)$ y $\mathfrak{m}$ el ideal máximo de $\mathfrak{o}$. Designaremos con $\mathfrak{o}^*$ a la cerradura integral de $\mathfrak{o}$ en $k(V)$. Este es un anillo semilocal cuyos ideales máximos denotaremos con $\mathfrak{m}_1^*, \cdots, \mathfrak{m}_h^*$. Entonces los anillos

$$\mathfrak{o}_i = \mathfrak{o}^*_{\mathfrak{m}_i^*}$$

son los anillos locales de los puntos $P_1, \cdots, P_h$ de V^* que se transforman en P bajo φ. Sus ideales máximos son $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_i^*\mathfrak{o}_i$.

Llamaremos *ramas analíticas* o simplemente *ramas* de V en P a los puntos $P_1, \cdots, P_h$ del modelo normal derivado V^* de V que corresponden a P (o también si se quiere, a sus anillos locales $\mathfrak{o}_1, \cdots, \mathfrak{o}_h$).

Diremos que *una rama P_i de V en P es lineal* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(a) P_i es un punto simple de V^*.

(b) Existen coordenadas uniformizantes $z_1, \cdots, z_r$ de V^* en P_i tales que $z_1, \cdots, z_r \in \mathfrak{o}$.

Por coordenadas uniformizantes de una variedad en un punto P de V se entiende un conjunto de funciones $z_1, \cdots, z_s$ contenidas en el anillo local de este punto, tales que las diferenciales locales

$$(dz_1)_P, \cdots, (dz_s)_P$$

formen una base del espacio $\mathfrak{D}_P^*$ de las diferenciales locales de V en P (ver [5] pag. 46).

La condición (b) puede enunciarse en forma equivalente como sigue:

(b′) Si $\varphi: V^* \rightarrow V$ es la aplicación birracional del modelo normal derivado V^* de V en V y

$$\varphi^*: \mathfrak{D}_P^* \rightarrow \mathfrak{D}_{P_i}^*$$

es la aplicación lineal del espacio de las diferenciales locales de V en P en el de las diferenciales de V^* en P_i, inducida por φ, entonces φ^* es *suprayectiva.*

Esto resulta de que en este caso

$$\varphi^*((dy)_P) = (dy)_{P_i} .$$

En efecto, si $z_1, \cdots, z_s$ son coordenadas uniformizantes de V^* en P_i tales que $z_1, \cdots, z_s \in \mathfrak{o}$, entonces $(dz_1)_P, \cdots, (dz_s)_P \in \mathfrak{D}_P^*$ son tales que sus imágenes $(dz_1)_{P_i}, \cdots, (dz_s)_{P_i}$ generan $\mathfrak{D}_{P_i}^*$, es decir, φ^* es suprayectiva. Inversamente, supongamos que φ^* es suprayectiva. Sea $y_1, \cdots, y_t$ un sistema de coordenadas uniformizantes de V en P. Eso significa que $(dy_1)_P, \cdots, (dy_t)_P$ es una base de $\mathfrak{D}_P^*$. Entonces $(dy_1)_{P_i}, \cdots, (dy_t)_{P_i}$ generan $\mathfrak{D}_P^*$. Extrayendo una base de este sistema de generadores, digamos $(dy_1)_{P_i}, \cdots, (dy_s)_{P_i}$, se obtiene un sistema de coordenadas uniformizantes $y_1, \cdots, y_s$ de V^* en P_i tales que $y_1, \cdots, y_s$ pertenecen a $\mathfrak{o}$.

La condición (b′) es, por dualidad, equivalent a:

(b″) Si $\varphi^*:\mathfrak{D}_{P_i} \rightarrow \mathfrak{D}_P$ es la aplicación lineal inducida por $\varphi: V^* \rightarrow V$, del espacio lineal tangente a V^* en P_i en el espacio lineal tangente a V en P, entonces *φ^* es inyectiva.*

D. G. Northcott en [3] y [4] define el número de ramas analíticas de una variedad en un punto y el concepto de rama simple. Terminaremos este párrafo demostrando que el concepto de rama lineal aquí definido coincide con el de rama simple de Northcott. Por simplicidad supondremos que k es algebraicamente cerrado y que $P, P_1, \cdots, P_h$ son racionales sobre k.

