ESPACIOS FIBRADOS POR H-ESPACIOS

POR SAMUEL GITLER

Introducción

En este trabajo se estudian ciertas relaciones entre la homología de un H-espacio y su espacio de lazos. Utilizamos la sucesión espectral de la construcción barra introducida por J. C. Moore en [7], [8]. Los resultados que se obtienen son los siguientes: Sea X un H-espacio. Si designamos por $Q(H_*(X; Z_p))$ el espacio vectorial sobre Z_p de elementos no factorizables del anillo $H_*(X; Z_p)$ y por $P(H_*(X; Z_p))$ el espacio vectorial de elementos primitivos, entonces como es bien sabido, la suspensión en espacios fibrados induce un homomorfismo:

$$k_* : Q_q(H_* (\Omega X; Z_p)) \to P_{q+1}(H_*(X; Z_p))$$

Moore ([8]) ha demostrado que σ_* es epimorfismo si q es par, monomorfismo si q es impar, para $p \neq 2$. En este trabajo se obtiene σ_* es isomorfismo si q es par y $q \not\equiv -2 \bmod 2p$, ó si q es impar y $q \not\equiv 1 \bmod 2p$, con $p \neq 2$.[1]

Además si $H^*(X, Z_p)$ no tiene generadores de altura infinita obtenemos condiciones necesarias y suficientes en las diferenciales de la sucesión espectral para que $H_*(\Omega X; Z_p)$ no tenga generadores impares. Esto debe ser útil para dar otra demostración de los resultados de Bott ([1]) acerca de la no torsión en los espacios de lazos de grupos de Lie.

1. Preliminares sobre estructuras filtradas

En todo este trabajo utilizaremos la terminología de [6]. Todos los módulos, álgebras, etc., tendrán coeficientes en un campo K de característica $p \neq 0, 2$ a menos que se indique lo contrario. Un álgebra A conmutativa sobre K es de *tipo* (p^r) si para toda $x \in A$ se cumple que $x^{p^r} = 0$. Es claro que si A es de tipo (p^r), entonces A es de tipo (p^s) para toda $s \geqq r$.

Por un álgebra filtrada A entenderemos un álgebra A sobre K con una filtración regular, creciente compatible con la multiplicación. Como es bien sabido, en este caso E^0A, el módulo graduado asociado a A, tiene una estructura canónica de álgebra.

PROPOSICIÓN 1.1: *Sea A un álgebra conmutativa y filtrada de tipo (p^r), entonces E^0A es un álgebra conmutativa y de tipo (p^r).*

Demostración: Si A es conmutativa es claro que E^0A es conmutativa. Como $(x + y)^{p^r} = x^{p^r} + y^{p^r}$, pues K es de característica p, basta tomar elementos de E^0A de filtración constante. Sea pues $x \in E_q{}^0A$, a $\in F_qA$ un representante de x, como $a^{p^r} = 0$ y a^{p^r} es un representante de x^{p^r}, $x^{p^r} = 0$ y E^0A es de tipo (p^r).

[1] W. Browder me ha comunicado que él obtiene estos resultados por otros métodos.

Por una coálgebra C filtrada entenderemos una coálgebra C con una filtración regular, creciente y compatible con el morfismo diagonal de C, donde a $C \otimes C$ le damos la filtración natural.

Decimos que una coálgebra es *conexa* si es graduada, $C_0 = K$ y si $\psi : C \to C \otimes C$ es el map diagonal de C entonces

$$\psi(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum x_i \otimes x_i'$$

para toda x de dimensión positiva, con dim x_i, dim $x_i' > 0$. Si C es conexa, entonces requerimos que la filtración satisfaga $F_0C = C_0$. Todos nuestros módulos graduados serán localmente finitos.

PROPOSICIÓN 1.2: *Si C es una coálgebra conexa y filtrada, entonces E^0C es coálgebra conexa.*

La demostración de (1.2) es standard.

Si C es una coálgebra conexa, designamos por $P(C)$ el subespacio de elementos $x \in C$ tales que $\psi(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Los elementos de $P(C)$ son los *elementos primitivos* de C. Sea M un módulo filtrado; $x \in M$ es de *filtración* q, si $x \in F_qM$ pero $x \notin F_{q-1}M$. Designamos por $\bar{x}$ la clase de x en $E_q{}^0M$.

PROPOSICIÓN 1.3: *Si C es una coálgebra conexa y filtrada, entonces:*

$$x \in P(C) \textit{ implica } \bar{x} \in P(E^0C).$$

Demostración: Si ψ es el morfismo diagonal de C, designemos por ψ^0 el de E^0C. Por (1.2), $\psi^0(\bar{x}) = \bar{x} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x} + \sum y_i \otimes y_i'$; pero ψ^0 está inducido por ψ; luego para calcular $\psi^0(\bar{x})$ tomamos un representante de $\bar{x}$, sea x este representante. Como $x \in P(C)$, $\psi(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, luego al pasar a ψ^0, debe tenerse que $\psi^0(\bar{x}) = \bar{x} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x}$, es decir, $\bar{x} \in P(E^0C)$.

2. Construcción barra

Un álgebra A es *conexa* si es graduada y $A_0 = K$. Pongamos $I(A) = \sum_{q>0} A_q$. Si M es un módulo graduado, la *k-suspensión* de M, $s^k(M)$ para $-\infty < k < \infty$ es el módulo definido por: $s^k(M)_q = M_{q-k}$. Si M es un módulo $(M)^k$, designará el k-producto tensorial de M consigo mismo (sobre K).

Sea A un álgebra conexa; entonces pongamos

$$\bar{A} = A/A_0, \quad (\bar{A})^0 = K, \quad \bar{B}(A) = \sum_{k \geq 0} s^k(\bar{A})^k, \quad \text{y } B(A) = A \otimes \bar{B}(A).$$

