SOBRE OPERACIONES COHOMOLOGICAS SECUNDARIAS

POR JOSÉ ADEM

Introducción

Este trabajo contiene algunas aplicaciones de la representación de una operación cohomológica secundaria como operación cohomológica funcional. La representación se obtiene a partir de las fórmulas de Peterson-Stein ([6]), y permite transladar propiedades de operaciones funcionales a operaciones secundarias. Así, como consecuencia de propiedades análogas para operaciones funcionales, se establecen resultados sobre operaciones secundarias que se anulan por razones de dimensión, y se obtiene una fórmula del producto, que generaliza la demostrada por el autor en [2].

Durante la preparación de este trabajo me fueron muy valiosas varias sugestiones de S. Gitler, a quién deseo dar las gracias por su colaboración.

1. Fórmulas de Cartan para operaciones funcionales

Sea A el álgebra de Steenrod sobre Z_p con $p \geqq 2$, y $\psi : A \to A \otimes A$ el homomorfismo diagonal que transforma A en álgebra de Hopf ([4]). Todo elemento $\theta \in A$ de grado s, determina una operación cohomológica

$$\theta : H^q(Y; Z_p) \to H^{q+s}(Y; Z_p).$$

Usaremos únicamente cohomología con coeficientes en Z_p y en el futuro omitiremos el grupo de coeficientes. Sea,

$$\psi(\theta) = \theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta + \sum \theta_k \otimes \theta_k'$$

con grado $\theta_k' = s_k$. Si $u \in H^q(Y)$, $v \in H^r(Y)$, la fórmula de Cartan implica que

$$\theta(u \smile v) = \theta(u) \smile v + (-1)^{qs} u \smile \theta(v) + \sum (-1)^{qs_k} \theta_k(u) \smile \theta_k'(v).$$

Sea $f : X \to Y$ una transformación continua tal que $f^* u = 0$. Además, supongamos que $\theta(u) = 0$, $\theta(v) = 0$, $\theta_k(u) = 0$, para toda k. Esto implica que $f^*(u \smile v) = 0$, y que $\theta(u \smile v) = 0$ y por lo tanto quedan definidas las operaciones funcionales $\theta_f(u \smile v)$, $\theta_f(u)$, $\theta_{kf}(u)$. Se tiene el siguiente

TEOREMA 1.1. *Con las hipótesis anteriores, resulta*

$$\theta_f(u \smile v) = \theta_f(u) \smile f^* v + \sum (-1)^{qs_k} \theta_{kf}(u) \smile f^* \theta_k'(v),$$

módulo la indeterminación total $Q(X)$, *donde*

$$Q(X) = f^* H^{q+r+s-1}(Y) + \theta H^{q+r-1}(X) + \sum [\theta_k H^{q-1}(X)] \smile f^* \theta_k'(v).$$

Si también suponemos $f^* v = 0$, *entonces* $\theta_f(u \smile v) = 0$ *y el módulo se reduce al módulo natural de* θ_f.

Demostración. Sin perder generalidad podemos suponer que X es un subespacio de Y y que f es una inclusión. Esto se sigue al considerar la transformación cilíndrica de una transformación ([10; p. 966]). Luego, con el par (Y, X) tomamos la sucesión exacta de cohomología y construimos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{q-1}(X) & \xrightarrow{\delta} & H^q(Y,X) & \xrightarrow{j^*} & H^q(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^q(X) \\
\downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\
H^{q+s-1}(X) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+s}(Y,X) & \xrightarrow{j^*} & H^{q+s}(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^{q+s}(X)
\end{array}$$

En este diagrama los cuadros que contienen δ conmutan con signo cuando el grado de θ es impar, ya que consideramos el Bockstein sin signo. Usaremos el diagrama como guía para seguir los pasos de la demostración.

Como $f^*u = 0$, sea $w \in H^q(Y, X)$ tal que $j^*w = u$, y con la $v \in H^r(Y)$ formamos el producto $w \smile v \in H^{q+r}(Y, X)$. Resulta,

$$j^*(w \smile v) = (j^*w) \smile v = u \smile v. \tag{1.2}$$

Es fácil verificar que la fórmula de Cartan también vale para productos del tipo $w \smile v$ (ver [5; p. 56]), de donde

$$\theta(w \smile v) = \theta(w) \smile v + \sum (-1)^{qs_k}\theta_k(w) \smile \theta_k'(v).$$

En el desarrollo se omite el término $w \smile \theta(v)$ ya que por hipótesis $\theta(v) = 0$.

Como $j^*\theta(w) = 0$, $j^*\theta_k(w) = 0$, tomamos elementos $z \in H^{q+s-1}(X)$, $z_k \in H^{q+s-s_k-1}(X)$, tales que

$$\delta z = \theta(w), \qquad \delta z_k = \theta_k(w).$$

Por definición, z, z_k, son, respectivamente, clases representantes de las operaciones funcionales $\theta_f(u)$, $\theta_{kf}(u)$.

Ahora, construimos la clase $z' \in H^{q+r+s-1}(X)$, como sigue,

$$z' = z \smile f^*v + \sum (-1)^{qs_k} z_k \smile f^*\theta_k'(v). \tag{1.3}$$

Se tiene que (ver [10; p. 958]),

$$\delta(z \smile f^*v) = (\delta z) \smile v = \theta(w) \smile v,$$

$$\delta(z_k \smile f^*\theta_k'(v)) = (\delta z_k) \smile \theta_k'(v) = \theta_k(w) \smile \theta_k'(v)$$

y por lo tanto,

$$\delta z' = \theta(w \smile v).$$

Luego, por (1.2) se sigue que z' es una clase representante de $\theta_f(u \smile v)$, y por (1.3) el teorema queda demostrado.

Claramente, cambiando las hipótesis y usando el mismo tipo de razonamiento, se pueden establecer otras fórmulas para el producto. Por ejemplo, si suponemos que $f^*u = 0$, $\theta(u) = 0$, $\theta(v) = 0$, $\theta_k'(v) = 0$, para toda k, resulta

$$\theta_f(u \smile v) = \theta_f(u) \smile f^*v.$$

El módulo en este caso es: $\theta H^{q+r-1}(X) + f^*H^{q+r+s-1}(Y)$.

2. Notación y definiciones

Sea $R(s)$ el álgebra libre asociativa generada por $1 = \mathrm{Sq}^0, \mathrm{Sq}^1, \cdots, \mathrm{Sq}^i, \cdots, \mathrm{Sq}^{2^s}$, sobre Z_2, si $p = 2$; y por Δ, $1 = \mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \cdots, \mathcal{P}^i, \cdots, \mathcal{P}^{p^s}$, sobre Z_p si $p > 2$, donde Δ es el operador de Bockstein. Denotemos con $R^+(s)$ el ideal de $R(s)$ generado por los elementos positivos, esto es, excluyendo el 1. Si $s = \infty$, escribimos $R = R(\infty)$, $R^+ = R^+(\infty)$, y el álgebra de Steenrod es $A = R/I$, donde I es el ideal de relaciones.