Sea $\hat{\mathfrak{o}}$ la completación del anillo local $\mathfrak{o}$ de P en V y

$$(0)\hat{\mathfrak{o}} = \mathfrak{n}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{n}_k$$

la descomposición irredundante del ideal cero de $\hat{\mathfrak{o}}$ en ideales primos. El Teorema 2 de [3] asegura que $k = h$. Según [4] se dice que la rama correspondiente a $\mathfrak{n}_i$ es simple si y sólo si el anillo

$$\hat{\mathfrak{o}}/\mathfrak{n}_i$$

es un anillo local regular.

Sea $\hat{\mathfrak{o}}^*$ la completación del anillo semilocal $\mathfrak{o}^*$ y $\hat{\mathfrak{o}}_i$, las completaciones de los anillos locales $\mathfrak{o}_i$. Entonces ([1], pags. 693, 700), si $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_h$ son los elementos primitivos idempotentes, ortogonales dos a dos, asociados a los ideales máximos $\hat{\mathfrak{m}}_i^*$ del anillo semilocal $\hat{\mathfrak{o}}^*$, se tiene

$$\hat{\mathfrak{o}}^* = \hat{\mathfrak{o}}_1 \oplus \cdots \oplus \hat{\mathfrak{o}}_h,$$

$$\hat{\mathfrak{o}}_i = \hat{\mathfrak{o}}^* \epsilon_i .$$

La inclusión $\mathfrak{o} \rightarrow \hat{\mathfrak{o}}^*$ induce, ya que $\mathfrak{m} = \hat{\mathfrak{m}}_i^* \cap \mathfrak{o}$ $(1 \leqq i \leqq h)$ y que $\hat{\mathfrak{o}}^*$ es completo, un homomorfismo $\alpha:\hat{\mathfrak{o}} \rightarrow \hat{\mathfrak{o}}^*$ que es monomorfismo ([1], pag. 699). La inclusión $\mathfrak{o}^* \rightarrow \hat{\mathfrak{o}}_i$ induce, por razones análogas, un homomorfismo

$$\lambda_i:\hat{\mathfrak{o}}^* \rightarrow \hat{\mathfrak{o}}_i$$

cuyo núcleo es el ideal primo π_i de [4]. Análogamente la inclusión $\mathfrak{o} \rightarrow \hat{\mathfrak{o}}_i$ induce, ya que $\hat{\mathfrak{m}}_i \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{m}$, con $\hat{\mathfrak{m}}_i = \mathfrak{m}_i\hat{\mathfrak{o}}_i$, un homomorfismo que coincide con $\lambda_i\alpha:\hat{\mathfrak{o}} \rightarrow \hat{\mathfrak{o}}_i$. El núcleo de este homomorfismo es $\pi_i \cap \hat{\mathfrak{o}}$ y en [3] se demuestra que, ordenando convenientemente los índices, se tiene

$$\pi_i \cap \hat{\mathfrak{o}} = \mathfrak{n}_i, \quad (1 \leqq i \leqq h = k).$$

En esta forma queda definida una inclusión

$$\hat{\mathfrak{o}}/\mathfrak{n}_i \to \hat{\mathfrak{o}}_i .$$

Resulta pues que $\hat{\mathfrak{o}}/\mathfrak{n}_i$ es la cerradura topológica de $\mathfrak{o}$ en el anillo $\hat{\mathfrak{o}}_i$.

Supongamos primero que la rama i es simple, es decir que $\hat{\mathfrak{o}}/\mathfrak{n}_i$ es regular. Entonces el corolario 3 de [4] asegura que el anillo $\mathfrak{o}_i$ es regular, de donde, como P_i es racional sobre k, P_i es un punto simple de V^* y se cumple la condición (a) de nuestra definición. Además en este caso, ya que $\hat{\mathfrak{o}}_i$ es la cerradura integral de $\hat{\mathfrak{o}}/\mathfrak{n}_i$ y $\hat{\mathfrak{o}}/\mathfrak{n}_i$ es integralmente cerrado, $\hat{\mathfrak{o}}_i = \hat{\mathfrak{o}}/\mathfrak{n}_i$, es decir, $\mathfrak{o}$ es denso en $\hat{\mathfrak{o}}_i$. Esto implica que