$B(A)$ es un A-módulo libre y $\bar{B}(A) \approx K \otimes_A B(A)$. Los elementos de $s^k(\bar{A})^k$ y $A \otimes s^k(\bar{A})^k$ los escribiremos en las formas

$$[a_1 \mid \cdots \mid a_k], \quad a[a_1 \mid \cdots \mid a_k].$$

También escribimos a por $a[\ ]$. Definimos una aumentación $\epsilon : B(A) \to K$ por $\epsilon(1) = 1$, $\epsilon(I(A)) = 0$, $\epsilon(A \otimes s^k(\bar{A})^k) = 0$. Definimos un operador de contracción τ en $B(A)$ por

$$\tau\, a[a_1 \mid \cdots \mid a_k] = [a \mid a_1 \mid \cdots \mid a_k].$$

Supongamos que A es un álgebra diferencial. Entonces definimos un operador frontera ∂ en $B(A)$ por las fórmulas inductivas $\partial(1) = 0$, $\partial(ax) = (da)x + \mathcal{P}(a)a\partial x$ para $x \in A$, $x \in B(A)$, d el operador diferencial en A, y $\partial\tau(x) + \tau\partial(x) = x - (\epsilon x)$ ([4]). Aquí $\mathcal{P}(a) = (-1)^{\dim a}$. ∂ induce un operador diferencial ∂ en $\bar{B}(A)$. ∂ y $\bar{\partial}$ se descomponen en dos operadores y hacen $B(A)$ y $\bar{B}(A)$ en complejos dobles. A continuación damos la fórmula explícita para estos operadores parciales:

$$\partial_r[a_1 \mid \cdots \mid a_n] = -\sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}([a_1 \mid \cdots \mid a_{k-1}])\,[a_1 \mid \cdots \mid da_k \mid \cdots \mid a_n],$$

$$\partial_s[a_1 \mid \cdots \mid a_n] = a_1[a_2 \mid \cdots \mid a_n] + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{P}([a_1 \mid \cdots \mid a_k])\,[a_1 \mid \cdots \mid a_k a_{k+1} \mid \cdots \mid a_n],$$

y $\partial = \partial_r + \partial_s$. Análogamente $\bar{\partial} = \bar{\partial}_r + \bar{\partial}_s$ con

$$\bar{\partial}_r[a_1 \mid \cdots \mid a_n] = -\sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}([a_1 \mid \cdots \mid a_{k-1}])\,[a_1 \mid \cdots \mid da_k \mid \cdots \mid a_n]$$

$$\partial_s[a_1 \mid \cdots \mid a_n] = \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{P}([a_1 \mid \cdots \mid a_k])\,[a_1 \mid \cdots \mid a_k a_{k+1} \mid \cdots \mid a_n].$$

PROPOSICIÓN 2.1: *Si $f \colon A \to C$ es un morfismo, f induce un morfismo*

$$\bar{f} : \bar{B}(A) \to \bar{B}(C).$$

En $\bar{B}(A)$ definimos un morfismo diagonal $\Delta : \bar{B}(A) \to \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A)$ por la fórmula,

$$\Delta\,[a_1 \mid \cdots \mid a_n] = \sum_{i=1}^{n-1} [a_1 \mid \cdots \mid a_{i-1}] \otimes [a^i \mid \cdots \mid a_n].$$

PROPOSICIÓN 2.2: *Δ es un morfismo de módulos diferenciales que es natural con respecto a morfismos inducidos.*

La verificación de (2.2) es tediosa pero no presenta dificultades.

Consecuentemente $\bar{B}(A)$ es una coálgebra diferencial conexa y por lo tanto $H_*(\bar{B}(A))$ tambien lo es.

Si A es un álgebra diferencial conexa, definimos la *suspensión*

$$\sigma_* : H_q(A) \to H_{q+1}(\bar{B}(A))$$

como sigue:

Sea $x \in H_q(A)$, u un ciclo representante de x, entonces $\bar{\partial}[u] = 0$ en $\bar{B}(A)$ y la clase de $[u]$, $\{[u]\} \in H_{q+1}(\bar{B}(A))$ es por definición $\sigma_*(x)$. Se verifica facilmente que σ_* está bien definida y que es aditiva.

Dada un álgebra conexa A, sea $D(A)$ el submódulo de *elementos factorizables* de A, es decir el submódulo generado por productos ab de elementos a, $b \in I(A)$. Sea $Q(A) = A/D(A)$. Los elementos de $Q(A)$ se dicen *no factorizables.*

PROPOSICIÓN 2.3: *σ_* induce un homomorfismo que también designamos por σ_*,*

$$\sigma_* : Q_q(H(A)) \to P_{q+1}(H(\bar{B}(A)).$$

Demostración: Primero veamos que $\sigma_*(D(H(A)) = 0$. Sea $x = yz$, con dim y, dim $z > 0$; u, v representantes de y, z; entonces uv es representante de x, luego $\sigma_*(x) = \{[uv]\}$, pero $\bar{\partial}[u \mid v] = \mathcal{P}([u])\ [uv]$. Como σ_* es aditiva, se sigue que $\sigma_*(D(H(A))) = 0$. Por otra parte $\Delta_*\sigma_*(x) = \sigma_*(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_*\ (x)$ pues si u es ciclo representante de x, $[u]$ es ciclo representante de $\sigma_*(x)$ y $\Delta[u] = [u] \otimes 1 + 1 \otimes [u]$. De donde (2.3) se sigue.

Sea ahora A un álgebra con diferencial trivial. Si $x \in A_{2q}$ es tal que $x^h = 0$, formemos $[x \mid x^{h-1}] \in \bar{B}(A)$ entonces $\bar{\partial}[x \mid x^{h-1}] = -[x^h] = 0$; luego $[x \mid x^{h-1}]$ es ciclo y su clase la designamos por $\varphi_h(x)$. $\varphi_h(x)$ es la *transpotencia de Cartan.* En general φ_h no es aditiva. Sin embargo tenemos

PROPOSICIÓN 2.4: *Si A es conmutativa y $K = Z_p$, entonces φ_h para $h = p^r$ es aditiva.*

Demostración: Primero observamos que $[x \mid x^k y^{n-k}] - [y \mid x^{k+1} y^{n-k-1}]$ es ciclo frontera en $\bar{B}(A)$ si x, y son elementos de A, pues:

$$\bar{\partial}[x \mid y \mid x^k y^{n-k-1}] - [y \mid x \mid x^k y^{n-k-1}]) = [x \mid x^k y^{n-k}] - [y \mid x^{k+1} y^{n-k-1}]. \qquad (2.5)$$

Sea $h = p^r$, $x^h = y^h = 0$. Formemos $\varphi_h(x + y)$, del cual un ciclo representante es

$$[(x + y) | (x + y)^{h-1}] = [x \mid x^{h-1}] + [y \mid y^{h-1}] + B,$$

donde

$$B = \textstyle\sum_{k=0}^{h-2} \binom{h-1}{k} [x \mid x^k y^{h-1-k}] + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{h-1}{k} [y \mid x^k y^{h-1-k}].$$

B es suma directa de términos

$$B_k = \binom{h-1}{k} [x \mid x^k y^{h-1-k}] + \binom{h-1}{k+1} [y \mid x^{k+1} y^{h-k-2}].$$

Pero $\binom{h-1}{k} + \binom{h-1}{k+1} \equiv 0 \bmod p$; entonces, por (2.5), B_k resulta frontera.