Por conveniencia, principalmente para la demostración del teorema (7.4), trabajaremos con R en lugar de A. La traducción de los resultados a A se puede precisar trivialmente en todos los casos.

Consideremos $R^n = R \oplus \cdots \oplus R$, suma directa de n copias del álgebra R sobre Z_p. Si

(2.1) $$a = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n], \quad b = [\beta_1, \cdots, \beta_n],$$

son dos elementos de R^n, entonces su *producto escalar*,

$$a \cdot b = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k,$$

es un elemento de R. Observamos que $a \cdot b \in I$ representa una relación en A. Además, R^n opera en forma natural en $[H^*(X)]^n = H^*(X) \oplus \cdots \oplus H^*(X)$, suma directa de n copias, donde $H^*(\ )$ es el functor de cohomología con coeficientes en Z_p.

En $R \otimes R$ definimos el producto en la forma usual:

$$(\theta \otimes \theta') \cdot (\nu \otimes \nu') = (-1)^{st} \theta\nu \otimes \theta'\nu',$$

donde $s =$ grado θ', $t =$ grado ν. Consideremos el homomorfismo

$$\psi : R \to R \otimes R,$$

determinado por la fórmula de Cartan, que convierte a R (también a A) en álgebra de Hopf ([4]). Claramente, $\psi : R(s) \to R(s) \otimes R(s)$.

Sea $\psi_n : R^n \to (R \otimes R)^n$, el homomorfismo inducido por ψ en la suma directa R^n, de n copias de R. Explícitamente, si $a = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ es un elemento de R^n,

$$\psi_n(a) = [\psi(\alpha_1), \cdots, \psi(\alpha_n)].$$

Si a, b son dos elementos de R^n, es fácil verificar que

(2.2) $$\psi(a \cdot b) = \psi_n(a) \cdot \psi_n(b),$$

esto es, el homomorfismo diagonal conserva el producto escalar.

Para $\theta \in R$, definimos las transformaciones auxiliares ψ^0, ψ^+, con

$$\psi^0(\theta) = \theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta,$$
$$\psi^+(\theta) = \psi(\theta) - \psi^0(\theta),$$

y en forma análoga, definimos $\psi_n^{\;0}$, $\psi_n^{\;+}$. Se tiene que $\psi_n^{\;+} : [R^+(s)]^n \to [R^+(s) \otimes R^+(s)]^n$.

Supongamos que $\theta \in R$ es un elemento de grado $r + 1$ y que

$$\theta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k ,$$

con α_k, β_k elementos de R de grados, respectivamente, s_k, t_k, de modo que $r + 1 = s_k + t_k$ para toda k. Por lo anterior, se tiene que $\theta = a \cdot b$, donde a, b son como en (2.1).

Con el fin de expresar la operación cohomológica θ como composición de operaciones, en función de a, b, introducimos las operaciones auxiliares

$$\lambda : H^q(X) \to [H^q(X)]^n,$$
$$\epsilon : [H^q(X)]^n \to H^q(X),$$

definidas como sigue:

$$\lambda(u) = [u, \cdots, u], \quad \text{para } u \in H^q(X),$$
$$\epsilon[u_1, \cdots, u_n] = u_1 + \cdots + u_n, \quad \text{para } u_k \in H^q(X).$$

Luego, con

(2.3) $$\alpha = \epsilon a, \qquad \beta = b\lambda,$$

igual que en [2; p. 43], factorizamos

(2.4) $$\theta = \alpha\beta.$$

Explícitamente,

$$H^q(X) \xrightarrow{\beta} \oplus H^{q_k}(X) \xrightarrow{\alpha} H^{q+r+1}(X),$$

donde $q_k = q + t_k$, la suma del término central es suma directa sobre $1 \leqq k \leqq n$, y α, β están determinadas por

$$\beta(u) = [\beta_1(u), \cdots, \beta_n(u)],$$
$$\alpha[u_1, \cdots, u_k] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(u_k),$$

para $u \in H^q(X)$, $u_k \in H^{q_k}(X)$.

Asociados con a, b definimos los elementos

$$a^* = [(-1)^{s_1}\alpha_1, \cdots, (-1)^{s_n}\alpha_n], \qquad b^* = [(-1)^{t_1}\beta_1, \cdots, (-1)^{t_n}\beta_n],$$

y también las operaciones

$$\alpha^* = \epsilon a^*, \qquad \beta^* = b^*\lambda.$$

Se comprueba fácilmente que $\alpha^*\beta^* = (-1)^{r+1}\theta$.

3. Las operaciones funcionales α_f y β_f

Si (X, Y) es un par, con las sucesiones exactas de cohomología y las operaciones α, α^*, formamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
\oplus H^{q_k-1}(Y) & \xrightarrow{\delta} & \oplus H^{q_k}(X,Y) & \xrightarrow{j^*} & \oplus H^{q_k}(X) & \xrightarrow{i^*} & \oplus H^{q_k}(Y) \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\
H^{q+r-1}(Y) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+r}(X,Y) & \xrightarrow{j^*} & H^{q+r}(X) & \xrightarrow{i^*} & H^{q+r}(Y)
\end{array}$$

En la sucesión superior los homomorfismos se definen en la forma natural y conservan la misma notación que en la sucesión inferior. Teniendo en cuenta que $\delta\Delta = -\Delta\delta$ para el operador de Bockstein Δ, se sigue que $\delta\alpha_k = (-1)^{s_k}\alpha_k\delta$, y por lo tanto, $\delta\alpha^* = \alpha\delta$. En forma análoga, en los diagramas respectivos, se tienen $\delta\beta^* = \beta\delta$, $\delta\theta^* = \theta\delta$.

Sea $f : X \to K$ una transformación continua y $u \in \oplus H^{q_k}(K)$ tal que $f^*u = 0$, $\alpha(u) = 0$.

Entonces, podemos definir la operación funcional $\alpha_f(u)$. La indeterminación es

$$f^*H^{q+r-1}(K) + \alpha^*[\oplus H^{q_k-1}(X)],$$

y observamos que

$$\alpha^*[\oplus H^{q_k-1}(X)] = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k H^{q_k-1}(X),$$

donde el término a la derecha es el menor subgrupo de $H^{q+r}(X)$ conteniendo los subgrupos $\alpha_k H^{q_k-1}(X)$.

Igualmente, con $v \in H^q(K)$ tal que $f^*v = 0$, $\beta(v) = 0$, se obtiene

$$\beta_f(v) = [\beta_{1f}(v), \cdots, \beta_{nf}(v)].$$

Suponiendo que $f^*\beta(v) = 0$, $\alpha\beta(v) = 0$, podemos definir $\alpha_f\beta(v)$, así como también $\alpha_f{}^*\beta^*(v)$, y resulta $\alpha_f\beta(v) = (-1)^{r+1}\alpha_f{}^*\beta^*(v)$.

