NOTA SOBRE LA TRANSPOTENCIA DE CARTAN

Por Samuel Gitler

1. Introducción

Cartan en [2] define la transpotencia φ_p para los espacios de Eilenberg-MacLane $K(\pi, n)$:

$$\varphi_p : H_{2q}(\pi, n; Z_p) \to H_{2pq+2} (\pi, n + 1; Z_p);$$

φ_p se anula en productos, es aditiva para $p > 2$ y toma valores en los primitivos de $H_*(\pi,\ n + 1;\ Z_p)$. En esta nota generalizamos la transpotencia de Cartan como sigue:

Sea $(\Omega X,\ E,\ X)$ la fibración del espacio de curvas en un H-espacio X simplemente conexo basada en un punto fijo x_0. $H_*(\Omega X;\ Z_p)$ es un álgebra de Hopf conmutativa. Sea

$$\xi^r : H_*(\Omega X; Z_p) \to H_*(\Omega X; Z_p)$$

la operación de elevar a la p^r potencia, es decir $\xi^r(x) = x^{p^r}$ para $x \in H_*(\Omega X; Z_p)$. Pongamos $K^r(\Omega X) = \text{Ker } \xi^r$. Sea $P(X)$ el subespacio de elementos primitivos en $H_*(X;\ Z_p)$, $\Sigma(X)$ la imagen de la suspensión $\sigma_* : H(\Omega X; Z_p) \to H(X; Z_p)$, entonces $\Sigma\ (X) \subset P(X)$ (ver [3]). Definiremos una operación

$$\varphi_{p^r} : K_{2q}{}^r\ (\Omega X) \to P_{2p^rq+2}\ (X)/\Sigma(X)$$

que es aditiva, se anula en productos y es natural con respecto a transformaciones $f : X \to Y$ de H-espacios, en el sentido de que si $f^1 : \Omega X \to \Omega Y$ es la transformación inducida por f, entonces $f_* : \Sigma(X) \to \Sigma(Y)$, $f_*{}^1 : K^r\ (\Omega X) \to K^r(\Omega Y)$ y

$$f_*\varphi_{p^r}(x) = \varphi_{p^r}(f_*{}^1x)$$

Por medio de estas operaciones obtenemos una descripción completa de $P_{2q}(X)$, toda q.

2. Definición de las operaciones φ_{p^r}

En todo este trabajo consideramos homología con coeficientes Z_p, $p > 2$ y ponemos $H(X)$ por $H_*(X; Z_p)$. Usamos la notación de [3].

En este párrafo damos la construcción de las operaciones φ_{p^r} en la construcción barra: Sea A un álgebra asociativa, tal que $H(A)$ es conmutativa. Si $x \in H_{2q}(A)$ es tal que $\xi^r(x) = 0$, para todo ciclo u representante de x se tiene que $u^{p^r} = \partial\alpha$ con $\alpha \in A_{2p^rq+1}$. Pongamos $h = p^r$. En $\bar{B}(A)$ formamos:

$$z = [u^{h-1} \mid u] + [\alpha]; \tag{2.1}$$

claramente z es un ciclo. Entonces definimos

$$\varphi_{p^r}(x) = \{z\} \in H_{2p^rq+2}(\bar{B}(A)).$$

Hemos hecho elecciones al tomar un ciclo representante u de x, y al tomar α tal que $\partial\alpha = u^h$. Veamos a que variaciones nos conducen estas elecciones.

(i) Si u permanece fijo, α puede variar por cualquier ciclo $\beta \in A_{2p^r q+1}$. Se sigue inmediatamente que $\varphi_{p^r}(x)$ puede variar por cualquier elemento en la imagen de la suspensión $\Sigma(A)$.

(ii) Si v es otro ciclo representante de x, $v = u + \partial\gamma$. Entonces

$$v^h = (u + \partial\gamma)^h = \sum_{i+j=h} u^i * (\partial\gamma)^j$$

donde $u^i * (\partial\gamma)^j = \sum \xi_{\pi(1)}\, \xi_{\pi(2)} \cdots \xi_{\pi(h)}$ con $\xi_{\pi(1)}\xi_{\pi(2)} \cdots \xi_{\pi(h)}$ un producto que tiene i factores u, j factores $\partial\gamma$ y la suma se extiende sobre las (i, j) barajadas π (ver [3]).