Como $B = \sum B_k$, B es frontera, luego φ_h es aditiva.

Pongamos $A^{(r)} = \{x \mid x^{p^r} = 0\}$, $A^{(r)}$ es un ideal en A además tenemos $A^{(0)} = 0 \subset A^{(1)} \subset \cdots \subset A^{(n)} \subset \cdots \subset A^{(\infty)} = A$. Sea $Q(A^{(r)})$ el cociente de $A^{(r)}$ por el ideal $I(A)A^{(r)}$. Los elementos de $Q(A^{(r)})$ se llaman por analogía los elementos no factorizables de $A^{(r)}$.

PROPOSICIÓN 2.6: *Si A es conmutativa, $K = Z_p$, entonces φ_{p^r} induce un morfismo*

$$\varphi_{p^r} : Q_{2q}(A^{(r)}) \to P_{p^r(2q+2)}(H(\bar{B}(A))).$$

Demostración:

(i) Supongamos que $x = ab$, $a \in I(A)$, $b \in A^{(r)}$, y pongamos $h = p^r$

$$\bar{\partial}[ab \mid b(ab)^{h-2} \mid a] = [ab \mid (ab)^{h-1}] = [x \mid x^{h-1}],$$

por lo que φ_{p^r} está definida en $Q(A^{(r)})$.

(*ii*) Dado $x \in A^{(r)}$, tenemos

$$\Delta[x \mid x^{h-1}] = [x \mid x^{h-1}] \otimes 1 + 1 \otimes [x \mid x^{h-1}] + [x] \otimes [x^{h-1}].$$

Pero si $\overline{D}$ es el operador diferencial en $\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A)$, tenemos que

$$\overline{D}([x] \otimes [x \mid x^{h-2}]) = [x] \otimes [x^{h-1}],$$

por lo que $\varphi_{p^r}(x)$ es primitivo.

Sea $E(x, n)$ el álgebra de Hopf con un solo generador x de dimensión impar n con $x^2 = 0$ y $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$; $P(y, m)$, el álgebra de Hopf en un solo generador y de dimensión par con $y^k \neq 0$ toda k, $\Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y$. Sea $\xi^k(y) = y^{p^k}$, entonces pongamos $P^{(k)}(y, m) = P(y, m)//(\xi^k y)$, álgebra de Hopf cociente de $P(y, m)$ por el ideal generado por $\xi^k y$; $\Gamma(z, m)$ es el álgebra de Hopf dual de $P(y, m)$.

En [4] Eilenberg y MacLane definen un producto $*$ en $\bar{B}(A)$ cuando A es conmutativa, que hace $\bar{B}(A)$ álgebra de Hopf diferencial conmutativa.

Este producto $*$ está dado como sigue: Si $\lambda = [a_1 \mid \cdots \mid a_k]$ $\gamma = [b_1 \mid \cdots \mid b_q]$, entonces

$$\lambda * \gamma = \sum \mathcal{P}(\pi, \lambda, \gamma)\, [C_{\pi(1)} \mid \cdots \mid C_{\pi(k+q)})], \tag{2.7}$$

donde la suma se extiende sobre todas las (k, q) barajadas π, $C_{\pi(i)} = a_k$ ó b_i dependiendo de la permutación π; $\mathcal{P}(\pi, \lambda, \gamma) = (-1)$ elevado a $\sum \dim [a_i] \dim [b_j]$, donde $\pi(i) > \pi(k + j)$.

Proposición 2.8: *Tenemos los siguientes isomorfismos de álgebras de Hopf:*

(i) $\operatorname{Tor}^{E(x,n)}(Z_p Z_p) \approx \Gamma(\sigma(x), n + 1)$;

(ii) $\operatorname{Tor}^{P(y,m)}(Z_p, Z_p) \approx E(\sigma(x), m + 1)$;

(iii) $\operatorname{Tor}^{P^{(k)}(y,m)}(Z_p, Z_p) \approx E(\sigma(y), m + 1) \otimes \Gamma(\varphi_{p^k}(y), p^k m + 2)$.

Demostración:

(i) Definimos $f_1 : \Gamma(\sigma(x), n + 1) \to \bar{B}(E(x, n))$, por $f_1(\gamma_n(x)) = [x \mid \cdots \mid x]$. f_1 resulta isomorfismo de álgebras de Hopf, pero $\bar{B}(E(x, n)) = \operatorname{Tor}^{E(x,n)}(Z_p, Z_p)$.

(ii) Definimos $f_2 : E(\sigma(y), m + 1) \to \bar{B}(P(y, m))$, por $f_2(\sigma(y)) = [y]$. f_2 es morfismo de álgebras de Hopf pues $[y]$ es de dimensión impar con $[y] * [y] = 0$. Es fácil verificar que f_2 es equivalencia de cadena.

(iii) Definimos $f_3 : E(\sigma(y), m + 1) \otimes \Gamma(\varphi_{p^k}(y), p^k m + 2) \to \bar{B}(P^{(k)}(y, m))$, por $f_3(\sigma(y)) = [y], f_3(\varphi_{p^k}(y)) = [y \mid y^{p^k-1}]$. Es fácil verificar que f_3 extiende a un morfismo de álgebras de Hopf que es equivalencia de cadena.

Proposición 2.9: *Si Λ, Γ son álgebras graduadas conmutativas sobre Z_p con diferencial trivial, entonces el map natural*

$$\alpha\colon \operatorname{Tor}^{\Lambda}(Z_p, Z_p) \otimes \operatorname{Tor}^{\Gamma}(Z_p, Z_p) \to \operatorname{Tor}^{\Lambda\otimes\Gamma}(Z_p, Z_p)$$

es isomorfismo de algebras de Hopf.

Por el teorema de Eilenberg-Zilber en [5] (ver también (3.2)), existe una transformación natural $f:B(\Lambda) \otimes \bar{B}(\Gamma) \to \bar{B}(\Lambda \otimes \Gamma)$ que es equivalencia de cadena y conmuta con los morfismos diagonales. Como Λ, Γ son conmutativas, f es multiplicativa e induce α con las propiedades requeridas.

Si V_{-1} es un módulo con elementos todos de dimensión impar, $E(V_{-1})$ designará el álgebra exterior generada por V_{-1}. Si V_r, $r \geqq 0$ es un módulo con elementos todos de dimensión par, $P^{(r)}(V_r)$ designará el álgebra $P(V_r)//(\xi^r V_r)$ donde ponemos para $r = 0$, $P^{(0)}(V_0) = P(V_0)$. Todas estas álgebras tienen estructura de álgebra de Hopf canónica.