Consideraremos ahora relaciones entre estas operaciones y el operador cofrontera de la sucesión exacta de cohomología. Sea $f : (X, Y) \to (K, L)$ una transformación continua entre pares y $f' : Y \to L$, la transformación inducida por f. Si $u \in \oplus H^{q_k}(L)$ es tal que $f'^*u = 0$, $\alpha(u) = 0$, entonces están definidas las operaciones $\alpha_{f'}(u)$ y $\alpha_f{}^*(\delta u)$, donde $\delta u \in \oplus H^{q_k+1}(K, L)$, y se tiene que

$$\delta\alpha_{f'}(u) = -\alpha_f{}^*(\delta u).$$

La demostración es igual a la de [10; Th. 15.11].

Con las hipótesis correspondientes, se obtiene también el resultado análogo:

$$\delta\beta_{f'}(v) = -\beta_f{}^*(\delta v).$$

4. Un teorema sobre operaciones funcionales

Sean $g : Y \to X$, $f : X \to K$ dos transformaciones continuas y la operación $\theta = \alpha\beta$ como en (2.4). Supongamos que para $u \in H^q(K)$ se tienen $(fg)^*u = 0$, $\theta(u) = 0$, $\beta(f^*u) = 0$.

Con estas hipótesis podemos definir las operaciones funcionales $\theta_{fg}(u)$, $\alpha_f\beta(u)$, y $\beta_g(f^*u)$. Sea $Q(Y)$ el subgrupo de $H^{q+r}(Y)$ definido por

$$Q(Y) = \theta H^{q-1}(Y) + g^*f^*H^{q+r}(K) + g^*\alpha[\oplus H^{q_k-1}(X)].$$

TEOREMA 4.1. *Módulo $Q(Y)$ se tiene,*

$$\theta_{fg}(u) = g^*\alpha_f\beta(u) + \alpha^*[\beta_g(f^*u)].$$

Demostración: Sin perder generalidad podemos suponer que las transformaciones f, g son inclusiones. En efecto, de no serlo, tomamos $Y \subset X_g \subset K_{fg'}$, donde X_g es el espacio de la transformación cilíndrica de g, la transformación $g' : X_g \to X$ es la equivalencia homotópica que comprime X_g en X, y, finalmente, $K_{fg'}$ es el espacio de la transformación cilíndrica de $fg' : X_g \to K$.

Luego, suponiendo que f, g son inclusiones, con las sucesiones exactas de cohomología de los pares (X, Y), (K, Y), (K, X), y las inclusiones $k_1 : (X, Y) \to (K, Y)$, $k_2 : (K, Y) \to (K, X)$, formamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{q-1}(Y) & \xrightarrow{\delta} & H^q(X, Y) & \xrightarrow{j^*} & H^q(X) & \xrightarrow{g^*} & H^q(Y) \\
\| & & \uparrow{\scriptstyle k_1^*} & & \uparrow{\scriptstyle f^*} & & \| \\
H^{q-1}(Y) & \xrightarrow{\delta_1} & H^q(K, Y) & \xrightarrow{j_1^*} & H^q(K) & \xrightarrow{(fg)^*} & H^q(Y) \\
\uparrow{\scriptstyle g^*} & & \uparrow{\scriptstyle k_2^*} & & \| & & \uparrow{\scriptstyle g^*} \\
H^{q-1}(X) & \xrightarrow{\delta_2} & H^q(K, X) & \xrightarrow{j_2^*} & H^q(K) & \xrightarrow{f^*} & H^q(X)
\end{array}$$

Tomamos tres diagramas de este tipo sobrepuestos e interconectados por las operaciones, β del primero al segundo, y α del segundo al terecero.

Empezando con $u \in H^q(K)$, por hipótesis $(fg)^*u = 0$, luego existe $v_1 \in H^q(K, Y)$ tal que $j_1^*v_1^* = u$. Si $v = k_1^*v_1$, por conmutatividad, se tiene que $j^*v = f^*u$. Formemos $\beta(v_1)$, pasando así al segundo diagrama. Por la naturalidad de β se tiene que $j_1^*\beta(v_1) = \beta(u)$. Por hipótesis $f^*\beta(u) = 0$ luego existe $v_2 \in \oplus H^{q_k}(K, X)$ tal que $j_2^*v_2 = j_1^*k_2^*v_2 = \beta(u)$. Luego, $j_1^*[\beta(v_1) - k_2^*v_2] = 0$, y podemos tomar $w \in \oplus H^{q_k-1}(Y)$ tal que

$$\delta_1 w = \beta(v_1) - k_2^*v_2 .$$

Ahora, $\delta w = k_1^*\delta_1 w = k_1^*\beta(v_1) = \beta(v)$. Por lo tanto, w es un representante de $\beta_g(f^*u)$.

Pasando al tercer diagrama, consideremos $\alpha(v_2)$. Como $j_2^*\alpha(v_2) = \alpha\beta(u) = 0$ por hipótesis, podemos tomar $w_2 \in \oplus H^{q_k-1}(X)$ tal que $\delta_2 w_2 = \alpha(v_2)$, y claramente, g^*w_2 resulta ser un representante de $g^*\alpha_f\beta(u)$.

Por otra parte, se tiene que

$$\delta_1[g^*w_2 + \alpha^*(w)] = k_2^*\delta_2 w_2 + \alpha(\delta_1 w) = k_2^*\alpha(v_2) + \alpha[\beta(v_1) - k_2^*v_2] = \alpha\beta(v_1).$$

Por consiguiente, $w_1 = g^*w_2 + \alpha^*(w)$ es un representante de $\theta_{fg}(u)$, y el teorema queda demostrado.

Observación: La descomposición $\theta = \alpha\beta$ en R en general no es única. Si tomamos otra descomposición $\theta = \alpha'\beta'$ y suponemos que $f^*\beta'(u) = 0$, de (4.1) obtenemos otra expresión para $\theta_{fg}(u)$, pero también la indeterminación es diferente.

5. Las fórmulas de Peterson-Stein

Sea $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k = 0$ una relación en A de grado $r + 1$, que escribimos en nuestra notación en la forma $\alpha\beta = 0$. Con Adams ([1]), consideramos una operación secundaria estable Φ, asociada con esta relación. Las dos fórmulas de Peterson-Stein ([6]) expresan relaciones entre la operación Φ y ciertas operaciones funcionales.

La primera fórmula es equivalente al Axioma 5 de Adams ([1; p. 70]). Una traducción directa de este axioma a la notación usada en este trabajo es el siguiente:

Teorema 5.1. *Sea $f : X \to Y$ una transformación continua y $u \in H^q(Y)$ tal que $\beta(u) = 0, f^*u = 0$. Entonces, están definidas las operaciones $\Phi(u)$, $\beta_f(u)$, y se tiene que*

$$f^*\Phi(u) = (-1)^r\alpha^*[\beta_f(u)] \mod f^* \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k H^{q_k-1}(Y).$$

La segunda fórmula de Peterson-Stein puede obtenerse a partir de (4.1), y queda expresada por el siguiente

Teorema 5.2. *Sea $f : X \to Y$ una transformación continua y $u \in H^q(Y)$ tal que $f^*\beta(u) = 0$. Entonces, están definidas las operaciones $\Phi(f^*u)$, $\alpha_f\beta(u)$, y se tiene que*

$$\Phi(f^*u) = (-1)^{r+1}\alpha_f\beta(u) \qquad \mod \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k H^{q_k-1}(X) + f^*H^{q+r}(Y).$$

Demostración: Sea $\rho : E \to B$ la fibración canónica, introducida por Adams como ejemplo universal para Φ. En nuestro caso $B = K(\pi, q)$ es un complejo de Eilenberg-MacLane, donde π es un grupo cíclico de orden primo p.