Como u, $\partial\gamma$ son de dimensión par, es facil verificar que

$$\partial(u^i * (\gamma(\partial\gamma)^{j-1}) = u^i * (\partial\gamma)^j.$$

Consecuentemente se tiene que

$$v^h = \partial(\alpha + \sum u^i * (\gamma(\partial\gamma)^{j-1})) = \partial\alpha_1 .$$

Sea z_1 el ciclo en $\bar{B}(A)$ asociado a (v, α_1). Tenemos entonces

$$z_1 - z = L_1 + L_2 - L_3 ,$$

donde

$$L_1 = \sum [u^a * (\partial\gamma)^b \mid u], \tag{2.2}$$

la suma tomada sobre todas las parejas (a, b) con $a + b = h - 1, b \neq 0$;

$$L_2 = \sum [u^a * (\partial\gamma)^b \mid \partial\gamma], \tag{2.3}$$

la suma tomada sobre todas las parejas (a, b) con $a + b = h - 1$; y

$$L_3 = \sum [u^i * (\gamma(\partial\gamma)^{j-1})], \tag{2.4}$$

la suma tomada sobre todas las parejas (i, j) con $i + j = h, j \neq 0$. Pero ahora en $\bar{B}(A)$ tenemos

$$\bar{\partial}[u^i * (\gamma(\partial\gamma)^{j-1}) \mid u] = -[u^i * (\partial\gamma)^j \mid u] + [(u^i * (\gamma(\partial\gamma)^{j-1})u]$$

$$\bar{\partial}[u^i * (\gamma(\partial\gamma)^{j-1} \mid \partial\gamma] = -[u^i * (\partial\gamma)^j \mid \partial\gamma] + [u^i * (\gamma(\partial\gamma)^{j-1})\partial\gamma];$$

pero si $i + j = h - 1$, $[(u^i * (\gamma(\partial\gamma)^{j-1})u]$ y $[(u^i * (\gamma(\partial\gamma)^{j-1})\partial\gamma]$ están en L_3, $[u^i * (\partial\gamma)^j \mid u] \in L_1$, y $[u^i * (\partial\gamma)^j \mid \partial\gamma] \in L_2$.

Se sigue facilmente que $z_1 - z = \partial\alpha + \delta$, con δ un ciclo cuya clase está en $\Sigma(A)$.

Sea $K_{2q}{}^r(A) = \operatorname{Ker} \xi^r : H_{2q}(A) \to H_{2p^r q}(A)$. Hemos visto pues que φ_{p^r} es una función bien definida:

$$\varphi_{p^r} : K_{2q}{}^r(A) \to H_{2p^r q+2}(\bar{B}(A))/\Sigma(A). \tag{2.5}$$

3. Propiedades de φ_{p^r} en la Construcción Barra

Sea $P(\bar{B}(A))$ el subespacio de elementos primitivos de $H(\bar{B}(A))$. Como es bien sabido (ver [2]), $\Sigma(A) \subset P(\bar{B}(A))$ y $P(\bar{B}(A))/\Sigma(A)$ se identifica con un subespacio de $H(\bar{B}(A))/\Sigma(A)$.

Proposición 3.1: *La imagen de* φ_{p^r} *está en* $P(\bar{B}(A))/\Sigma(A)$.

Demostración: Sea Δ la transformación diagonal en $\bar{B}(A)$ (ver [3]). Si $x \in K_{2q}^{\ r}(A)$, (u, α) una pareja asociada a x con u ciclo representante de x, $\partial\alpha = u^h$, z el ciclo asociado a (u, α), tenemos

$$z = [u^{h-1} \mid u] + [\alpha]$$

por lo que

$$\Delta(z) = ([u^{h-1} \mid u] + [\alpha]) \otimes 1 + 1 \otimes ([u^{h-1} \mid u] + [\alpha]) + [u^{h-1}] \otimes [u];$$

pero en $\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A)$ tenemos que

$$\partial(-[u^{h-2} \mid u] \otimes [u]) = [u^{h-1}] \otimes [u],$$

por lo que $\Delta_* \{z\} = \{z\} \otimes 1 + 1 \otimes \{z\}$ y (3.1) se sigue.

Es claro que $K_{2q}^{\ 1}(A) \subset K_{2q}^{\ 2}(A) \subset \cdots \subset K_{2q}^{\ r}(A)$. Ahora tenemos

Proposición 3.2: *Si* $x \in K_{2q}^{\ s}(A)$ *entonces* $\varphi_{p^r}(x) = 0$ *para* $r > s$.