Teorema 2.10: *Si* $\Lambda \approx E(V_{-1}) \otimes (\otimes_{r \geqq 0} P^{(r)}(V_r))$ *como álgebras, entonces*:

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}(Z_p, Z_p) \approx \Gamma(\sigma(V_{-1})) \otimes (\otimes_{r \geqq 0} E(\sigma(V_r))) \otimes (\otimes_{r>0} \Gamma(\varphi_{p^r}(V_r))).$$

como álgebras de Hopf. Luego

$$P(\mathrm{Tor}^{\Lambda}(Z_p, Z_p)) \approx \sigma(V_{-1}) + \textstyle\sum_{r \geqq 0} \sigma(V_r) + \sum_{r>0} \varphi_{p^r}(V_r).$$

El teorema (2.10) se sigue facilmente de (2.6), (2.8) y (2.9).

3. $\bar{\mathrm{B}}$(A) como álgebra de Hopf

Sean A y C dos álgebras diferenciales conexas. Hacemos $A \otimes C$ álgebra diferencial conexa de la manera usual. Definimos una transformación

$$f:B(A) \otimes B(C) \to B(A \otimes C)$$

como sigue:

Sean $m = [a_1 | \cdots | a_p] \in \bar{B}(A)$, $n = [c_1 | \cdots | c_q] \in \bar{B}(C)$, $\bar{a}_i = a_i \otimes 1$, $\bar{c}_j = 1 \otimes c_j \in A \otimes C$. Entonces

$$\begin{aligned} f(m \otimes 1) &= [\bar{a}_1 | \cdots | \bar{a}_p], \\ f(1 \otimes n) &= [\bar{c}_1 | \cdots | \bar{c}_q], \\ f(m \otimes n) &= \textstyle\sum \epsilon(\mu, \nu, m, n)\, [\xi_1 | \cdots | \xi_{p+q}], \quad \text{si } p > 0, q > 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde la suma se extiende sobre todas las (p, q) barajadas (μ, ν) de $\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_p, \bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_q$ y $[\xi_1 | \cdots | \xi_{p+q}]$ es el elemento de $\bar{B}(A \otimes C)$ asociado a la barajada (μ, ν); el coeficiente $\epsilon(\mu, \nu, m, n)$ es el signo que hay que poner para llevar $[\xi_1] \otimes \cdots \otimes [\xi_{p+q}]$ al elemento $[\bar{a}_1] \otimes \cdots \otimes [\bar{a}_p] \otimes [\bar{c}_1] \otimes \cdots \otimes [\bar{c}_q]$, observando que $[\xi_i] \otimes [\xi_{i+1}]$ se transforma en $\epsilon([\xi_i], [\xi_{i+1}])\, [\xi_{i+1}] \otimes [\xi_i]$, donde $\epsilon(a, b) = (-1)^{\dim a \dim b}$.

Extendemos f a $B(A) \otimes B(C)$ por $(A \otimes C)$–linealidad. Esta fórmula aparece sin signos en [3] debido a que no consideran álgebras diferenciales.

Proposición 3.1: *La transformación f definida por (3.1) conmuta con la diferencial, e induce $f:\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(C) \to \bar{B}(A \otimes C)$ que es una equivalencia de cadena.*

(3.2) es el teorema de Eilenberg-Zilber ([5]) y la demostración se hace en forma enteramente análoga a como aparece en [3].

Sea t: $M \otimes N \to N \otimes M$ el morfismo de módulos graduados definido por $t(m \otimes n) = \epsilon(m, n)n \otimes m$. En (2.2) definimos un morfismo diagonal en $\bar{B}(A)$. Definimos ahora un morfismo diagonal en $\bar{B}(A_1) \otimes \bar{B}(A_2)$, Δ_{12} por

$$\Delta_{12} = (1 \otimes t \otimes 1)\,(\Delta_1 \otimes \Delta_2), \tag{3.3}$$

donde Δ_i es el morfismo diagonal en $\bar{B}(A_i)$, $i = 1, 2$. Sea Δ el morfismo diagonal en $\bar{B}(A_1 \otimes A_2)$; entonces tenemos

Proposición 3.4: *$\bar{f}$ tiene la propiedad de hacer el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\bar{B}(A_1) \otimes B(A_2) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\Delta_{12}"] & \bar{B}(A_1 \otimes A)_2 \arrow[d, "\Delta"] \\
(\bar{B}(A_1) \otimes \bar{B}(A_2))^2 \arrow[r, "\bar{f} \otimes \bar{f}"] & (\bar{B}(A_1 \otimes A_2)^2
\end{tikzcd}$$

donde Δ_{12} está definido por (3.3).

La demostración de (3.4) se hace por verificación directa, ya que tenemos fórmulas explícitas.

Proposición 3.5: *Sea A un álgebra conexa, g:$A \otimes A \to A$ un morfismo de álgebras; entonces $\bar{B}(A)$ es un álgebra de Hopf con multiplicación $\varphi = \bar{g}\bar{f}$, y morfismo diagonal Δ.*

Demostración: Como g es morfismo, g induce $\bar{g}$: $\bar{B}(A \otimes A) \to \bar{B}(A)$ por (2.2), y $\bar{f}$: $\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A) \to \bar{B}(A)$, como en (3.2), hace a $\bar{B}(A)$ un álgebra con multiplicación φ. Basta hacer ver que Δ es morfismo de álgebras. Para eso consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\bar{B}(A))^2 \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\Delta_{1,1}"] & \bar{B}(A \otimes A) \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\Delta"] & \bar{B}(A) \arrow[d, "\Delta_1"] \\
(\bar{B}(A))^4 \arrow[r, "\bar{f} \otimes \bar{f},"] & (\bar{B}(A \otimes A))^2 \arrow[r, "\bar{g} \otimes \bar{g},"] & (\bar{B}(A))^2
\end{tikzcd}$$

En este diagrama los cuadrados son conmutativos por (2.2) y (3.4); luego $\bar{B}(A)$ es álgebra de Hopf con multiplicación φ y morfismo diagonal Δ.

4. Sucesión espectral de $\bar{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ en homología

En §2 hemos visto que $\bar{B}(A)$ es un complejo doble. Filtramos a $\bar{B}(A)$ por

$$F_q(\bar{B}(A)) = \textstyle\sum_{k \leqq q} s^k(\bar{A})^k. \tag{4.1}$$

La sucesión espectral correspondiente es esencialmente la que Moore considera en [7], [8].