Observamos primero que esta fibración es también ejemplo universal para $\alpha_f\beta(u)$. En efecto, si $\gamma_q \in H^q(B)$ es la clase fundamental, se tiene $\rho^*\beta(\gamma_q) = 0$, luego está definida $\alpha_\rho\beta(\gamma_q)$. Sea $g : Y \to B$ una transformación continua tal que $g^*\gamma_q = u$. Resulta $f^*g^*\beta(\gamma_q) = f^*\beta(u) = 0$, y por lo tanto, existe $h : X \to E$ tal que $\rho h = gf$. Luego,

$$\begin{aligned} h^*\alpha_\rho\beta(\gamma_q) &= \alpha_{\rho h}\beta(\gamma_q) = \alpha_{gf}\beta(\gamma_q) \\ &= \alpha_f\beta(g^*\gamma_q) = \alpha_f\beta(u). \end{aligned}$$

Por consiguiente, basta dar la demostración en el ejemplo universal.

Consideremos $i : F \to E$, $\rho : E \to B$, donde F es la fibra y la transformación i es la inclusión. Para $\gamma_q \in H^q(B)$, tenemos $\beta(\rho^*\gamma_q) = 0$, $(\rho i)^*\gamma_q = 0$, luego aplicando (4.1) con $\theta = 0$ en A ($\theta \in I$ en R), se obtiene

$$i^*\alpha_\rho\beta(\gamma_q) = -\alpha^*[\beta_i(\rho^*\gamma_q)].$$

Por otra parte, usando (5.1), resulta

$$i^* \Phi(\rho^*\gamma_q) = (-1)^r \alpha^*[\beta_i(\rho^*\gamma_q)].$$

Combinando estas dos relaciones, se tiene

$$i^*\Phi(\rho^*\gamma_q) = (-1)^{r+1} i^*\alpha_\rho\beta(\gamma_q), \qquad \operatorname{mod} i^* \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k H^{qk-1}(E).$$

Finalmente, ya que tanto Φ como $\alpha_f\beta(u)$ son operaciones estables, es suficiente dar la demostración en el ejemplo universal para valores grandes de q.

Con q grande, usando la sucesión exacta,

$$H^{q+r}(B) \xrightarrow{\rho^*} H^{q+r}(E) \xrightarrow{i^*} H^{q+r}(F),$$

se sigue que

$$(5.3) \quad \Phi(\rho^*\gamma_q) = (-1)^{r+1}\alpha_\rho\beta(\gamma_q), \qquad \operatorname{mod} \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k H^{qk-1}(E) + \rho^* H^{q+r}(B).$$

Esto termina la demostración de (5.2).

Otras demostraciones de las fórmulas de Peterson-Stein han sido dadas por Shimada ([8]) y Spanier ([9]).

6. Representación funcional de operaciones secundarias

Dada $\alpha\beta = 0$, una relación de grado $r + 1$, en el álgebra de Steenrod sobre Z_p, sea Φ una operación secundaria estable asociada.

Si $v \in H^q(X; Z_p)$ es tal que $\beta(v) = 0$, tenemos definida $\Phi(v)$. Por otra parte, sea $K = K(\pi, q)$ un complejo de Eilenberg-MacLane, donde π es un grupo cíclico de orden p. Si $\gamma_q \in H^q(K; Z_p)$ denota la clase fundamental, consideremos $f : X \to K$ tal que $f^*\gamma_q = v$. Luego, aplicando el Teorema 5.2, obtenemos

$$(6.1) \quad \Phi(v) = (-1)^{r+1}\alpha_f\beta(\gamma_q), \qquad \operatorname{mod} \textstyle\sum \alpha_k H^{qk-1}(X) + f^*H^{q+r}(K).$$

En general, esta indeterminación es mayor que la indeterminación natural de Φ. Sin embargo, si para cierta dimensión q, $f^*H^{q+r}(K) = 0$, la operación Φ puede representarse como una operación funcional en esa dimensión. Esto último puede lograrse siempre, para toda q, si imponemos suficientes condiciones en el dominio de definición de Φ. Determinaremos estas condiciones, en forma explícita en función de r.

Proposición 6.2. *Conservando su indeterminación natural la operación secundaria Φ de grado r, admite una representación de la forma (6.1) para toda q, si y solo si su dominio se restringe a las clases v que además de $\beta(v) = 0$ satisfacen las condiciones siguientes:*

(6.3) *si* $p = 2$, *sea* $2^{t+1} > r \geqq 2^t$, *entonces* $\mathrm{Sq}^r v = 0$, $\mathrm{Sq}^{2^i} v = 0$, *para toda* $0 \leqq i \leqq t - 1$;

(6.4) *si* $p > 2$, *sea* $2p^{t+1}(p-1) > r \geqq 2p^t(p-1)$, *entonces* $\mathcal{P}^r v = 0$, $\Delta v = 0$, $\mathcal{P}^{p^i} v = 0$, *para toda* $0 \leqq i \leqq t - 1$;

además, en este caso, cuando r es par pedimos, para toda $1 < j < p$ *y toda* $2k$ *tal que* $r = 2k(j-1)$, $(v)^j = 0 \bmod p$ *cuando* $\dim v = 2k$.

Demostración: Los resultados de Cartan y Serre ([3] y [7]) sobre la cohomología de $K(\pi, q)$ claramente implican que $f^*H^{q+r}(K) = 0$ en (6.1), para toda q, si se satisfacen (6.3), (6.4); luego, las condiciones son suficientes.

Para demostrar que son necesarias, sea $\{E_q\}$ un espectro en el sentido de G. W. Whitehead ([13]), formado con las fibraciones canónicas $\rho : E_q \to K(\pi, q)$ de Adams ([1]), y que constituyen un ejemplo universal de Φ. Consideremos solo $p = 2$, ya que el caso $p > 2$ se establece en forma análoga. Haciendo referencia a (5.3), demostraremos que las condiciones son necesarias para tener $\rho^*H^{q+r}(K) = 0$ para toda q.

Supongamos que para cierta $0 \leqq i \leqq t-1$, y para cierta q se tiene $\mathrm{Sq}^{2^i}\rho^*\gamma_q \neq 0$. Cada E_q es $(q-1)$-conexo, y su cohomología puede identificarse con la de un H-espacio, por lo que resulta ser una álgebra de Hopf. La suspensión $\sigma^* : H^{m+1}(E_{q+1}) \to H^m(E_q)$ es un isomorfismo para toda $m \leqq 2q-1$ y conmuta con Sq^{2^i}. Luego, se sigue que $\mathrm{Sq}^{2^i}\rho^*\gamma_q \neq 0$ para *toda* $q \geqq 2^i$.