Demostración: Sea (u, α) una pareja asociada a x. En este caso, como $x^{p^s} = 0$, $u^{h-1} = \partial\gamma_1$, por lo que

$$z = [u^{h-1} \mid u] + [\alpha] = \bar{\partial}([\gamma_1 \mid u]) + [\alpha - \gamma_1 u],$$

es decir $z \sim [\alpha - \gamma_1 u]$; por lo que $\{z\} \in \Sigma(A)$ y (3.2) se sigue. (3.2) es la razón por la que nada mas consideramos elementos de dimensión par, ya que como $H(A)$ es conmutativa, si x es de dimensión impar, $x^2 = 0$ y un razonamiento análogo a (3.2) haría ver que $\varphi_{p^r}(x) = 0$ para toda r.

Proposición 3.3: *Si* $x \in K_{2q}^{\ r}(A)$, $y \in H_{2t}(A)$, *entonces* $xy \in K_{2(q+t)}^{\ r}(A)$, *con* $\varphi_{p^r}(xy) = 0$.

Demostración: Como $x \in K_{2q}^{\ r}(A)$, $x^{p^r} = 0$, ahora $(xy)^{p^r} = x^{p^r}y^{p^r} = 0$ pues $H(A)$ es conmutativa, luego $xy \in K_{2(q+t)}^{\ r}(A)$.

Sean u, v ciclos representantes de x, y respectivamente. uv es ciclo representante de xy, luego $(uv)^h = \partial\alpha_1$, $u^h = \partial\alpha$. Un representante de $\varphi_{p^r}(xy)$ es entonces $z = [(uv)^{h-1} \mid uv] + [\alpha_1]$. Como $H(A)$ es conmutativo, $(uv)^{h-1} = v^{h-1}u^{h-1} + \partial\gamma$, luego

$$\bar{\partial}[\gamma \mid uv] = [(uv)^{h-1} \mid uv] - [v^{h-1}u^{h-1} \mid uv] - [\gamma uv],$$

pero $\bar{\partial}[v^{h-1} \mid u^{h-1} \mid uv] = [v^{h-1}u^{h-1} \mid uv] - [v^{h-1} \mid u^h v]$ y $\bar{\partial}[v^{h-1} \mid \alpha v] = [v^{h-1} \mid u^h v] - [v^{h-1}\alpha v]$; por lo que se sigue facilmente que $\{z\} \in \Sigma(A)$, que es (3.3).

Proposición 3.4: *Si* $x, y \in K_{2q}(A)$, $\varphi_{p^r}(x + y) = \varphi_{p^r}(x) + \varphi_{p^r}(y)$.

Demostración: Sean u, v ciclos representantes de x, y respectivamente, entonces $u + v$ es ciclo representante de $x + y$. Tenemos que $u = \partial\alpha_1$, $v = \partial\alpha_2$, y podemos suponer que $(u + v)^h = \partial(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \partial\alpha$. Formemos ahora $z = [(u + v)^{h-1} \mid u + v] - [\alpha]$, $z_1 = [u^{h-1} \mid u] - [\alpha_1]$, $z_2 = [v^{h-1} \mid v] - [\alpha_2]$. Entonces:

$$z - (z_1 + z_2) = [u^{h-1} \mid v] + [v^{h-1} \mid u] - [\alpha_3] + \sum [u^i * v^j \mid u + v] \quad (3.5)$$

la suma se extiende sobre $i + j = h - 1$, con $i, j \neq 0$. Como $H(A)$ es conmutativa, tenemos $\partial\gamma_{i,j} = u^i * v^j - (i, j)\, u^i v^j$, donde (i, j) es el coeficiente binomial $\binom{i+j}{i}$. Pongamos $\gamma = \sum \gamma_{i,j}$. Entonces

$$\bar{\partial}[\gamma \mid u + v] = \sum ([u^i * v^j \mid u + v] - (i, j)[u^i v^j \mid u + v]) + [\gamma(u + v)]. \quad (3.6)$$

Ahora tenemos

$$(i, j) + (i + 1, j - 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

por lo que

$$\sum (i, j)[u^i v^j \mid u + v] = \sum (i, j)([u^i v^j \mid u] - [u^{i+1} v^{j-1} \mid v]).$$