Calculamos ahora los términos E^0, E^1 y E^2, de esta sucesión espectral. En virtud de (4.1) resulta que

$$\alpha^0 : E_q^{\ 0} \approx s^q(\bar{A})^q,$$

y d^0 se identifica con $\bar{\partial}_r$, por lo que

$$\alpha^1 : E_q^{\ 1} \xrightarrow{\approx} s^q(\bar{H}(A)^q,$$

donde α^1 está definido como sigue: Una base para los ciclos en $E_q^{\ 0}$ está dada por los elementos $[a_1 \mid \cdots \mid a_q]$ tal que a_i es ciclo en A; entonces $\alpha^1\{[a_1 \mid \cdots \mid a_q]\} = [\bar{a}_1 \mid \cdots \mid \bar{a}_q]$, donde $\bar{a}_i$ es la clase de homología de a_i. Resulta que $\alpha^1 : E^1 \xrightarrow{\approx} \bar{B}(H(A))$. Como $H(A)$ tiene diferencial trivial, $\bar{B}(H(A))$ tiene una sola diferencial $\bar{\partial}_s$ y queremos ver que α^1 es isomorfismo de módulos diferenciales. Pero tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_s \alpha^1 \{[a_1 \mid \cdots \mid a_q]\} &= \bar{\partial}_s[\bar{a}_1 \mid \cdots \mid \bar{a}_q] \\ &= \sum \mathcal{P}([a_1 \mid \cdots \mid a_i])\,[\bar{a}_1 \mid \cdots \mid \bar{a}_{i-1} \mid \bar{a}_i \bar{a}_{i+1} \mid \cdots \mid \bar{a}_q] \\ &= \alpha^1 d^1 \{[a_1 \mid \cdots \mid a_q]\}. \end{aligned}$$

Sea $\operatorname{Tor}^{H(A)}(K, K)$ la homología de $\bar{B}(H(A))$, resulta pues que α^1 induce $\alpha^2 : E^2 \xrightarrow{\approx} \operatorname{Tor}^{H(A)}(K, K)$. Obtenemos así:

TEOREMA 4.2: *En la sucesión espectral de $\bar{B}(A)$ determinada por* (4.1) *tenemos*

$$E^1 \approx \bar{B}(H(A)),$$

$$E^2 \approx \operatorname{Tor}^{H(A)}(K, K).$$

4.3. *Condición* L_2 : Un álgebra A sobre K satisface la condición L_2 si: (i) existe un morfismo $g : A \otimes A \to A$ de álgebras que es homotópico a la multiplicación y (ii) $H(A)$ es álgebra de Hopf conmutativa y asociativa.

PROPOSICIÓN 4.4: *Si A satisface la condición L_2, los terminos E^r de la sucesión espectral de $\bar{B}(A)$ son álgebras de Hopf conmutativas y asociativas para $r > 1$. Los operadores d^r son derivaciones de álgebra de Hopf.*

Demostración: Como A satisface L_2, $\bar{B}(A)$ es álgebra de Hopf por (3.5). Además es claro que la filtración (4.1) es compatible con la estructura de álgebra de Hopf de $\bar{B}(A)$, luego E^r para $r \geqq 0$ es álgebra de Hopf y d^r es derivación de álgebras de Hopf, por lo que basta hacer ver que E^1 es álgebra de Hopf conmutativa y asociativa. Tenemos $\alpha^1 : E^1 \xrightarrow{\approx} \bar{B}(H(A))$ y como $H(A)$ es conmutativa por (ii) de la condición L_2, $\bar{B}(H(A))$ es álgebra de Hopf conmutativa con producto $*$ definido por (2.6), y morfismo diagonal Δ.

Sea $\varphi^1 : E^1 \otimes E^1 \to E^1$ el morfismo que hace E^1 álgebra, tenemos que si $\lambda =$

$[a_1 | \cdots | a_k]$, $\gamma = [b_1 | \cdots | b_q]$ son ciclos de E^0:

$$\begin{aligned}\alpha^1\varphi^1\{\lambda\} \otimes \{\gamma\} &= \alpha^1 \left(\sum \mathcal{P}(\pi, \lambda, \gamma) \{[c_{\pi(1)} | \cdots | c_{\pi(k+q)}]\}\right) \\ &= \sum \mathcal{P}(\pi, \lambda, \gamma) [\bar{c}_{\pi(1)} | \cdots | \bar{c}_{\pi(k+q)}]) \\ &= \bar{\lambda} * \bar{\gamma}\end{aligned}$$

donde $\bar{\lambda} = [\bar{a}_1 | \cdots | \bar{a}_k]$ y $\bar{\gamma} = [\bar{b}_1 | \cdots | \bar{b}_q]$, pues en E^1 el morfismo g y la multiplicación coinciden por (i) de la condición L_2, luego α^1 es isomorfismo de álgebras. Análogamente si $\Delta^1: E^1 \to E^1 \otimes E^1$ es el morfismo diagonal en E^1, $\lambda = [a_1 | \cdots | a_k]$ entonces:

$$\begin{aligned}(\alpha^1 \otimes \alpha^1)\Delta^1\{\lambda\} &= (\alpha^1 \otimes \alpha^1) \cdot \sum \{[a_1 | \cdots | a_{i-1}]\} \otimes \{[a_i | \cdots | a_k]\} \\ &= \sum [\bar{a}_1 | \cdots | \bar{a}_{i-1}] \otimes [\bar{a}_i | \cdots | \bar{a}_k] \\ &= \Delta\alpha^1\{\lambda\},\end{aligned}$$

por lo que α^1 es isomorfismo de álgebras de Hopf diferenciales.

En [4] se demuestra que si A es conmutativa, tanto $\bar{B}(A)$ como $H(\bar{B}(A))$ tiene potencias divididas, por lo que obtenemos:

Proposición 4.5: *Si A satisface la condición L_2, $K = Z_p$, entonces*

$$\alpha^1: E^1 \xrightarrow{\approx} \bar{B}(H(A)),$$

$$\alpha^2: E^2 \xrightarrow{\approx} \mathrm{Tor}^{H(A)}(K, K)$$

son isomorfismos de álgebras de Hopf, en particular E^1 y E^2 tienen potencias divididas; en E^2 los elementos primitivos son de filtración $\leqq 2$ y no factorizables.