Ahora, si $q \geqq 2^i$ se tiene

$$\rho^*\gamma_q \smile \mathrm{Sq}^{2^i}\rho^*\gamma_q \neq 0. \tag{6.5}$$

En efecto, $\rho^*\gamma_q$ es generador, y si q $> 2^i$, $\mathrm{Sq}^{2^i}\rho^*\gamma_q$ es también generador multiplicativo, por lo que se sigue (6.5). Si $q = 2^i$, entonces (6.5) se reduce a $(\rho^*\gamma_q)^3 \neq 0$, puesto que en un álgebra de Hopf sobre Z_2 la altura de los generadores es infinita o potencia de dos.

Con $2^{t+1} > r \geqq 2^t$, $t-1 \geqq i \geqq 0$, si tomamos $q = r - 2^i$, se tiene $q \geqq 2^i$, luego de (6.5) resulta $\rho^*H^{q+r}(K) \neq 0$. Finalmente, la condición $\mathrm{Sq}^r\rho^*\gamma_q = 0$ es necesaria, ya que Sq^r es un monomio admisible.

Observaciones:

(1) Al restringir el dominio de definición de Φ estamos considerando otra operación que seguimos denotando con el mismo símbolo. Si se restringe Φ al dominio donde admite representación funcional, como operación secundaria estable Φ resulta ser única.

(2) Si Sq^r pertenece al ideal izquierdo de A, generado por Sq^{2^i} con $i = 0, \cdots, t-1$, la condición $\mathrm{Sq}^r v = 0$ es superflua. Por ejemplo, esto sucede si $2^t + 2^{t-1} > r > 2^t$. Una observación análoga se tiene para $p > 2$.

(3) Exceptuando el caso $p > 2$ con r par, en muchos casos la hipótesis $\beta(v) = 0$ implica las condiciones (6.3), (6.4). Esto sucede, por ejemplo, para la familia de operaciones $\Phi_{i,j}$ considerada por Adams en [1].

Estableceremos algunos resultados sobre operaciones secundarias que se anulan por razones de dimensión. Primero, consideremos los resultados análogos para operaciones funcionales.

Sea $B(q)$ el subespacio de A definido en [11; p. 26] como el ideal izquierdo de A que aniquila toda clase de cohomología de dimensión $\leqq q$. Como espacio vectorial, $B(q)$ está generado por todos los monomios admisibles de exceso mayor que q.

TEOREMA 6.6. *Dada* $\alpha\beta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k$, *donde* $t_k =$ grado β_k, *supongamos que para toda* $1 \leqq k \leqq n$ *se tiene que,* $\beta_k \in B(q)$ *ó* $\alpha_k \in B(q + t_k)$. *Entonces,* $\alpha_f \beta(u) = 0$ *si* $\dim u \leqq q$.

Demostración: Es inmediata a partir de la definición de operación funcional. En efecto, sea $f : X \to Y$ una inclusión y $u \in H^q(Y)$ tal que $\alpha\beta(u) = 0$, $f^*\beta(u) = 0$. Ordenamos los índices de modo que $\beta_k \in B(q)$ para $k = 1, \cdots, h$ y $\alpha_k \in B(q + t_k)$ para $k = h + 1, \cdots, n$. Sea $w_k \in H^{q+t_k}(Y, X)$ tal que $j^* w_k = \beta_k(u)$. Luego, podemos tomar $w_k = 0$ para $k = 1, \cdots, h$. Ahora, $\sum_{k=h+1}^{n} \alpha_k(w_k) = 0$ por hipótesis, por lo tanto $\alpha_f \beta(u) = 0$.

COROLARIO 6.7. *Sea* $\alpha\beta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = 0$ *una relación en* A, *tal que para toda* k *se tiene que* $\beta_k \in B(q)$ *ó* $\alpha_k \in B(q + t_k)$, *donde* $t_k =$ grado β_k. *Sea* Φ *la operación secundaria asociada con la relación, que suponemos admite una representación funcional de acuerdo con* (6.2). *Entonces,* $\Phi(u) = 0$ *si* $\dim u \leqq q$.

Ejemplos:

(I) Sea $\Phi_{i,i}$ la operación secundaria construida por Adams usando la relación

$$\sum_{k=0}^{i} \mathrm{Sq}^{2^{i+1}-2^k} \mathrm{Sq}^{2^k} = 0.$$

Esta operación admite una representación funcional conservando su dominio natural de definición, y por (6.7) tenemos que

$$\Phi_{i,i}(u) = 0, \quad \text{si } \dim u \leqq 2^i - 1.$$

Examinemos el caso límite $\dim u = 2^i$, para algunas dimensiones. Usando las composiciones de las transformaciones de invariante de Hopf 1 y sus suspensiones, podemos construir las transformaciones $S^4 \to S^3 \to S^2$, $S^{10} \to S^7 \to S^4$, y $S^{22} \to S^{15} \to S^8$. Esto permite construir ejemplos, donde $\Phi_{1,1}(u) \neq 0$, $\Phi_{2,2}(v) \neq 0$, y $\Phi_{3,3}(w) \neq 0$, con $\dim u = 2$, $\dim v = 4$, y $\dim w = 8$, que son los casos límite. Como ilustración, calcularemos uno de estos ejemplos. Sea $f : S^7 \to S^4$ una transformación de invariante de Hopf 1, $g : S^{10} \to S^7$ su 3-suspensión, y $h = fg$ su composición. Construimos el complejo elemental $Y = S^4 \cup_h CS^{10}$, pegando el cono sobre S^{10} con S^4 por medio de h. En la misma forma construimos $X = S^7 \cup_g CS^{10}$. Claramente, existe una transformación continua $F : X \to Y$ tal que $f = F \mid S^7$, y que es un homeomorfismo en el interior de CS^{10}. Es inmediato que $\Phi_{2,2}$ está definido en el generador $v \in H^4(Y; Z_2)$, además, por (5.1) resulta

$$F^* \Phi_{2,2}(v) = \mathrm{Sq}^4 (\mathrm{Sq}_F^4 v) \neq 0,$$

por lo tanto, $\Phi_{2,2}(v) \neq 0$ en $H^{11}(Y; Z_2)$.