También por conmutatividad de $H(A)$ obtenemos $\partial\beta = uv - vu$, $\partial\gamma_{i+1,j}{}^1 = u^{i+1}v^j - u^i v^j u$, por lo que

$$\begin{aligned}\bar{\partial}([u^i v^{j-1} \mid u \mid v] - [u^i v^{j-1} \mid v \mid u] - [\gamma_{i+1,j-1}{}^1 \mid v] - [u^i v^{j-1} \mid \beta] \\ = [u^i v^j \mid u] - [u^{i+1} v^{j-1} \mid v] - [\gamma_{i+1,j-1}{}^1 v - u^i v^{j-1} \beta].\end{aligned} \quad (3.7)$$

De (3.5), (3.6), y (3.7) se sigue entonces que

$$z - (z_1 + z_2) = [\gamma(u + v) - \alpha_3 - \sum (\gamma_{i+1,j-1}{}^1 v - u^i v^{j-1} \beta)] + \bar{\partial} L,$$

donde $L = [\gamma \mid u + v] - \sum ([u^i v^{j-1} \mid u \mid u + v \mid u] + [\gamma_{i+1,j-1}{}^1 \mid v] + [u^i v^{j-1} \beta])$, luego $\{z - (z_1 + z_2)\} \in \Sigma(A)$, y (3.4) se sigue.

PROPOSICIÓN 3.8: *Si $f : A \to C$ es un morfismo, $H(A)$, $H(C)$ conmutativos, f induce a un diagrama conmutativo*:

$$\begin{array}{ccc} K_{2q}{}^r(A) & \xrightarrow{\varphi_{p^r}} & P_{2p^rq+2}(\bar{B}(A))/\Sigma(A) \\ \Big\downarrow f_* & & \Big\downarrow \bar{f}_* \\ K_{2q}{}^r(C) & \xrightarrow{\varphi_{p^r}} & P_{2p^rq+2}(B(C))/\Sigma(C) \end{array}$$

Demostración: Sea $x \in K_{2q}{}^r(A)$, u ciclo representante de x, $\partial\alpha = u^h$, $h = p^r$, $z = [u^{h-1} \mid u] - [\alpha]$ es ciclo representante de $\varphi_{p^r}(x)$, luego $f(z) = [f(u)^{h-1} \mid f(u)] - [f(\alpha)]$ representa $\bar{f}_*\varphi_{p^r}(x)$. Pero como $f(u)$ representa $f_*(x)$, $f(z)$ representa $\varphi_{p^r} f_*(x)$, y (3.8) se sigue.

Pongamos $Q(A) = Q(H(A))$ el módulo de elementos no factorizables en

$H(A)$ (ver [1]). Como

$$K^1(A) \subset K^2(A) \subset \cdots \subset K^r(A) \subset \cdots \subset K^\infty(A) = H(A)$$

es una filtración de $H(A)$, si ponemos $Q(K^r(A)) =$ imagen de $K^r(A)$ en $Q(A)$, obtenemos una filtración,

$$Q(K^1(A)) \subset Q(K^2(A)) \subset \cdots \subset Q(K^r(A)) \subset \cdots \subset Q(K^\infty(A)) = Q(A),$$

de los no factorizables de $H(A)$. Sea $E^0Q(A)$ el grupo graduado asociado a esta filtración. Por (3.2) y (3.3), φ_{p^r} induce

$$\varphi_{p^r} : E_r{}^0Q(A) \to P(\bar{B}(A))/\Sigma(A).$$

Sea $\varphi = \sum \varphi_{p^r}$; entonces

$$\varphi : E^0Q(A) \to P(\bar{B}(A))/\Sigma(A) \tag{3.9}$$

es un homomorfismo.

En [3] hemos considerado la sucesión espectral de $\bar{B}(A)$. Recordemos que un álgebra A satisface la *condición* L_2 si (i) existe un morfismo $f : A \otimes A \to A$ que es homotópico a la mutiplicación, y (ii) $H(A)$ es álgebra de Hopf conmutativa.

TEOREMA 3.10: *Si A satisface la condición L_2,*

$$\varphi : E^0Q(A) \to P(\bar{B}(A))/\Sigma(A)$$

es un isomorfismo sobre.