$$\mathfrak{m}\hat{\mathfrak{o}}_i = \hat{\mathfrak{m}}_i .$$

En efecto, sea $a \in \hat{\mathfrak{m}}_i$. Entonces $a = \lim a_n$, $a_n \in \mathfrak{o}$ (en la topología de $\hat{\mathfrak{o}}_i$). Por lo tanto, para $n > N$, $a_n \in \hat{\mathfrak{m}}_i$, de donde $a_n \in \hat{\mathfrak{m}}_i \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{m}$, es decir a pertenece a la cerradura topológica de $\mathfrak{m}$ en $\hat{\mathfrak{o}}_i$. Esta última está evidentemente contenida en $\mathfrak{m}\hat{\mathfrak{o}}_i$ puesto que $\mathfrak{m}\hat{\mathfrak{o}}_i \supset \mathfrak{m}$ y es cerrado. Es decir, $\mathfrak{m}\hat{\mathfrak{o}}_i \supset \hat{\mathfrak{m}}_i$, de donde $\mathfrak{m}\hat{\mathfrak{o}}_i = \hat{\mathfrak{m}}_i$. Por consiguiente

$$\mathfrak{m}_i = \hat{\mathfrak{m}}_i \cap \mathfrak{o}_i \to \mathfrak{m}\hat{\mathfrak{o}}_i \cap \mathfrak{o}_i = (\mathfrak{m}\mathfrak{o}_i)\hat{\mathfrak{o}}_i \cap \mathfrak{o}_i = \mathfrak{m}\mathfrak{o}_i .$$

De esta última igualdad se sigue que existen $z_1, \cdots, z_r \in \mathfrak{m} \subset \mathfrak{o}$ tales que forman un sistema de parámetros regulares del anillo local $\mathfrak{o}_i$ de dimensión r (es decir, generan $\mathfrak{m}$) lo cual equivale a decir que sus clases $\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_r \bmod \mathfrak{m}_i^2$ son una base del espacio vectorial $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$ sobre $\mathfrak{o}_i/\mathfrak{m}_i = k$. Como la correspondencia $\bar{z} \to (dz)_{P_i}$ es un isomorfismo del espacio $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$ sobre $\mathfrak{D}_{P_i}^*$, se sigue que $z_1, \cdots, z_r$ son parámetros uniformizantes de V^* en P_i (es decir, coordenadas uniformizantes contenidas en $\mathfrak{m}_i$) y por lo tanto se cumple también la condición (b) y la rama es lineal.

Inversamente, supongamos que la rama P_i es lineal. Como k es algebraicamente cerrado, por (b) existen parámetros uniformizantes $z_1, \cdots, z_r$ de V^* en P_i tales que $z_1, \cdots, z_r \in \mathfrak{m}$. Por lo mencionado arriba, $z_1, \cdots, z_r$ son entonces parámetros regulares del anillo local regular $\mathfrak{o}_i$ y también de su completación $\hat{\mathfrak{o}}_i$. Por el teorema de Cohen de estructura de los anillos locales regulares completos, $\hat{\mathfrak{o}}_i$ es igual al anillo de series formales de potencias $k[[z_1, \cdots, z_r]]$. Pero como $z_1, \cdots, z_r \in \mathfrak{o} \subset \hat{\mathfrak{o}}/\mathfrak{n}_i$ y éste es local completo, $\hat{\mathfrak{o}}/\mathfrak{n}_i \supset k[[z_1, \cdots, z_r]]$, de donde

$$\hat{\mathfrak{o}}_i = \hat{\mathfrak{o}}/\mathfrak{n}_i ,$$

es decir $\hat{\mathfrak{o}}/\mathfrak{n}_i$ es regular y la rama es simple. Q.E.D.

3. Curvas en P^n

LEMA. *Sea R un campo de funciones algebraicas de una variable y k su campo de constantes, que supondremos infinito. Si $x, y_1, \cdots, y_n$ son funciones en R, no constantes, entonces para casi todo punto $(a_1, \cdots, a_n)$ de k^n se tiene que*

$$v_{\mathfrak{p}}(y_j) \geqq v_{\mathfrak{p}}(x + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n) \quad (j = 1, \cdots, n)$$

para todo lugar $\mathfrak{p}$ *de* R.