(II) Con la relación ($i \geqq 2$),

$$\mathrm{Sq}^1 \mathrm{Sq}^{2^i} + \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^{2^i-1} + \mathrm{Sq}^{2^i} \mathrm{Sq}^1 = 0,$$

construimos la operación $\Phi_{0,i}$. Restringimos el dominio de definición a clases v tales que $\mathrm{Sq}^{2^k} v = 0$ para $k = 0, \cdots, i$. Luego, de acuerdo con (6.2) la operación admite representación funcional, y aplicando (6.7) obtenemos que

$$\Phi_{0,i}(v) = 0, \quad \text{si } \dim v \leqq 2^i - 2.$$

Usando las composiciones $S^{n+3} \to S^{n+3} \to S^n$, $S^{n+7} \to S^{n+7} \to S^n$, donde las primeras transformaciones son de grado 2 y las segundas son suspensiones de transformaciones de invariante de Hopf 1, como en (I), se pueden construir ejemplos elementales donde $\Phi_{0,2}(u) \neq 0$, $\Phi_{0,3}(v) \neq 0$.

Para las dimensiones límite observamos que si ν' es el generador de la 2-componente primaria de $\pi_6(S^3)$, isomorfa con Z_4, entonces $E^2\nu' = 2\nu_5$, donde ν_5 es el generador de la 2-componente de $\pi_8(S^5)$ ([12; p. 42]).

También, si σ' es el generador de la 2-componente primaria de $\pi_{14}(S^7)$, isomorfa con Z_8, entonces $E^2\sigma' = 2\sigma_9$, donde σ_9 es el generador de la 2-componente de $\pi_{16}(S^9)$ ([12; p. 50]). Luego, si f es un representante de ν', construimos $X = S^3 \cup_f CS^6$. Análogamente, si g es un representante de σ', construimos $Y = S^7 \cup_g CS^{14}$. Si $u \in H^3(X; Z_2)$ es un generador, $\Phi_{0,2}(u) \neq 0$. Si $v \in H^7(Y; Z_2)$ es un generador, $\Phi_{0,3}(v) \neq 0$. Esto se sigue de los resultados anteriores y de la estabilidad de $\Phi_{0,k}$.

Observación: Para definir $\Phi_{0,i}$, Adams toma una relación de la forma

$$\mathrm{Sq}^1\, \mathrm{Sq}^{2^i} + (\mathrm{Sq}^{2^{i-1}}\, \mathrm{Sq}^1)\, \mathrm{Sq}^{2^{i-1}} + \textstyle\sum_{k=0}^{i-2} \mathrm{Sq}^{2^i-2^k+1}\, \mathrm{Sq}^{2^k} = 0.$$

Con esta relación la operación admite en su dominio natural de definición una representación funcional y tiene un conúcleo menor; sin embargo, en este caso solo podemos asegurar que $\Phi_{0,i}(v) = 0$ si $\dim v \leqq 2^{i-1}-1$.

(III) Usando la relación ($i \geqq 2$)

$$\Delta\mathcal{P}^{p^i} + (\mathcal{P}^p\Delta)\, \mathcal{P}^{p^i-p} - (\Delta\mathcal{P}^{p^{i-1}})\mathcal{P}^1 - \mathcal{P}^{p^i}\Delta = 0,$$

construimos una operación secundaria Φ de grado $r = 2p^i(p-1)$. De acuerdo con (6.2), para que admita una representación funcional restringimos su dominio a clases v tales que $\Delta v = 0$, $\mathcal{P}^{p^k} v = 0$ para $k = 0, \cdots, i$. Además, suponemos para toda $1 < j < p$ y toda $2k$ tal que $2p^i(p-1) = 2k(j-1)$, que $(v)^j = 0 \bmod p$ para $\dim v = 2k$. Resulta

$$\Phi(v) = 0, \quad \text{si } \dim v < 2(p^i - p)$$

(IV) Tomamos la relación ($i \geqq 2$)

$$\mathcal{P}^1\, \mathcal{P}^{p^i} + \mathcal{P}^p\mathcal{P}^{p^i-p+1} - \mathcal{P}^{p^i}\mathcal{P}^1 = 0,$$

y construimos la operación secundaria asociada Φ que resulta de grado $2(p^i+1)(p-1)-1$. Restringiendo su dominio a clases v tales que $\Delta v = 0$, $\mathcal{P}^{p^k} v = 0$ para $k = 0, \cdots, i$, se tiene que

$$\Phi(v) = 0, \quad \text{si } \dim v < 2(p^i - p + 1).$$

7. Una fórmula del producto para $\alpha_f\beta$

Nuevamente, sea $\theta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k$ un elemento homogéneo de grado $r + 1$, del álgebra R. Con la notación de la sección 2, expresamos $\theta = \alpha\beta$, como composición de las operaciones $\alpha = \epsilon a$, $\beta = b\,\lambda$, definidas en (2.3). Dada una transformación continua $f : X \to K$, sean $u \in H^q(K)$, $v \in H^m(K)$, dos elementos no nulos, y supongamos que se satisfacen las condiciones siguientes:

(7.1) $\theta \in R^+(s)$,

(7.2) $\theta(u \times v) = 0$,

(7.3) para toda $\nu \in R^+(s)$, se tiene $f^*\nu(u) = 0$, $f^*\nu(v) = 0$.

Claramente, de (7.1) se sigue que $\alpha_k \in R^+(s)$, $\beta_k \in R^+(s)$ para toda k; luego, de (7.3), resulta que $f^*\beta(u) = 0$, $f^*\beta(v) = 0$, y $f^*\beta(u \smile v) = 0$; de (7.2), se tiene que $\alpha\beta(u) = 0$, $\alpha\beta(v) = 0$, y $\alpha\beta(u \smile v) = 0$. Por lo tanto, están definidas las operaciones $\alpha_f\beta(u)$, $\alpha_f\beta(v)$, y $\alpha_f\beta(u \smile v)$.

Teorema 7.4. *Con las hipótesis anteriores, se tiene*

$$\alpha_f\beta(u \smile v) = \alpha_f\beta(u) \smile f^*v + (-1)^{qr} f^*u \smile \alpha_f\beta(v),$$

módulo la indeterminación común que es

$$f^*H^{q+m+r}(K) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k H^{q+m+t_k-1}(X),$$

donde $t_k =$ grado β_k.

Demostración: Suponiendo que $f : X \to K$ es una inclusión, consideremos el par (K, X), la inclusión $j : K \to (K, X)$, y la sucesión exacta de cohomología

$$\to H^*(X) \xrightarrow{\delta} H^*(K, X) \xrightarrow{j^*} H^*(K) \xrightarrow{f^*} H^*(X) \to .$$

Las siguientes propiedades del producto de cohomología son bien conocidas. Si w, z son dos elementos de $H^*(K, X)$, de la naturalidad del producto ([10; p. 958]) se sigue que

$$w \smile z = (j^*w) \smile z = w \smile j^*z. \tag{7.5}$$

También, si $x \in H^*(X)$, $w \in H^*(K, X)$, se tiene

$$(\delta x) \smile w = (j^*\delta x) \smile w = 0. \tag{7.6}$$

Usaremos estas propiedades para construir un homomorfismo,

$$\mu : R^+(s) \otimes R^+(s) \to H^*(K, X),$$

que será auxiliar en la demostración.[1] Si ν_1, ν_2 son elementos homogéneos de $R^+(s)$ y ν_2 es de grado t, por la hipótesis (7.3) existen elementos $\overline{\nu_1(u)}$, $\overline{\nu_2(v)}$ de

[1] El homomorfismo μ, que simplificó la demostración original, me fué sugerido por S. Gitler.