Demostración: Primero observamos que en la sucesión espectral de $\bar{B}(A)$, $E_{2,*}{}^\infty$ puede identificarse con un subespacio de $H(\bar{B}(A))/\Sigma(A)$. Esto se sigue asi:

$$E_2{}^\infty = \text{Im}\, H(F_2(\bar{B}(A))/\text{Im}\, H(F_1(\bar{B}(A));$$

pero $\text{Im}\, H(F_1(\bar{B}(A)) = \Sigma(A)$. Ahora por (5.3) de [3] los primitivos en $H(\bar{B}(A))$ son de filtración 1 ó 2; los de filtración 1 están en la imagen de la suspensión, por lo que podemos definir

$$g : P(\bar{B}(A))/\Sigma(A) \to P(E_2{}^\infty).$$

g es monomorfismo como en [3]; como g es también el inverso de la inclusión $E_2{}^\infty \subset H(\bar{B}(A))/\Sigma(A)$ restringida a los primitivos, luego $g^{-1} : P(E_2{}^\infty) \approx P(\bar{B}(A))/\Sigma(A)$. Sea $\bar{x} \in E_r{}^0Q(A)$, $x \in Q(H(A))$ un representante de $\bar{x}$, con $\xi^r x = 0$. Luego $\gamma = [x^{p^r-1} \mid x] \in E_{2,*}{}^1(\bar{B}(A))$ y $K_\infty{}^1(\gamma) \in P(E_{2,*}{}^\infty)$ es no nulo por (5.3) de [3]. Pero $K_\infty{}^1(\gamma)$ claramente tiene por ciclo representante $[u^{p^r-1} \mid u] - [\alpha]$ donde u es ciclo de x en A, $\partial\alpha = u^{p^r}$. Se sigue que φ es sobre. Falta ver que φ es $1 - 1$. Como $H(A)$ satisface las condiciones del teorema de Borel,

$$H(A) = E(V_{-1}) \otimes P(V_0) \otimes (\otimes_{r>0} P^{(r)}(V_r)),$$

donde $E(V_{-1})$ es un álgebra exterior generada por un módulo de elementos impares V_{-1}, $P(V_0)$ es un álgebra de polinomios generada por un módulo de elementos pares V_0, $P^{(r)}(V_r)$ es un álgebra de polinomios truncada generada por un módulo de elementos pares V_r de altura p^r. Es inmediato que:

$$E_r^{0}Q(A) \approx V_r$$

y hemos visto en [3] que si $x \in V_r$, $K_\infty^{1}[x^{p^r-1} \mid x] \in P(E_{2,*}^{\infty})$ es no nulo, por lo que φ es $1 - 1$.

PROPOSICIÓN 3.11: *Si $H_*(A) \approx E(V_{-1}) \otimes P(V_0) \otimes (\otimes_{r>0} P^{(r)}(V_r))$ como álgebra, y $P_e(\bar{B}(A))$ es el subespacio de elementos de dimensión par de $P(\bar{B}(A))$ tenemos que:*

$$P_e(\bar{B}(A)) \approx \sigma_*(V_{-1}) + \sum \varphi_{p^r}(V_r).$$

4. Definición de φ_{p^r} en el caso geométrico

Sea $(\Omega X, E, X)$ el espacio fibrado de curvas en un H-espacio simplemente conexo X, basadas en un punto fijo x_0. Como en [3], si $A = C(X)$, $H(\bar{B}(A)) \approx H(X)$ como coálgebra; el isomorfismo es compatible con la suspensión y es natural. Tenemos pues que

$$\begin{tikzcd}
K_{2q}^{r}(A) \arrow[r, "\varphi_{p^r}"] \arrow[d, "\approx"', "i_1"] & P_{2p^rq+2}(\bar{B}(A))/\Sigma(A) \arrow[d, "\approx"', "i_2"] \\
K_{2q}^{r}(\Omega X) \arrow[r, "\varphi_{p^r}^{1}"] & P_{2p^rq+2}(X)/\Sigma(X)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo si definimos $\varphi_{p^r}^{1} = i_2\varphi_{p^r}i^{-1}$. Pongamos simplemente φ_{p^r} por $\varphi_{p^r}^{1}$. Como consecuencis del §3, obtenemos

TEOREMA 4.1: *Si $(\Omega X, E, X)$ es la fibración del espacio de curvas en un H-espacio simplemente conexo X, y $H_*(\Omega X; Z_p) \approx E(V_{-1}) \otimes P(V_0) \otimes (\otimes_{r>0}P^{(r)}(V_r))$ como álgebra, entonces*

$$P_e(H_*(X; Z_p)) \approx \sigma_*(V_{-1}) + \textstyle\sum_{r>0} \varphi_{p^r}(V_r).$$

Como consecuencia, tenemos

COROLARIO 4.2: *Si X es un H-espacio finito con $\pi_1(x) = 0$ y $H_*(\Omega X)$ sin p-torsión entonces $P_e(H_*(X; Z_p))$ proviene solo por transpotencia.*

Demostración: Como $H_*(X; Z_p)$ es finito, $H_*(\Omega X; Z_p)$ no tiene elementos impares, luego (4.2) se sigue de (4.1).