Sea $\mathfrak{p}$ un lugar arbitrario, t un parámetro uniformizante en $\mathfrak{p}$. Sean

$$x = t^{\alpha}u$$

$$y_i = t^{\alpha_i}u_i \quad (u,\ u_i \text{ unidades})$$

Se tiene entonces

$$\bar{x} = x + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = t^{\alpha}u + a_1t^{\alpha_1}u_1 + \cdots + a_nt^{\alpha_n}u_n\,.$$

(1) Supongamos

$$\alpha = \alpha_1 = \cdots = \alpha_s < \alpha_{s+1}\,, \cdots, \alpha_n\,, \quad (0 \leqq s \leqq n).$$

Entonces

$$\bar{x} = t^{\alpha}(u + a_1u_1 + \cdots + a_su_s + a_{s+1}t^{\alpha_{s+1}-\alpha}u_{s+1} + \cdots + a_nt^{\alpha_n-\alpha}u_n)$$

En el k-homomorfismo del anillo $\mathfrak{o}$ del lugar $\mathfrak{p}$ en el campo de resíduos $L = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$, v se transforma en $\bar{u} + a_1\bar{u}_1 + \cdots + a_s\bar{u}_s$. Pero v es unidad si y solamente si esta última suma vale cero, lo cual ocurre solamente para los puntos $(a_1\,, \cdots, a_n)$ de k^n que están en la hipersuperficie definida sobre L por la ecuación

$$\bar{u} + \bar{u}_1X_1 + \cdots + \bar{u}_sX_s = 0, \quad (\bar{u} \neq 0).$$

Por lo tanto, para casi todo $(a_1\,, \cdots, a_n)$ de k^n,

$$v_{\mathfrak{p}}(\bar{x}) = \alpha \leqq v_{\mathfrak{p}}(y_j), \quad (j = 1, \cdots, n).$$

(2) Supongamos ahora

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_s < \alpha, \alpha_{s+1}\,, \cdots, \alpha_n \quad (1 \leqq s \leqq n)$$

Entonces

$$\bar{x} = t^{\beta}(t^{\beta-\alpha}u + a_1u_1 + \cdots + a_su_s + a_{s+1}t^{\alpha_{s+1}-\beta}u_{s+1} + \cdots + a_nt^{\alpha_n-\beta}u_n) = t^{\beta}v.$$

Como antes, la imagen de v es $a_1\bar{u}_1 + \cdots + a_s\bar{u}_s$ y como $\bar{u}_i \neq 0$ y $s \geqq 1$, nuevamente para casi todo $(a_1\,, \cdots, a_n)$ de k^n, v es unidad, de donde

$$v_{\mathfrak{p}}(\bar{x}) = \beta \leqq v_{\mathfrak{p}}(y_j), \quad (j = 1, \cdots, n).$$

Los casos (1) y (2) cubren todas las posibilidades para el lugar $\mathfrak{p}$ y, como $v_{\mathfrak{p}}(x) = v_{\mathfrak{p}}(y_j) = 0$ excepto en un número finito de lugares, el lema resulta de lo anterior.

TEOREMA. *Sea* C *una curva en el espacio proyectivo, tal que todas las tangentes en sus puntos simples concurren en un punto fijo. Entonces si* C *no es una recta o una cónica,* C *tiene puntos singulares con ramas no lineales.*

Supondremos $C \subset P^{n+1}$, y sea $(x, y_1\,, \cdots, y_n)$ un punto genérico *afín* de C sobre un campo k. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que C es irreducible. Podemos asimismo suponer que el punto Q de concurrencia de las tangentes es el punto al infinito sobre el eje $Y_1 = \cdots = Y_n = 0$. Sea D una

k — derivación de $k(x, y_1, \cdots, y_n)$. Si $f(X, Y_1, \cdots, Y_n)$ es un polinomio con coefficientes en k, nulo en C, se tiene

$$0 = Df(x, y_1, \cdots, y_n) = (\partial f/\partial x)Dx + \sum_{i=1}^{n} (\partial f/\partial y_i)Dy_i,$$

es decir, el punto $(Dx, Dy_1, \cdots, Dy_n)$ está en el hiperplano de ecuación

$$(\partial f/\partial x)X + \sum_{i=1}^{n} (\partial f/\partial y_i)Y_i = 0.$$

Por lo tanto $(Dx, Dy_1, \cdots, Dy_n)$ está en la tangente a C en el punto $(x, y_1, \cdots, y_n)$ y por consiguiente