$H^*(K, X)$ tales que $j^* \overline{\nu_1(u)} = \nu_1(u)$, $j^* \overline{\nu_2(v)}, = \nu_2(v)$. Definimos,

$$\mu(\nu_1 \otimes \nu_2) = (-1)^{qt} \overline{\nu_1(u)} \smile \overline{\nu_2(v)}\ , \tag{7.7}$$

y extendemos μ linealmente para un elemento arbitrario.

Usando las propiedades (7.5), (7.6), es fácil verificar que μ no depende de las elecciones $\overline{\nu_1(u)}$, $\overline{\nu_2(v)}$, que es un homomorfismo bien definido entre Z_p-módulos, y que solo depende de u, v. Además, se tiene que

$$\mu(\nu_1 \otimes \nu_2) = (-1)^{qt}\nu_1(u) \smile \overline{\nu_2(v)} = (-1)^{qt}\overline{\nu_1(u)} \smile \nu_2(v). \tag{7.8}$$

Ahora, la operación $\beta = b\lambda$ puede expresarse en el producto $u \smile v$ como,

$$\begin{aligned}\beta(u \smile v) &= b\lambda(u \smile v) = d_n^*\, \psi_n(b)\lambda(u \otimes v)\\ &= d_n^*\, [\psi_n^+ (b) + \psi_n^0(b)]\lambda(u \otimes v)\\ &= d_n^*\psi_n^+(b)\lambda(u \otimes v) + \beta(u) \smile v + u \smile \beta_\#(v),\end{aligned}$$

donde d_n^* es la transformación inducida en la suma directa $[H^*(K) \otimes H^*(K)]^n$ por la multiplicación en cohomología $d^* : H^*(K) \otimes H^*(K) \to H^*(K)$, determinada por la transformación diagonal $d : K \to K \times K$; las ψ_n , ψ_n^+, ψ_n^0 son como en la sección 2; además

$$\beta_\# (v) = [(-1)^{qt_1}\beta_1(v), \cdots , (-1)^{qt_n}\beta_n(v)],$$

y se entiende que $\beta(u) \smile v = [\beta_1(u) \smile v, \cdots , \beta_n(u) \smile v]$, etc.

Para las componentes de $d_n^*\psi_n^+(b)\lambda(u \otimes v)$, se verifica que

$$j^*\mu\, \psi^+(\beta_k) = d^*\psi^+(\beta_k)\cdot(u \otimes v),$$

donde μ es como en (7.7). De esto y de (1.2), se sigue que

$$\overline{\beta(u \smile v)} = \mu_n\psi_n^+(b) + \overline{\beta(u)} \smile v + u \smile \overline{\beta_\#(v)}$$

es tal que $j^*\overline{\beta(u \smile v)} = \beta(u \smile v)$, donde μ_n es la transformación inducida por μ en la suma directa y $\overline{\beta(u)}$, $\overline{\beta_\#(v)}$ son elementos de $[H^*(K, X)]^n$, seleccionados de modo que $j^*\overline{\beta(u)} = \beta(u)$, $j^* \overline{\beta_\#(v)} = \beta_\#(v)$.

Calculemos,

$$\alpha\overline{\beta(u \smile v)} = \alpha\mu_n\psi_n^+(b) + \alpha[\overline{\beta(u)} \smile v + u \smile \overline{\beta_\#(v)}].$$

Una verificación directa en las componentes de $\alpha\mu_n\psi_n^+(b)$ demuestra que

$$\alpha_k\mu\psi_n^+(\beta_k) = \mu[\psi(\alpha_k)\cdot\psi^+(\beta_k)].$$

Para establecer esto último, utilizamos la siguiente propiedad. Si $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ y $\tau_1 \otimes \tau_2$ son elementos de $R^+(s) \otimes R^+(s)$, entonces $\tau_1\overline{\sigma_1 u} \smile \tau_2\overline{\sigma_2 v} = \overline{\tau_1\sigma_1 u} \smile \overline{\tau_2\sigma_2 v}$. Esto es consecuencia de la naturalidad de las operaciones cohomológicas y del hecho que la expresión (7.7) es única. Luego, tenemos que

$$\alpha\mu_n\psi^+(b) = \mu[\psi_n(a)\cdot\psi_n^+(b)].$$

Un cálculo análogo con el segundo término demuestra que

$$\alpha\,[\overline{\beta(u)} \smile v + u \smile \overline{\beta_{\#}(v)}] = \overline{\alpha\beta(u)} \smile v + (-1)^{q(r+1)}u \smile \overline{\alpha\beta(v)}$$
$$+ \mu[\psi_n(a)\cdot\psi_n{}^0(b) - \psi^0(a\cdot b)].$$

Por otra parte, de (2.2) se tiene la identidad

$$\psi^+(a\cdot b) = \psi_n(a)\cdot\psi_n{}^+(b) + \psi_n(a)\cdot\psi_n{}^0(b) - \psi^0(a\cdot b).$$

En consecuencia, resulta

$$\overline{\alpha\beta(u \smile v)} = \overline{\alpha\beta(u)} \smile v + (-1)^{q(r+1)}\, u \smile \overline{\alpha\beta(v)} + \mu\psi^+(a\cdot b). \tag{7.9}$$

Ahora, demostraremos que $\mu\psi^+(a\cdot b) = 0$. Para esto, considerando $R^+(s)$ y $H^*(K)$ como Z_p-módulos, introducimos las transformaciones h_1, $h_2 : R^+(s) \rightarrow H^*(K)$, definidas por $h_1(\nu) = \nu(u)$, $h_2(\nu) = \nu(v)$, para toda $\nu \in R^+(s)$.

Sean N_1 = núcleo de h_1, N_2 = núcleo de h_2, N = núcleo de $(h_1 \otimes h_2)$. Podemos identificar,

$$N = N_1 \otimes R^+(s) + R^+(s) \otimes N_2\,. \tag{7.10}$$

Por otra parte, (7.2) es equivalente con $\psi(\theta)\cdot(u \otimes v) = 0$, y esto implica que $\psi^+(\theta)\cdot(u \otimes v) = 0$, o en forma equivalente que $\psi^+(a\cdot b)\cdot(u \otimes v) = 0$. Por lo tanto, $\psi^+(a\cdot b) \in N$. Luego, de (7.10), se tiene

$$\psi^+(a\cdot b) = \sum \rho_i \otimes \nu_i + \sum \nu_j{}' \otimes \rho_j{}',$$

donde $\rho_i \in N_1$, $\rho_j{}' \in N_2$. Por consiguiente, de (7.8), se sigue que,

$$\mu\psi^+(a\cdot b) = \sum \pm\, \rho_i(u) \smile \overline{\nu_i(v)} + \sum \pm\, \overline{\nu_j{}'(u)} \smile \rho_j{}'(v) = 0$$