Tenemos que $H^*(X; Z_p)$ es dual de $H_*(X; Z_p)$ y bajo esta dualidad $P(H_*(X))/\Sigma(X)$ corresponde a cierto subgrupo de $H^*(X; Z_p)$. Si $x \in P(H_*(X))/\Sigma(X)$, $u \in H^*(X; Z_p)$ pondremos $u(x) = \langle x, u\rangle$ bajo el apareamiento.

COROLARIO 4.3: *Sea X un H-espacio con $\pi_1(x) = 0$. Si $x \in H_{2q}(\Omega X; Z_p)$ es tal que $\sigma_*(x) \neq 0$, entonces:*

(1) $x^p \neq 0$, *ó*

(2) *existen* $\bar{x} \in H^{2q}(\Omega X;\ Z_p)$, $\bar{y}_1 \in H^{2q+1}(X;\ Z_p)$, $\bar{y}_2 \in H^{2pq+1}(X;\ Z_p)$, $\bar{z} \in H^{2pq+2}(X; Z_p)$ *tales que*:

$$\bar{x}(x) \neq 0, \qquad \bar{x}^p \neq 0, \qquad \bar{y}_1(\sigma_*(x)) \neq 0, \qquad \bar{z}(\varphi_p(x) \neq 0,$$

$$\bar{y}_2 = \mathcal{P}^q\bar{y}_1, \qquad \beta\bar{y}_1 = \bar{z},$$

donde $\mathcal{P}^q$ es la q-potencia reducida de Steenrod y β es el Bockstein.

Demostración: Si $x^p = 0$, $\varphi_p(x)$ está definido, luego $\varphi_p(x) \neq 0$. Sea $\bar{y}_1 \in H^{2q+1}(X;\ Z_p)$ tal que $\bar{y}_1(\sigma_* x) \neq 0$. Correspondiendo a $\bar{y}_1$ existe un map $f: X \rightarrow K(Z_p, 2q+1)$ tal que $f^*(\bar{\imath}_{2q+1}) = \bar{y}_1$. f induce $f^{(1)} : \Omega X \rightarrow \Omega K(Z_p, 2q+1) \approx K(Z_p, 2q)$ tal que $f_*^{(1)}(x) = i_{2q}$, luego $f_*(\varphi_p(x)) = \varphi_p(i_{2q})$. Ahora Cartan en [2] hace ver que existe $\gamma \in H^{2pq+2}(K(Z_p, 2q+1))$ tal que $\gamma(\varphi_p(i_{2q})) \neq 0$, $\gamma = \beta\, \mathcal{P}^q\bar{\imath}_{2q+1}$. Ahora $f^*\gamma(\varphi_p(x)) \neq 0$, luego $f^*\gamma = \bar{z}$, $\bar{y}_2 = f^*\mathcal{P}^q\bar{\imath}_{2q+1} = \mathcal{P}^q\bar{y}_1$. Finalmente como $\sigma^*(\bar{y}_1) = \bar{x} \neq 0$, $\bar{x}(x) \neq 0$, y $\tau^*\mathcal{P}^q(\bar{x}) = \mathcal{P}^q\bar{y}_1 \neq 0$, $\mathcal{P}^q(\bar{x}) = \bar{x}^p \neq 0$, donde τ^* es la transgresión.

Proposiciones como (4.3) aparecen en forma más general en [1].

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL IPN, MÉXICO, D. F.

REFERENCIAS

[1] W. BROWDER, *Homotopy commutative H-spaces*, Ann. of Math., **75**(1962), 283–312.

[2] H. CARTAN, Algèbres de Eilenberg-MacLane et Homotopie, Seminaire H. Cartan 1954–55, Ecole Normale Superieure.

[3] S. GITLER, *Espacios fibrados por H-espacios*, Bol. Soc. Mat. Mex., este mismo volúmen.