$$Dy_1 = \cdots = Dy_n = 0.$$

De aquí se sigue que

$$dy_1 = \cdots = dy_n = 0.$$

Siendo $R = k(x, y_1, \cdots, y_n)$, usando una transformación afín del tipo

$$\begin{cases} x \to x + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n & (a_j \in k) \\ y_j \to y_j & (1 \leqq j \leqq n) \end{cases}$$

se puede suponer, de acuerdo con el lema antes demostrado que para todo lugar $\mathfrak{p}$ de R se tiene

$$v_{\mathfrak{p}}(y_j) \geqq v_{\mathfrak{p}}(x) \quad (j = 1, \cdots, n).$$

Después de dicha transformación siguen valiendo las condiciones

$$dy_1 = \cdots = dy_n = 0.$$

Sea P un punto de C, y $\mathfrak{p} \subset R$ su lugar. Consideremos primero el caso en que $\mathfrak{p}$ no es polo de x. Entences $\mathfrak{p}$ tampoco es polo de y_j, puesto que $v_{\mathfrak{p}}(x) \leqq v_{\mathfrak{p}}(y_j)$ y por consiguiente $x, y_1, \cdots, y_n$ son coordenadas uniformizantes de C en P, de donde,

$$(dx)_P, (dy_1)_P, \cdots, (dy_n)_P$$

generan el espacio $\mathfrak{D}_P^*$ de las diferenciales locales de C en P. Sea P_1 una rama lineal de C en P. P_1 es un punto del modelo normal derivado C^* de C, y hemos supuesto que es racional sobre k. Sea $\mathfrak{p}_1 \subset R$ su lugar. Por la condición (b) de linealidad,

$$\varphi^*((dx)_P), \varphi^*((dy_1)_P), \cdots, \varphi^*((dy_n)_P)$$

generan el espacio $\mathfrak{D}_{P_1}^*$ de las diferenciales locales de C^* en P_1. Pero $\varphi^*((dx)_P) = (dx)_{P_1}$, $\varphi^*((dy_j)_P) = (dy_j)_{P_1}$, es decir,

$$(dx)_{P_1}, (dy_1)_{P_1}, \cdots, (dy_n)_{P_1}$$

generan $\mathfrak{D}_{P_1}^*$. Pero como P_1 es simple en C^*, $(dy_j)_{P_1}$ es la diferencial *inducida* por dy_j en P_1, de donde

$$(dy_1)_{P_1} = \cdots = (dy_n)_{P_1} = 0.$$

Por consiguiente $(dx)_{P_1} \neq 0$, es decir, x es coordenada uniformizante de C^* en P_1. Esto significa que

$$v_{\mathfrak{p}_1}(dx) = 0.$$

Consideremos ahora el caso en que $\mathfrak{p}$ es polo de x. En el espacio proyectivo de coordenadas $(Y_0, X, Y_1, \cdots, Y_n)$ consideremos el espacio afín $X \neq 0$. Entonces

$$y_0/x,\ y_1/x,\ \cdots,\ y_n/x, \quad (y_0 = 1)$$

es un sistema de coordenadas afines de C en P, puesto que $v_{\mathfrak{p}}(y_j) \geqq v_{\mathfrak{p}}(x)$. Con el mismo razonamiento de antes se tiene que en este caso

$$(d(y_0/x))_{P_1}, \cdots, (d(y_n/x))_{P_1}$$

generan $\mathfrak{D}^*_{P_1}$, el cual, según la condición (a), es de dimensión 1. Así pues, para cierta i se tiene que $(d(y_i/x))_{P_1}$ es una base de dicho espacio, es decir, y_i/x es coordenada uniformizante de C^* en P_1. Por lo tanto

$$v_{\mathfrak{p}_1}(d(y_i/x)) = 0.$$

Entonces como $d(y_i/x) = -y_1x^{-2}dx$, se tiene

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{p}_1}(dx) &= 2v_{\mathfrak{p}_1}(x) - v_{\mathfrak{p}_1}(y_i) = v_{\mathfrak{p}_1}(x) - (v_{\mathfrak{p}_1}(y_i) - v_{\mathfrak{p}_1}(x)) \\ &\leqq v_{\mathfrak{p}_1}(x) < 0 \quad \text{si } i \neq 0; \\ v_{\mathfrak{p}_1}(dx) &= 2v_{\mathfrak{p}_1}(x) < 0 \quad \text{si } i = 0. \end{aligned}$$