Lo único que falta ver es que en E^2 los primitivos son de filtración $\leqq 2$ y no factorizables. Pero si A satisface L_2, $H(A)$ satisface las condiciones del teorema de Borel y luego $H(A) \approx \Lambda$; Λ de (2.10) por lo que sabemos cuales son los primitivos en E^2 y en la demostración de (2.8) se observa que estos primitivos son de filtración $\leqq 2$ y no factorizables.

5. Sucesión espectral de $\bar{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ en cohomología

Sea A un álgebra, $\bar{B}(A)$ la construcción barra en A, pongamos $\bar{B}(A)^* = \mathrm{Hom}(\bar{B}(A)\, Z_p)$. Si A satisface la condición L_2, $\bar{B}(A)^*$ es álgebra de Hopf dual a $\bar{B}(A)$ y la filtramos por $F^q(\bar{B}(A))^* = \mathrm{Hom}(F_q(\bar{B}(A)), Z_p)$. Resulta como es bien conocido que en la sucesión espectral correspondiente, E_r es álgebra de Hopf dual a E^r por lo que obtenemos

Teorema 5.1: *Si A satisface la condición L_2, en la sucesión espectral de cohomología de $\bar{B}(A)$ los términos E_r son álgebras de Hopf conmutativas para $r \geqq 1$, d_r es derivación de álgebras de Hopf. E_2 como álgebra de Hopf es producto tensorial de álgebras polinomiales y de álgebras exteriores primitivamente generado por* *elementos de filtración* $\leqq 2$. *Los no factorizables impares son de filtración* 1. *Los elementos primitivos pares son de filtración* p^r *ó* $2p^r$.

(5.1) se sigue, por dualidad, de (4.4) y (4.5).

Ahora veremos que la sucesión espectral tiene cierta periodicidad.

TEOREMA 5.2: *Si* A *satisface la condición* L_2, *las únicas diferenciales no nulas en la sucesión espectral de cohomología son las de la forma* d_{p^r-1} *y* d_{2p^r-1}. *Además* E_r *para* $r \geqq 2$ *es primitivamente generada por elementos de filtración* $\leqq 2$.

Demostración. Por (5.1) tenemos que

$$E_2 = E(U) \otimes P(V) \otimes P(W),$$

como álgebras de Hopf con U, V de filtración 1 y W de filtración 2, todos ellos generadores primitivos. Para analizar d_2 basta ver que sucede con los elementos de U, V, W. En E_2 los primitivos impares son de filtración 1. Si $x \in V$ ó $x \in W$, d_2x es primitivo impar de filtración 3 ó 4 respectivamente, luego $d_2V = d_2W = 0$. *Si* $y \in U$, d_2y es primitivo par de filtración 3. *Si* $p = 3$, d_2y puede ser no nulo, pero si $p > 3$, E_2 no tiene elementos primitivos pares de filtración 3; luego si $p = 3$, d_2 puede ser distinta de 0; si $p > 3$, $E_2 = E_3$.

El mismo argumento hace ver que si $p > 3$, $E_3 = E_4$ y si $p = 5$, d_4 puede ser no nula. Si $p > 5$, $E_4 = E_5 = E_6$ y así procedemos por inducción para obtener $E_2 = E_{p-1}$.

Como $E_2 = E_{p-1}$, los primitivos impares de E_{p-1} son de filtración 1, por lo que $d_{p-1}(V) = d_{p-1}(W) = 0$. Si $y \in U$, $d_{p-1}y$ es primitivo par de filtración p, pero los únicos primitivos de filtración p son $\xi(V)$ luego:

$$d_{p-1} : U \to \xi(V).$$

Resulta pues que si ponemos $U_p = \ker d_{p-1}$, $\xi(V_p) = \operatorname{Im} d_{p-1}$,

$$E_p \approx E(U_p) \otimes P(V)//\xi(V_p) \otimes P(W)$$

como álgebras de Hopf. Luego E_p es primitivamente generada por elementos de filtración 1 y 2, los primitivos impares son de filtración 1 y los pares de filtración p^r ó $2p^r$. El mismo análisis hace ver entonces que $E_p = E_{2p-1}$.

Hipótesis de inducción: Supongamos que para $s < k$:

(i) E_s es primitivamente generada por elementos de filtración $\leqq 2$, los primitivos impares son de filtración 1, los primitivos pares tienen filtración p^r ó $2p^r$, y son potencias de generadores primitivos.

(ii) $d_s = 0$ a menos que $s = p^j - 1$ ó $s = 2p^j - 1$.

Queremos ver entonces que (E_k, d_k) satisface (i), (ii).

a) Si $k \neq p^j - 1$ y $k \neq 2p^j - 1$, entonces $k = p^j - 1 + r$ ó $k = 2p^j - 1 + r$, $0 < r < p^j$. Supongamos que $k = p^j - 1 + r$. Entonces por hipótesis de inducción $E_{p^j} = E_{p^j+1} = \cdots = E_k$. Si x es generador par de E_k, $d_kx = 0$, pues d_kx es primitivo de filtración $k + 1$ ó $k + 2$, pero por hipótesis $E_{k-1} = E_k$ tiene primitivos impares de filtración 1. Si x es generador impar $d_k x$ es primitivo par de filtración $k + 1 \neq p^r$ ó $2p^r$, luego $d_k x = 0$. El caso en que $k = 2p^j - 1 + r$ se resuelve de manera análoga.

b) Si $k = p^j - 1$, $d_k = 0$ en los generadores pares, pues $d_k x$ es primitivo impar que, por hipótesis, es de filtración 1. Si x es generador impar, $d_k x$ es primitivo par, que por hipótesis es p^j-potencia de un elemento generador de filtración 1 y de dimensión par. En E_{k+1}, (x, y) da origen a $P^{(j)}(y)$. Resulta que E_{k+1} está generada por elementos primitivos de filtración 1 y 2, por lo que E_{k+1} siendo álgebra de Hopf conmutativa tiene la forma

$$E_{k+1} \approx E(M_{-1}) \otimes P(M_0) \otimes (\otimes_{r>0} P^{(r)}(M_r))$$

como álgebra, con $\sum_{i=-1}^{\infty} M_i \subset P(E_{k+1})$. Esto último implica que E_{k+1} tiene esta forma como álgebra de Hopf, por lo que los primitivos de filtración >2 se obtienen al tomar p^r-potencias de generadores pares, y E_{k+1} satisface la hipótesis de inducción. El caso $k = 2p^j - 1$ se resuelve análogamente.