Luego, la expresión (7.9) se reduce a

$$\overline{\alpha\beta\,(u \smile v)} = \overline{\alpha\beta\,(u)} \smile v + (-1)^{q(r+1)}\, u \smile \overline{\alpha\beta\,(v)}.$$

Sean $z_1 \in H^{q+r}(X)$, $z_2 \in H^{m+r}(X)$ elementos tales que

$$\delta z_1 = \overline{\alpha\beta(u)}, \qquad \delta z_2 = \overline{\alpha\beta(v)}.$$

Claramente, z_1, z_2 son, respectivamente, representantes de $\alpha_f\beta(u)$, $\alpha_f\beta(v)$. Construimos $z \in H^{q+m+r}(X)$ como sigue:

$$z = z_1 \smile f^*v + (-1)^{qr} f^*u \smile z_2\,.$$

Se comprueba que (ver [10; 958])

$$\delta z = \delta z_1 \smile v + (-1)^{q(r+1)}u \smile \delta z_2 = \overline{\alpha\beta(u \smile v)},$$

y por lo tanto, z resulta un representante de $\alpha_f\beta(u \smile v)$.

Por último, se verifica fácilmente que la indeterminación de $\alpha_f\beta(u \smile v)$ contiene a las indeterminaciones de los otros dos términos de (7.4), y esto termina la demostración del teorema.

8. Una fórmula del producto para Φ

Sea $\alpha\beta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k = 0$ una relación de grado $r + 1$, en el álgebra A sobre Z_p, tal que

$$(8.1) \qquad \alpha_k \in R^+(s), \qquad \beta_k \in R^+(s).$$

Tomemos dos clases de cohomología $u \in H^q(X; Z_p)$, $v \in H^m(X; Z_p)$ tales que

$$(8.2) \qquad R^+(s)\cdot u = 0, \quad R^+(s)\cdot v = 0.$$

Por lo tanto, $\beta(u) = 0$, $\beta(v) = 0$, y $\beta(u \smile v) = 0$. Luego, si Φ es una operación secundaria estable determinada por la relación $\alpha\beta = 0$, están definidas $\Phi(u)$, $\Phi(v)$, y $\Phi\,(u \smile v)$.

Con $K_1 = K(\pi, q)$, $K_2 = K(\pi, m)$, complejos de Eilenberg-MacLane, donde π es un grupo cíclico de orden p, tomamos transformaciones $f : X \to K_1$, $g : X \to K_2$ tales que $f^*\gamma_q = u$, $g^*\gamma_m = v$, donde γ_q, γ_m son, respectivamente, las clases fundamentales de K_1, K_2. Sea $h : X \to K_1 \times K_2$ la transformación producto, definida por $h(x) = [f(x), g(x)]$. Obviamente, $h^*(\gamma_q \times 1) = u$, $h^*(1 \times \gamma_m) = v$, y $h^*(\gamma_q \times \gamma_m) = u \smile v$, y, por (8.1), (8.2), se sigue que h, $\alpha\beta = 0$, $\gamma_q \times 1$, y $1 \times \gamma_m$ verifican las condiciones (7.1), (7.2), (7.3). Luego, aplicando (7.4) se obtiene

$$\alpha_h\beta(\gamma_q \times \gamma_m) = \alpha_f\beta(\gamma_q) \smile v + (-1)^{qr}u \smile \alpha_g\beta(\gamma_m),$$

módulo la indeterminación común, que es

$$(8.3) \qquad h^*H^{q+m+r}(K_1 \times K_2) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k H^{q+m+t_k-1}(X),$$

con $t_k =$ grado β_k. En esta relación hemos usado identidades de la forma $\alpha_h\beta(\gamma_q \times 1) = \alpha_f\beta(\gamma_q)$, donde la indeterminación común es la de $\alpha_h\beta(\gamma_q \times 1)$.

Ahora, de la segunda fórmula de Peterson-Stein (5.2), se obtiene que

$$\Phi(u) = \Phi(f^*\gamma_q) = (-1)^{r+1}\alpha_f\beta(\gamma_q),$$

$$\Phi(v) = \Phi(g^*\gamma_m) = (-1)^{r+1}\alpha_g\beta(\gamma_m),$$

$$\Phi(u \smile v) = \Phi[h^*(\gamma_q \times \gamma_m)] = (-1)^{r+1}\alpha_h\beta(\gamma_q \times \gamma_m).$$

Sustituyendo, resulta el

TEOREMA 8.4. *Sea Φ una operación secundaria estable determinada por la relación $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k = 0$, de grado $r + 1$, donde $\alpha_k \in R^+(s)$, $\beta_k \in R^+(s)$. Si $u \in H^q(X; Z_p)$, $v \in H^m(X; Z_p)$ son tales que $R^+(s)\cdot u = 0$, $R^+(s)\cdot v = 0$, entonces, están definidas $\Phi(u)$, $\Phi(v)$, $\Phi(u \smile v)$, y se tiene*

$$(8.5) \qquad \Phi(u \smile v) = \Phi(u) \smile v + (-1)^{qr}u \smile \Phi(v),$$

módulo la indeterminación (8.3).

COROLARIO 8.6. *Con las hipótesis de* (8.4), *la fórmula* (8.5) *vale para toda*

q, m, módulo la indeterminación

$$\sum_{k=1}{}^{n} \alpha_k H^{q+m+t_k-1}(X),$$

si $r < 2^{s+1}$ *para* $p = 2$, *ó si* $r < 2p^{s+1}(p-1)$ *para* $p > 2$.

Centro de Investigación del IPN, México, D. F.

Referencias

[1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one,* Ann. of Math., **72**(1960), 20–104.

[2] J. Adem, *Sobre la fórmula del producto para operaciones cohomológicas secundarias,* Bol. Soc. Mat. Mex., **4**(1959), 42–65.

[3] H. Cartan, Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie, Seminaire H. Cartan, Paris, 1954/55.

[4] J. Milnor, *The Steenrod algebra and its dual,* Ann. of Math., **67**(1958), 150–171.

[5] M. Nakaoka, *Note on cohomological operations,* J. Inst. Polytech., Osaka City Univ., **4**(1953), 51–58.

[6] F. P. Peterson and N. Stein, *Secondary cohomology operations: two formulas,* Amer. J. Math., **81**(1959), 281–305.

[7] J. P. Serre, *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane,* Comment. Math. Helv., **27**(1953), 198–231.

[8] N. Shimada, *On stable functional cohomology operations,* Proc. Japan Acad., **36**(1960), 183–186.

[9] E. Spanier, *Secondary operations on mappings and cohomology,* Ann. of Math. **75**(1962), 260–282.

[10] N. E. Steenrod, *Cohomology invariants of mappings,* Ann. of Math., **50**(1949), 954–988.

[11] N. E. Steenrod and D. B. A. Epstein, Cohomology operations, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1962.

[12] H. Toda, Composition methods in homotopy groups of spheres, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1962.

[13] G. W. Whitehead, *Homology theories and duality,* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **46** (1960), 554–556.