Si suponemos pues que todas las ramas en todos los puntos de C son lineales, tomando en cuenta que todo lugar "simple" de R (es decir de anillo local integralmente cerrado) es rama de algún punto de C, se tiene que para todo lugar $\mathfrak{p}$ de R,

$$v_{\mathfrak{p}}(dx) \leqq 0,$$

y que si además $\mathfrak{p}$ es polo de x,

$$v_{\mathfrak{p}}(dx) \leqq v_{\mathfrak{p}}(x) < 0.$$

Como todo polo de dx es también polo de x, la desigualdad anterior implica que x y dx tienen exactamente los mismos polos. Sean estos $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_s$. Se tiene entonces

$$d^0((dx)) = 2g - 2 = \textstyle\sum_{i=1}^{s} d^0(\mathfrak{p}_i)v_{\mathfrak{p}_i}(dx) < 0,$$

de donde el género $g = 0$ y $d^0((dx)) = -2$. Además

$$\begin{aligned} d^0((x)_\infty) &= -\textstyle\sum_{i=1}^{s} d^0(\mathfrak{p}_i)v_{\mathfrak{p}_i}(x) \leqq -\textstyle\sum_{i=1}^{s} d^0(\mathfrak{p}_i)v_{\mathfrak{p}_i}(dx) \\ &= -d^0((dx)) = 2, \end{aligned}$$

es decir, $d^0((x)_\infty) \leqq 2$. Sea $(b, b_1, \cdots, b_n)$ en k^{n+1} tal que $bx + b_1y_1 + \cdots + b_ny_n \notin k$. Todo polo de $bx + b_1y_1 + \cdots + b_ny_n$ es polo de x puesto que para todo lugar $\mathfrak{q}$ de R,

$$v_{\mathfrak{q}}(bx + b_1y_1 + \cdots + b_ny_n) \geqq v_{\mathfrak{q}}(x).$$

Por consiguiente

$$d^0((bx + b_1y_1 + \cdots + b_ny_n)_\infty) \leqq d^0((x)_\infty) \leqq 2,$$

es decir,

$$[k(x, y_1, \cdots, y_n):k(bx + b_1y_1 + \cdots + b_ny_n)] \leqq 2.$$

Así pues el grado de la curva es uno o dos, con lo cual queda demostrado el teorema.

En el caso de una recta no hay nada que agregar. Si la curva es una cónica entonces es plana ([2], teorema 2) y ya se vio que si la característica es distinta de dos entonces tiene puntos singulares.

4. Una generalización

El teorema anterior se generaliza en forma natural como sigue:

TEOREMA. *Sea V^r una variedad en el espacio proyectivo P^n. Si el grado de V es mayor o igual que dos (o bien simplemente mayor que dos si la característica p es dos) y todas las variedades lineales tangentes a V en sus puntos simples contienen una variedad lineal fija de dimensión $r - 1$, entonces V^r tiene singularidades.*

Sea L^{n-r+1} una variedad lineal de P^n, genérica sobre un campo k de definición de V y C^1 una componente de $L \cap V$ (de hecho $C^1 = L \cap V$). Es fácil ver entonces que todas las tangentes a la curva C^1 pasan por el punto de intersección de L^{n-r+1} con la variedad lineal fija de dimension $r - 1$. Por consiguiente C^1 tiene puntos singulares. Consideremos un espacio afín en donde C^1 tenga algún punto singular. Si L es transversal a una variedad lineal tangente a V en un punto de $V \cap L$, simple en V, entonces dicho punto será simple en C ([7], V, §3, Prop. 21). Por lo tanto, si suponemos que V no tiene singularidades, el siguiente lema conduce a una contradicción que demuestra el teorema.

LEMA. *Sea V^r una variedad en el espacio afín A^n definida sobre un campo k; sea $r \geqq s$ y L^{n-s} una variedad lineal de A^n, genérica sobre k. Entonces L es transversal a la variedad lineal tangente $T^r(y)$ a V en todo punto simple (y) de $V \cap L$.*

Sean (u_{ij}) $\quad (1 \leqq i \leqq s, 1 \leqq j \leqq n + 1) \quad (n + 1) \times s$ elementos algebraicamente independientes sobre k y L^{n-s} la variedad lineal de ecuaciones