De la demostración (5.2) obtenemos los siguientes resultados:

TEOREMA 5.3: *Si A satisface la condición* L_2, *entonces*:

(i) *E_r es primitivamente generada por elementos de filtración $\leqq 2$; los primitivos son de filtración p^k ó $2p^k$ y los impares de filtración 1.*

(ii) $Q_{2q}(E_r) \approx Q_{2q}(E_{r+1})$

(iii) *Si $d_{\epsilon p^k - 1} \neq 0$, $\epsilon = 1, 2$, E_∞ tiene elementos de altura p^k.*

Las partes (i), (ii) de (5.3) al pasar a la homología dan

PROPOSICIÓN 5.4: *Si A satisface la condición* L_2, *entonces en la sucesión espectral de homología tenemos*:

$$\kappa_\infty^2 : E_{1,2q+1}^2 \to E_{1,2q+1}^\infty$$

es isomorfismo, y en E^r los primitivos impares son de filtración 1.

La parte (iii) tiene como consecuencia

PROPOSICIÓN 5.5: *Si A satisface la condición* L_2, *y $H^*(\bar{B}(A); Z_p)$ es de tipo (p^r) entonces*: $E_{2p^r} = E_\infty$.

Demostración: Por (1.1) E_∞ es de tipo (p^r). Si $E_{2p^r} \neq E_\infty$, $d_{\epsilon p^s - 1} \neq 0$, $\epsilon = 1$ ó 2, $s > r$, pero por (5.3) E_∞ tendría elementos de altura p^s que es una contradicción. (5.2) y (5.4) dan el siguiente teorema debido a J. C. Moore ([8]):

TEOREMA 5.6: *Si A satisface la condición* L_2, *entonces*:

(i) $\sigma_* : Q_{2q+1}(H(A)) \to P_{2q+2}(\mathrm{Tor}^A(Z_p, Z_p))$ *es monomorfismo.*

(ii) $\sigma_* : Q_{2q}(HA)) \to P_{2q+1}(\mathrm{Tor}^A(Z_p, Z_p))$ *es epimorfismo.*

Demostración: Observamos que $E_{1,*}^\infty$ se identifica de una manera natural con un subespacio de $\mathrm{Tor}^A(Z_p, Z_p)$ y que $\mathrm{Im}\,\sigma_* = E_{1,*}^\infty$ bajo esta identificación. Además $\kappa_2^1 : [Q(H(A))] \xrightarrow{\approx} E_{1,*}^2$. De tal suerte que para analizar σ_* basta ver que sucede con $E_{1,*}^2$ a traves de la sucesión espectral hasta llegar a E^∞. Por (5.4) $\kappa_\infty^2 : E_{1,2q+1} \xrightarrow{\approx} E_{1,2q+1}^\infty$, luego (i) se sigue.

Por otra parte como d^r baja la filtración en r unidades, $x \in E_{1,*}^2$ es ciclo bajo todas las diferenciales d^r, $r \geqq 2$ y $\kappa_\infty^2 : E_{1,2q}^2 \to E_{1,2q}^\infty$ es epimorfismo. Por (5.4) $P_{2q+1}(E^\infty) = E_{1,2q}^\infty$ y por (1.3) los primitivos impares de $\mathrm{Tor}^A(Z_p, Z_p)$ son todos de filtración 1. Sea g: $\mathrm{Tor}^A(Z_p, Z_p) \to E^\infty$ la transformación (no es homomorfismo en general) $g(x) = \bar{x}$ como en (1.3); entonces

$$g : P_{2q+1}(\mathrm{Tor}^A(Z_p, Z_p)) \to E_{1,2q}^\infty$$

si resulta homomorfismo pues todos los elementos tienen filtración constante y es monomorfismo. Es fácil comprobar que g es el inverso de la inclusión $E_{1,2q}^\infty \to \mathrm{Tor}^A(Z_p, Z_p)$, por lo que $E_{1,2q}^\infty \approx P_{2q+1}(\mathrm{Tor}^A(Z_p, Z_p))$ y (ii) se sigue.

Además obtenemos el siguiente refinamiento de (5.6).

TEOREMA 5.7: *Si A satisface la condición* L_2, *entonces*

(i) $\sigma_* : Q_{2q+1}(H(A)) \to P_{2q+2}(\mathrm{Tor}^A(Z_p, Z_p))$ *es epimorfismo si* $q \not\equiv 0$ mod p

(ii) $\sigma_* : Q_{2q}(H(A)) \to P_{2q+1}(\mathrm{Tor}^A(Z_p, Z_p))$ *es monomorfismo si* $q \not\equiv -1$ mod p.

Demostración: (i) En la demostración de (5.2) observamos que los elementos de $E_{2,*}^2$ pasan a $E_{2,*}^\infty$. Ahora por (1.3), $x \in P_{2q+2}(\mathrm{Tor}^A(Z_p, Z_p))$, luego $\bar{x} \in E^\infty$ es primitivo, pero en E^∞ los únicos primitivos son de filtración 1 ó 2. Los de filtración 2 tienen dimensión típica $2pn + 2$, luego si $q \not\equiv 0$ mod p, $\bar{x}$ es de filtración 1, es decir $x \in \mathrm{Im}\, \sigma_*$.

(ii) Sea $x \in Q_{2q}(H(A))$, entonces $sx \in E_{1,2q}^2$. Ahora por (5.2) si $\sigma(x) = 0$, debe tenerse que $d_{p^k-1}\gamma_{p^k}(sy) = sx$, pero entonces dim $sx = p^k(2m) - 1$, o sea que dim $x = p^k(2m) - 2$, por lo que si $q \not\equiv -1$ mod p, $\sigma_*(x) \neq 0$ que es (ii).

Tenemos ahora otra consecuencia,

PROPOSICIÓN 5.8: *Si A satisface la condición* L_2 *y $H^*(\bar{B}(A))$ es de tipo (p) entonces E_∞ es de tipo (p), $E_{2p} = E_\infty$ y $P(E_\infty) = Q(E_\infty)$.*

Demostración: Como $H^*(\bar{B}(A))$ es de tipo (p), E_∞ es de tipo (p), por (1.1) y por (5.5), $E_{2p} = E_\infty$. Por (5.3) (i) E_∞ es primitivamente generada, es decir $P(E_\infty) \to Q(E_\infty)$ es sobre. Pero tenemos una sucesión exacta

$$0 \to P(\xi E_\infty) \to P(E_\infty) \to Q(E_\infty)$$

(ver [6], [7]) donde $\xi E_\infty = \{x^p \mid x \in E_\infty\}$ y, como E_∞ es de tipo (p), $\xi E_\infty = 0$ y (5.8) resulta.