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} u_{ij}X - u_{i\, n+1} = 0, \quad (1 \leqq i \leqq s)$$

y sea (f_k) el ideal de V sobre k. Como (y) es simple, podemos suponer $\Delta = |\, \partial f_k/\partial y_j \,| \neq 0$ para $i \leqq k, j \leqq n - r$. Supongamos que T y L no sean transversales. Entonces el rango de la matriz

$$\left\| \begin{matrix} \partial f_k/\partial y_j \\ u_{ij} \end{matrix} \right\| \quad (1 \leqq k \leqq n - r, 1 \leqq i \leqq s, 1 \leqq j \leqq n)$$

será $n - r + q < n - r + s$. Entonces existe un determinante en la matriz anterior, conteniendo a Δ, distinto de cero, de orden $n - r + q$, que podemos suponer es

$$\begin{vmatrix} \partial f_k/\partial y_j \\ u_{ij} \end{vmatrix} \quad (1 \leqq k \leqq n-r, 1 \leqq i \leqq q, 1 \leqq j \leqq n-r+q).$$

Por lo tanto, para toda i con $1 \leqq i \leqq s$ y toda j con $1 \leqq j \leqq n$, se tiene que

$$u_{ij} \in k(y, u_{\alpha\beta}),$$

en donde

$$(\alpha, \beta) \in [1, \cdots, q] \times [1, \cdots, n] \cup [q+1, \cdots, s] \times [1, \cdots, n-r+q],$$

y por lo tanto

$$\dim_{k(y)}(u) \leqq sn - (s-q)(r-q) \leqq sn - r + s - 1.$$

Se tiene pues

$$\dim_k(u, y) = \dim_{k(y)}(u) + \dim_k(y) \leqq sn + s - 1$$

y por otro lado

$$\dim_k(u, y) = \dim_{k(u)}(y) + \dim_k(u) \geqq sn + s$$

lo cual es una contradicción y el lema queda probado.

El autor ignora si al debilitar las condiciones, es decir al suponer que las variedades lineales tangentes pasan por una cierta L^s con s menor que $r - 1$ (siendo el caso extremo que pasen solamente por un punto) sigue valiendo la conclusión de que la variedad tenga puntos singulares.

5. El caso separable de dualidad

Siguiendo las notaciones y la nomenclatura del trabajo [6] de A. H. Wallace donde se estudia la dualidad sobre campos de característica arbitraria, llamaremos caso separable de dualidad cuando $k(x, y)$ es una extensión separablemente generada de $k(v)$, en donde (v) es el hiperplano tangente genérico a V sobre k en el punto genérico (x) de V sobre k. Cuando esto ocurre se tiene ([6], teorema 4) que la variedad dual de la variedad dual V' de V es V.

Teorema. *En el caso separable de dualidad, si V es tal que todas las tangentes a V en sus puntos simples pasan por un punto fijo, entonces V es una variedad lineal.*

Sea $V = V^r$ contenida en P^n. Si $r = n$ no hay nada que demostrar. Supongamos pues que $r < n$ y sea $V' = V'^m$ la variedad dual de V contenida en P'^n. Sea Q el punto por donde pasan las tangentes. Si (v) es un hiperplano genérico sobre k a través de la variedad lineal tangente $T(x)$ a V en (x), ya que $T(x)$ pasa por Q se tiene que V'^m está contenida en el hiperplano P'^{n-1} de P'^n correspondiente al punto Q de P^n. Como el dual de V' es V entonces $V \subset P^{n-1}$. Así inductivamente resulta que $V^r = P^r$, es decir, V^r es lineal.

Universidad Nacional Autónoma de México, México 20, D. F.

Bibliografía

[1] C. Chevalley, *On the theory of local rings*, Ann. of Math., **44** (1943), 609–708.

[2] E. Lluis, *De las singularidades que aparecen al proyectar variedades algebraicas*, Bol. Soc. Mat. Mex. (2) **1** (1956), 1–9.

[3] D. G. Northcott, *The number of analytic branches of a variety*, J. Lond. Math. Soc. **25** (1950), 275–279.

[4] D. G. Northcott, *Some results concerning the local analytic branches of an algebraic variety*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **49** (1953), 386–396.

[5] M. Rosenlicht, *A note on derivations and differentials on algebraic varieties*, Port. Mat. **16** (1957), 43–55.

[6] A. H. Wallace, *Tangency and duality over arbitrary fields*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **6** (1959), 321–342.

[7] A. Weil, Foundations of Algebraic Geometry, Am. Math. Soc., Coll. Publ., N. Y., 1946.