Por dualidad obtenemos

PROPOSICIÓN 5.9: *Si A satisface la condición* L_2 *y $H^*(\bar{B}(A))$ es de tipo (p), entonces $E^{2p} = E^\infty$ y $P(E^\infty) = Q(E^\infty)$.*

TEOREMA 5.10: *Si A satisface la condición* L_2 *sobre* Z_p *y* $H^*(\bar{B}(A))$ *no tiene elementos de altura infinita, entonces*

(i) $H_*(A; Z_p)$ *no tiene generadores pares de altura finita si y solo si las únicas diferenciales no nulas son las de la forma* d_{p^r-1}.

(ii) $H_*(A; Z_p)$ *no tiene generadores impares si y solo si las únicas diferenciales no nulas son las de la forma* d_{2p^r-1}.

Demostración:

(i) a) Si $H_*(A; Z_p)$ no tiene generadores pares de altura finita, E_2 no tiene generadores de filtración 2. En (5.2) vimos que para estudiar $d_{2p^r-1}: E_{2p^r-1} \to E_{2p^r-1}$ bastaba ver el efecto de d_{2p^r-1} en los primitivos impares. Como d_{2p^r-1} es derivación, x primitivo impar implica $d_{2p^r-1}x$ es primitivo de filtración $2p^r$ ya que x es de filtración 1, pero como E_2 solo tiene elementos primitivos de filtración 1, E_{2p^r-1} no tiene elementos de filtración $2p^r$ y d_{2p^r-1} es 0.

b) Recíprocamente si $H_*(A; Z_p)$ tiene generador par x tal que $x^{p^r} = 0$ entonces $\varphi_{p^r}(x) \in E_{2,*}{}^2\ (\bar{B}(A))$, es decir existe un generador y en $E_2{}^{2,*}$. Por (5.3) y^{p^k} para k suficientemente grande debe aniquilarse en la sucesión espectral, pero y^{p^k} tiene filtración $2p^k$ siendo además primitivo. Luego el argumento de (5.2) hace ver que d_{2p^k-1} es no nulo.

(ii) (a) Si $H_*(A; Z_p)$ no tiene generadores impares, E_2 no tiene generadores pares de filtración 1, y un razonamiento enteramente análogo a (i) (a) hace ver que $d_{p^r-1} = 0$ toda r.

(b) Se sigue de una manera análoga a (i) (b) pues si suponemos $x \in H_{2q+1}(A)$ es generador, $sx \in E_{1,*}{}^2$, luego existe $y \in E_2{}^{1,*}$ generador par tal que $\langle y, sx\rangle \neq 0$, pero entonces y^{p^k} para alguna k debe aniquilarse en la sucesión espectral, pero y^{p^k} tiene filtración p^k por lo que d_{p^k-1} es no nula.

6. Relación de $\mathbf{Tor}^{\mathbf{A}}(\mathbf{Z_p}, \mathbf{Z_p})$ con la homología de H-espacios

Lo que hemos hecho en los párrafos anteriores es estudiar una resolución proyectiva particular de Z_p sobre A en el sentido de [8].

Los teoremas (7.1) y (7.2) de [8] son la clave para las aplicaciones geométricas. Los enunciamos como sigue:

TEOREMA 6.1: *Sea* $\pi: E \to X$ *una fibración acíclica con fibra* M *tales que* X *y* M *son H-espacios, entonces*: $\mathrm{Tor}^{C(M)}(Z_p, Z_p) \approx H_*(X; Z_p)$ *como coálgebras y la suspensión geometrica* $k_*: H(M) \to H(X)$ *coincide con la suspensión algebráica* $\sigma_*: H(M) \to \mathrm{Tor}^{C(M)}(Z_p, Z_p)$ *bajo la identificación.*

Si en particular $\pi: E \to X$ es la fibración del espacio de curvas sobre X, con ΩX el espacio de lazos sobre X, entonces tenemos

LEMA 6.2: *Si* X *es H-espacio simplemente conexo,* ΩX *su espacio de lazos, entonces* $A = C_*(\Omega X; Z_p)$ *satisface la condición* L_2.

Demostración: Como X es H-espacio, existe una transformación continua $\bar{h}: X \times X \to X$. h induce $\Omega(h): \Omega(X \times X) \to \Omega(X)$ pero como $\Omega(X \times X)$ es homeomorfo a $\Omega X \times \Omega X$ obtenemos una transformación $h: \Omega X \times \Omega X \to$

ΩX. Por otra parte existe $g:\Omega X \times \Omega X \to \Omega X$ que es composición de lazos. Es fácil verificar que $h(g \times g) = g(h \times h)$ y que $h \approx g$. Pasando a cadenas obtenemos un morfismo $h:A \otimes A \to A$ compatible con la multiplicación inducida por g. Por otra parte ΩX es homotópicamente conmutativo y asociativo ([2]). Luego A satisface la condición L_2 que es (6.2).

Obtenemos así:

TEOREMA 6.3: *Sea X un H-espacio 1-conexo, $(\Omega X, E, X)$ la fibración del espacio de curvas en X basadas en x_0; entonces, si $p \neq 2$,*

$$k_* : Q_q(H_*(\Omega X; Z_p)) \to P_{q+1}(H_*(X; Z_p))$$

es monomorfismo si q es impar, es epimorfismo si q es impar y $q \not\equiv 1$ mod $2p$, es epimorfismo si q es par y es monomorfismo si q es par y $q \not\equiv -2$ mod $2p$.

(6.3) se sigue de (5.6) (5.7) (6.1) y (6.2).

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL IPN, MÉXICO, D.F.

REFERENCIAS

[1] R. BOTT, *An application of Morse Theory to the topology of Lie groups*, Bull. Soc. Math. France, **84**(1956), 251–81.
[2] W. BROWDER, *Homology operations and loop spaces*, Ill. J. of Math., **4**(1960), 347–57.
[3] H. CARTAN Y S. EILENBERG, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956.
[4] S. EILENBERG Y S. MACLANE, *On the groups $H(\pi, n)$*, I, Ann. of Math., **58**(1953), 55–106.
[5] ———, *On the groups $H(\pi, n)$*, II, Ann. of Math., **60**(1954), 49–139.
[6] J. MILNOR Y J. C. MOORE, *On the structure of Hopf algebras*, por aparecer en Ann. of Math.
[7] J. C. MOORE, Seminar in algebraic topology, Princeton University Press, 1957–58 (Mimeógrafo).
[8] ———, *Periodicité des groupes de homotopie stables des groupes de Lie*, Exp. VII, Seminaire H. Cartan, Paris 1959–60.